Pubblicazione mensile

Anno LVII - Serie VI - Vol. I - 1° Sem. - Fasc. 5°

Maggio 1911
Pubblicato il 29 Giugno

IL NUOVO CIMENTO

FONDATO DA C. MATTEUCCI E R. PIRIA
E CONTINUATO DA E. BETTI E R. FELICI

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

DIRETTORI
A. BATTELLI, A. RÒITI, V. VOLTERRA.

DELEGATI DELLA SOCIETÀ
A. GARBASSO E G. P. GRIMALDI.

REDATTORE
O. M. CORBINO.

INDICE:

PISA
STABILIMENTO TIPOGRAFICO TOSCANO
Ditte: Vannucchi-Galileiana-Pieraccini
1911

Il prezzo annuo di abbonamento è di

Lire 18 per l' Italia

„ 20 per l' Estero

L'importo dev'essere inviato al Sig. **ALFREDO LAVACCHINI**, Amministratore del « NUOVO CIMENTO », **Via Gino Capponi, 3, FIRENZE.**

Coloro che appartengono alla Società Italiana di Fisica spediranno la quota di *L. 18* al Cassiere Prof. A. Stefanini, Lucca, il quale a richiesta rilascierà la quietanza di L. 15 se l'abbonamento è a carico dell'Istituto a cui il Socio appartiene.

Chi desidera pubblicare nel « Nuovo Cimento » una memoria originale manderà il relativo manoscritto ad uno dei membri del Comitato di Direzione Proff.: Battelli, Ròiti, Volterra, Garbasso, Grimaldi o al Redattore Prof. O. M. Corbino (Istituto Fisico di Roma). Dei lavori originali pubblicati nel Periodico l'autore riceverà gratis 50 copie.

LA LEGGE DELLA RESISTENZA DELL' ARIA E IL SOSTENTAMENTO DEGLI AEROPLANI.

PROF. CARLO DEL LUNGO.

Or sono quindici anni, si pubblicava in Italia un libro (A. Faccioli. *La teoria del volo.* Milano, Hoepli) che insieme con molte bizzarrie e divagazioni conteneva parecchie cose buone, ed era in ogni modo una delle prime voci fra noi, che preconizzassero con fiducia la possibilità della locomozione aerea.

Nelle prime pagine, l' autore cercava la legge fondamentale dell' aerodinamica, cioè la resistenza dell' aria ad una superficie piana, inclinata, e a questo intento faceva il seguente ragionamento.

Consideriamo, diceva, una superficie piana S, senza spessore sensibile, che discenda verticalmente con velocità costante u lungo un apparecchio adatto: la resistenza incontrata si può considerare, secondo l' esperienza, proporzionale alla superficie e al quadrato della velocità: essa sarà data, dunque, da

$$P = k\,S\,u^2 .$$

Ma supponiamo inoltre (fig. 1) che l'apparecchio si trovi sopra un veicolo e scorra orizzontalmente con velocità v, percorrendo la linea B C, mentre la superficie cade da A in B. Allora il moto effettivo della superficie S, sarà lungo l' ipotenusa A C, con velocità $w = \sqrt{u^2 + v^2}$, facendo con la direzione del moto un angolo α, definito dalla relazione

$$\frac{u}{v} = \operatorname{tg} \alpha$$

e avremo inoltre $w \operatorname{sen} \alpha = u \quad w \cos \alpha = v$.

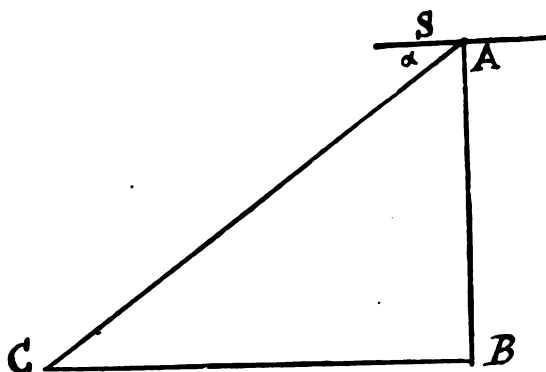



Fig 1

La resistenza al moto, ossia la pressione verticale P, non può essere modificata (diceva l' autore) da questo movimento orizzontale, e sarà ancora

$$P = k\,S\,u^2 = k\,S\,w^2 \operatorname{sen}^2 \alpha$$

e le sue componenti saranno

nella direzione A C del moto $R = P \operatorname{sen} \alpha = k\,S\,w^2 \operatorname{sen}^3 \alpha$
nella direzione perpendicolare $Q = P \cos \alpha = k\,S\,w^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha.$

In conclusione, la superficie S cadrà verticalmente con la stessa velocità come da ferma: e perciò se ne deduce, in generale, che una superficie piana S, movendosi con velocità w nell' aria in una direzione qualsiasi, e facendo con la direzione del moto un angolo α, sopporta una pressione, normale alla superficie stessa,

$$P = k\,S\,w^2 \operatorname{sen}^2 \alpha$$

donde una resistenza al moto

$$R = k\,S\,w^2 \operatorname{sen}^3 \alpha$$

e una componente normale al moto

$$Q = k\,S\,w^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha.$$

Nel caso che il moto sia orizzontale e uniforme, e trascurando la resistenza che la superficie, supposta un semplice piano, incontra movendosi parallelamente a se stessa, R è la forza necessaria alla propulsione, e Q è la spinta di sollevamento, eguale, quindi, al peso dell' apparecchio.

Tali erano le conclusioni teoriche alle quali perveniva l'autore, con un ragionamento apparentemente esatto e rigoroso, fondato sull' applicazione del principio galileiano della composizione dei movimenti.

Ma l' esperienza contraddiceva assolutamente a queste conclusioni, e l' autore, pur senza rendersi conto del perchè, doveva riconoscere che la formula teorica non si adattava affatto ai risultati sperimentali, e che la vecchia formula empirica

$$R = k \cdot S \, u^2 \operatorname{sen} \alpha$$

era la vera o, per lo meno, esprimeva assai meglio i risultati dell'esperienza: e questa formola, con una limitazione per gli angoli piccoli, suggerita dalle esperienze, applicava l' autore per svolgere la sua teoria del volo.

Questo disaccordo fra l' esperienza e una deduzione fondata sui principî meno discutibili della meccanica merita di essere esaminato. In esso si rivela un fenomeno non difficile a intendersi, ma in certo modo dimenticato dai teorici, non intuito dai pratici, che acquista un' importanza capitale nel problema del volo meccanico. Si può dire, anzi, che questa ignoranza o dimenticanza ha contribuito a ritardare il trionfo dell' aviazione, facendo apparire il problema anche più difficile di quel che fosse.

L' errore nascosto nel ragionamento sopra esposto, errore comunissimo e ripetuto da molti, consiste nell' ammettere che la superficie S cadendo con la velocità u mentre si trasporta orizzontalmente (ossia discendendo obliquamente), incontri *sotto di sè* la stessa resistenza P, come quando discende verticalmente.

Galileo per primo incorre in questo errore, quando, nella giornata seconda del suo celebre Dialogo, fa dire al Sagredo:

« quando in cima di una torre fusse una colubrina livellata,
« e con essa si tirassero tiri di punto in bianco, cioè paral-
« leli all' orizzonte, per poca o molta carica che si desse al
« pezzo, sì che la palla andasse a cadere ora lontana mille
« braccia, or quattro mila, or sei mila, or dieci mila, etc.,
« tutti questi tiri si spedirebbero in tempi eguali tra di loro,
« e ciascheduno eguale al tempo che la palla consumerebbe
« a venire dalla bocca del pezzo sino in terra, lasciata, sen-
« z'altro impulso, cadere semplicemente giù a perpendicolo » *).

L' eguale durata di caduta della detta palla, semplicemente abbandonata dalla cima della torre o lanciata orizzontalmente con l' artiglieria, non si avrebbe in realtà, a meno che l' esperienza non fosse fatta fuori dell' aria. Ma il principio galileiano della composizione integrale dei diversi movimenti, affermato con mirabile efficacia e novità di argomenti, proprio in questa seconda giornata del Dialogo, non è menomamente infirmato; e sarebbe stoltezza irriverente il far carico a Galileo di non aver pensato ad un fatto che era di secondaria importanza di fronte al problema fondamentale che si trattava di risolvere.

Galileo, che per primo era riuscito a riconoscere nel movimento dei corpi l' effetto vario perturbatore e ingannatore della resistenza dell' aria, era bene in grado di fare questa più sottile previsione o osservazione di una resistenza di diverso genere opposta dall' aria, in certe circostanze, ai corpi in moto; e non è improbabile che di quest' analisi si trovi alcuna traccia nella vasta opera sua. Lo farebbero pensare le parole con le quali il Salviati replica al Sagredo: « .... e
« quando non ci fusse l' impedimento accidentario dell' aria,
« io tengo per fermo che se nell' uscir la palla del pezzo si
« lasciasse cadere un' altra dalla medesima altezza giù a
« piombo, amendue arriverebbero a terra nel medesimo i-
« stante, ... ».

Ma le parole seguenti « L' impedimento poi, che potesse
« venir dall' aria, sarebbe nel ritardare il moto velocissimo
« del tiro » ci lasciano incerti, sul pensiero di Galileo, che

*) Le Opere di G. Galilei. Ediz. nazionale Vol. VII. pag. 181.

forse non era sicuro su questo punto. Infatti, essendo il fatto, cioè la simultanea caduta a terra delle palle, indipendente dalla velocità e ampiezza del tiro, la diminuzione della velocità prodotta dalla resistenza dell' aria non potrebbe impedirlo; qualunque sia o diventi la velocità orizzontale, la palla lanciata dovrebbe discendere verso terra, come se cadesse a piombo.

Ma l' esperienza contraddice a questa apparentemente legittima applicazione del principio galileiano; una freccia lanciata orizzontalmente sopra un terreno piano, impiega per giungere a terra assai più tempo che lasciata cadere a piombo dalla stessa altezza e, si intende, nella stessa posizione trasversale in cui vien lanciata. Il fenomeno consiste dunque in questo; che un corpo qualunque che cade nell' aria obliquamente, incontra sotto di se, in direzione verticale, una resistenza maggiore che nella semplice caduta verticale con la stessa velocità; e perciò la discesa è più lenta, tanto più lenta quanto maggiore è la velocità orizzontale, ma ci influisce moltissimo, la forma della superficie e la sua posizione nel moto.

Da questo fenomeno deriva un aiuto potentissimo e insperato al volo meccanico. Una superficie piana e lievemente inclinata, come le ali di un aeroplano, è nella sua corsa aiutata a sostenersi da una resistenza *sui generis*, che si aggiunge alla componente verticale della resistenza dell'aria, ma è da essa indipendente, poichè sussiste anche quando la superficie si muove senza inclinazione alcuna, cioè parallelamente a se stessa, nel qual caso la pressione ordinaria di resistenza è nulla.

Io non so a chi si debba la prima e chiara affermazione di questo principio così importante della meccanica dei fluidi. La prima dimostrazione a me nota è quella datane sperimentalmente dal Langley nei suoi classici *Esperiments in Aerodynamics* *) che han portato all' aviazione il più importante contributo dei dati fisici necessari.

*) « Experiments in Aerodynamics », by. S. P. Langley. Washington, Smithsonian Institution. Prima ediz. 1891, seconda 1902.

Dalle esperienze del Langley si ricava, per esempio, che una superficie formata da due rettangoli di cent. 45,7 per 10,2, del peso di 464 grammi, cadendo da un' altezza di 122 centimetri, impiega i tempi seguenti, secondo la velocità orizzontale di cui è animata. Il moto avviene normalmente al lato maggiore

veloc. orizz. (metri)	caduta (in secondi)
0	0,53
10,8	0,70
16,4	1,08
19,6	2,05
20.5	2,55

Si vede, dunque, che una velocità di 20 m. al secondo rende la velocità di caduta circa 5 volte più piccola.

Ma se agli stessi piani, pur con lo stesso peso e la stessa superficie, si danno altre dimensioni (30,5 per 15,2) la caduta dalla quiete rimanendo la medesima, l' influenza del movimento orizzontale è minore, e la durata della caduta, con la velocità di 21,4 m., è di 1,29 secondi. Tale durata diminuisce ancora se ai piani si dà la forma di un quadrato ; se, poi, gli stessi piani rettangolari di 30,5 per 15,2 si fanno muovere perpendicolarmente al lato minore, l' influenza del moto di traslazione diventa minima ; e con 22,2 m. di velocità, la caduta è solo di 0,72, cioè meno della metà che, a parità di velocità, nell' altra posizione. Resulta evidente il vantaggio di adoperare superficie rettangolari allungate e di farle muovere nel verso normale al lato maggiore.

L' effetto si manifesta egualmente quando la superficie si muove facendo un angolo di inclinazione sulla linea del moto; nel qual caso, la componente verticale della pressione normale al piano, tende a sostenerlo ; ma il sostentamento è favorito moltissimo dal primo fenomeno.

Una coppia di piani rettangolari, pesanti complessivamente 500 grammi, con la superficie di cm² 930, che si muove orizzontalmente con un angolo di 10 gradi, richiede le seguenti velocità per sostenersi in aria, movendosi verso il lato più lungo.

veloc. di sostentamento in m. al secondo	dimensioni della superficie
12,5	76,2 × 12,2
13,5	61,0 × 15,2
15,0	30,5 × 30,5
21.0	61.0 × 15,2

In quest' ultimo caso i rettangoli si muovono dalla parte del lato minore.

La spiegazione del fenomeno singolare è del resto facile, e si ricongiunge a quella di altri fenomeni noti. Il Langley cita, come esempio simile, quello di un pattinatore che può sostenersi anche sopra un ghiaccio sottile che non reggerebbe al suo peso, purchè si muova velocemente; e, similmente, una schiera di pattinatori potrà sostenersi, procedendo in linea di fronte, mentre il ghiaccio si romperà piuttosto, se essi procedono in colonna l' uno dietro all' altro.

Stando l' uomo fermo, il suo peso agirà costantemente sulla sola area occupata dai piedi, e la quantità di moto nell' unità di tempo sarà comunicata alla massa sottostante: se l' uomo corre, la stessa quantità di moto vien comunicata ad una massa tanto maggiore quanto maggiore è la superficie sulla quale successivamente agisce il peso: perciò, crescendo la massa messa in moto, diminuisce la velocità acquistata.

Nell' aria, quando una superficie si muove orizzontalmente nel proprio piano, viene ad appoggiarsi sopra aria sempre nuova che prima era in quiete, alla quale deve comunicare il movimento discendente. La massa d' aria sulla quale agisce il peso, è nel moto orizzontale molto maggiore che nella caduta verticale; e, quindi, maggiore la resistenza e più lenta la caduta, *come se il piano avesse una superficie più grande.*

Così un uccello che abbia già una certa velocità, potrà *con l' ali aperte e ferme* percorrere un tratto quasi orizzontale nell' aria. E si spiega pure similmente l' effetto delle penne aggiunte alle freccie, per le quali vanno più lontane. In simile modo volano gli aeroplani, utilizzando ali rettangolari spinte nel verso del lato più lungo.

Il Langley non si è molto occupato di rappresentare con formule i resultati delle sue esperienze che son raccolti in tavole e curve. Si è contentato di dire, che la resistenza dell'aria ad una superficie S che si muove normalmente, è bene rappresentata dalla solita formula

$$P = k S w^2$$

e che la pressione stessa sopra la medesima superficie, quando questa si muove facendo un angolo di inclinazione α, è esprimibile con

$$P_1 = P . f(\alpha)$$

dove la funzione $f(\alpha)$ dipende dalla forma della superficie e dalla direzione in cui si muove.

Io ho cercato se fosse possibile di rappresentare ed esprimere analiticamente questa complessa resistenza dell'aria alle superficie che si muovono parallelamente a se stesse o con piccolo angolo di inclinazione: e ho seguito il ragionamento stesso del citato Faccioli, correggendo però il suo errore, e tenendo conto del fenomeno da lui trascurato.

Ammettiamo dunque che una superficie piana S, cadendo con moto uniforme nell'equilibrio dinamico, con velocità v, incontri una resistenza esprimibile con la formula

$$P = k S v^2 \text{ da cui } v^2 = \frac{P}{k S}.$$

Quando la stessa superficie si trasporta obliquamente con velocità v, la superficie di [illegible] sull'aria non è più S ma quella descritta o coperta dalla superficie nel suo movimento. Se la superficie è un rettangolo [illegible] e il moto [illegible] avviene [illegible] al lato a, la superficie di appoggio [illegible] sarà S più quella descritta dal lato [illegible]

$$S = [illegible]$$

[illegible] verticalmente [illegible] la superficie $S = [illegible]$

sia che la velocità di caduta è non più $\sqrt{\frac{P}{kS}}$ ma $\sqrt{\frac{P}{k(S+av)}}$ e perciò tanto più piccola quanto maggiori sono v ed a.

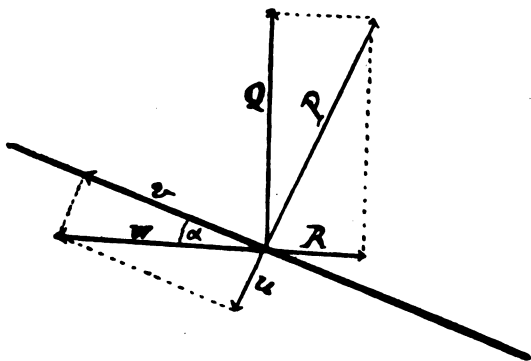



Fig. 2

Consideriamo ora in generale (fig. 2) un piano rettangolare $S = a\,b$ che si muove orizzontalmente, facendo un angolo α con la direzione del moto, e sia w la velocità orizzontale: potremo considerare questa velocità w, come resultante di una velocità u normale al piano e di una velocità v parallela ad esso.

Avremo

$$w \operatorname{sen} \alpha = u \qquad w \cos \alpha = v\,.$$

La superficie *di appoggio* sarà dunque $S + a\,v$ e perciò la resistenza o pressione normale al piano sarà

$$P = k\,(S + a\,v)\,u^2$$

ovvero, riferendoci alla velocità effettiva w,

$$P = k\,(S + a\,w \cos \alpha)\,w^2 \operatorname{sen}^2 \alpha$$

la quale per $\alpha = 90^0$ si riduce alla formula solita

$$P = k\,S\,w^2\,.$$

La pressione P si può decomporre in una resistenza orizzontale $R = P \operatorname{sen} \alpha$ e in una componente verticale $Q = P \cos \alpha$: la prima eguale alla forza di propulsione (minima) necessaria a mantenere il movimento, la seconda uguale al peso della superficie stessa, se il movimento si mantiene orizzontale. Avremo dunque

$$R = k\, w^2 \operatorname{sen}^3 \alpha\, (S + a\, w \cos \alpha)$$
$$Q = k\, w^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha\, (S + a\, w \cos \alpha)\,.$$

E il lavoro di propulsione nell' unità di tempo sarà

$$L = R\, w \quad \text{ovvero} \quad L = Q\, w \operatorname{tang.} \alpha\,.$$

In quest' ultima formula si deve notare che w ed α non sono indipendenti, ma legati a Q dalla relazione precedente. Perciò, il lavoro di propulsione si riduce ad essere una funzione di Q ed α,

$$L = F\,(Q.\, \alpha)$$

la quale, per un valore assegnato di Q, ha un minimo, corrispondente ad un certo valore di α e perciò di w.

Per rendere più semplice il calcolo, supponiamo molto grande la velocità w, e perciò trascurabile il termine $S = a\, b$ di fronte all' altro $a\, w \cos \alpha$. Allora si può scrivere approssimatamente

$$Q = k\, a\, w^3 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

da cui

$$w^3 = \frac{Q}{k\, a \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha}$$

e sostituendo nella uguaglianza $L = Q\, w \operatorname{tg.} \alpha$

$$L = Q. \operatorname{tang.} \alpha. \left(\frac{Q}{k\, a \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha}\right)^{\frac{1}{3}}$$

che si avvicina al valore *zero* quanto più piccolo è l' angolo α. Ma se α è piccolissimo o nullo, w deve essere grandissimo: se ne conclude, che quanto maggiore è la velocità, tanto minore è il lavoro necessario per sostenere una data superficie

di dato peso; ossia, che *le grandi velocità sono le più economiche;* conclusione che sembra paradossale, ma che è certissima.

Ma non bisogna dimenticare, che in una macchina volante, qualunque essa sia, non vi sono soltanto i piani di sostentamento, e questi non sono semplici superficie senza spessore, come è supposto in questi calcoli. Per mantenersi in moto orizzontale, anche con le ali in piano o pochissimo inclinate, una macchina volante deve superare un complesso di altre resistenze che devono aggiungersi a quella (sola efficace) R. Ma resta sempre vero, in generale, il principio che, nel movimento orizzontale, le velocità grandi son più economiche di quelle piccole.

R. Liceo di Urbino, 1910.

SU ALCUNE ESPERIENZE DI DIFFUSIONE.

NOTA SECONDA DI O. SCARPA.

Continuando lo studio del quale ho dato relazione in una nota [1]) precedente, mi son proposto di determinare l'origine (o almeno le principali cause) degli scarti fra i valori veri dei coefficienti di diffusione, e quelli che si ricavano applicando la teoria della diffusione ai risultati delle esperienze del Vanzetti, senza tener conto dei falsi equilibri in cui può trovarsi il sale di argento (Ag Cl, Ag Br o Ag I) prima di formare il setto nel tubo.

Come ho fatto notare essi possono verosimilmente, già a priori, essere ascritti a tre categorie: inerenti alla tecnica, al metodo sperimentale e alla causa su accennata.

Scarti inerenti alla tecnica e al metodo sperimentale.

1. — Tralasciando quelli che possono provenire da cause accidentali [2]) perchè non hanno alcun carattere sistematico, devo anzitutto far rilevare quanto segue:

Avendo ripetuto le esperienze di Vanzetti, usando tutte le cure necessarie [3]), ho dovuto convincermi che in *nessuno* dei casi da me sperimentati (soluzioni di H Cl, di K Cl, e di Na Cl di diversa concentrazione), si ha in un primo tempo la formazione del *setto* descritto da Vanzetti; ma il fenomeno procede nel modo seguente:

[1]) *Nuovo Cimento*. XX. Settembre 1910. *Gazzetta Chimica*, XLI, 1.

[2]) Vedi la nota a pag. 222 loc. cit. A tal proposito devo avvertire che nella equazione dell'errore relativo, fu per errore tipografico stampato $+ 2 \frac{d(l-x)}{l-x}$ invece di $- 2 \frac{d(l-x)}{l-x}$.

[3]) Per le cure adottate nell'equilibrare le due soluzioni vedi in seguito.

Se il tubo capillare ha la sezione circolare con il diametro interno di 0,5 mm., la lunghezza totale di 10 cm. nonchè la forma usata dal Vanzetti, ho osservato dopo un periodo di circa 20 a 40 ore dall'inizio delle esperienze, un deposito sottilissimo sulle pareti del tubo *(e non mai un setto)* in corrispondenza della regione ove s'incontrano le due soluzioni.

Tale deposito assume, in generale, la forma anulare, ed è sempre più o meno sfumato e indeciso verso la soluzione dell'acido o del cloruro alcalino, mentre appare spesso con un limite netto verso quella del nitrato d'argento. Con il crescere del tempo esso si propaga verso quest'ultima soluzione, aumenta di spessore, e dopo qualche giorno genera un vero setto, che in generale è assai distante (spesso di molti millimetri) dal punto ove si iniziò il precipitato.

Osservato con luce diretta (anche per trasparenza) il detto deposito è nella sua prima porzione pochissimo visibile, ma risalta nettamente adottando la illuminazione laterale (metodo di Tyndall), specialmente quando essa si applica longitudinalmente (lungo l'asse del capillare) e si esamina con una lente o con il microscopio.

Se il tubo ha un diametro interno un po' maggiore, (circa mm. 1) l'inizio del precipitato ha spesso luogo non sotto forma di velo anulare, ma sotto quella di un minutissimo deposito sulla regione inferiore del tubo; deposito che a poco a poco procede, s'ingrossa, assume la forma anulare e tende a formare il setto.

Alcune volte però, sia nel primo che nel secondo caso, dopo poco tempo dall'inizio il deposito si arresta con un limite netto, e dopo un breve intervallo riprende la sua formazione ripetendo il precedente andamento; fenomeno singolare che spesso si ripete due o tre volte originando dei depositi succedentesi lungo il tubo, tutti sfumati verso l'acido o il cloruro alcalino e la cui spiegazione appare analoga a quella dei noti anelli di Liesegang.

Cosicchè il Vanzetti, non avendo riferito le sue misure all'inizio reale del precipitato, ma bensì a quello apparente, o peggio alla posizione *del setto* (di cui egli continuamente parla),

occasionò certamente una prima e notevolissima causa di errore.

2. — Tuttavia, benchè non abbia, nelle attuali esperienze, grandissima importanza, credo opportuno ricordare pur una causa d'errore che è caratteristica della disposizione proposta e adottata dal Vanzetti.

Egli infatti dispose il tubo di diffusione, avente la forma di U, rovesciato, e con le due gambe egualmente immerse nelle due soluzioni in esame, alle quali assegnò eguale densità (e perciò differente concentrazione) e ne impose le superfici libere allo stesso livello, pensando di aver così stabilito l'equilibrio idrostatico del sistema.

Ma è facile dimostrare che in tale disposizione, il sistema è bensì in equilibrio idrostatico all'inizio della diffusione (tempo zero), ma, in generale, non potrebbe più esserlo nei tempi successivi qualora la diffusione delle due sostanze avvenisse nel modo normale.

Se infatti la loro diffusione seguisse la legge di Fick conservando i coefficienti di diffusione il loro valore reale, nelle due gambe del tubo dovrebbero dopo il tempo t essere rispettivamente entrate le quantità [1]).

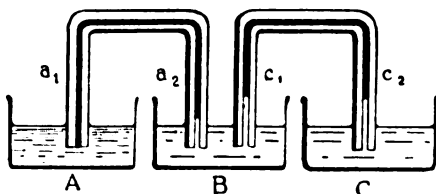
$$q_1 = C_1 S \sqrt{\frac{K_1 t}{\pi}}$$

$$q_2 = C_2 S \sqrt{\frac{K_2 t}{\pi}}$$

dei due sali, le quali gravitando, almeno in gran parte, sulle bocche del tubo, non consentirebbero l'equilibrio idrostatico che nel solo caso in cui fosse verificata la relazione

$$\frac{C_1}{C_2} = \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} .$$

[1]) In queste equazioni C_1 e C_2, indicano le concentrazioni iniziali. S la sezione del tubo. K_1 e K_2 i coefficienti di diffusione. Vedi Stefan. *Wien. Ber.* LXXIX, 1879. Ostwald. *Lehrbuch d. All. Chemie.* Vol. I, pag. 688.

Quando ciò non sia, apparirà accelerata la diffusione di una delle due soluzioni, e ritardata l'altra, e per avere una prova della esistenza di tal causa di errore, ho operato nel seguente modo:

A, B, C (fig. 1), sono tre vaschette cilindriche della medesima capacità e ampiezza; la prima contiene una soluzione di nitrato di argento, la seconda e la terza, ad esempio, una soluzione di acido cloridrico. Le tre soluzioni hanno eguale densità e arrivano *esattamente* [1]) allo stesso livello nei tre vasi.

Fra A e B, e fra B e C, ho poi disposto due tubi a U aventi il diametro interno di circa un mm., con le inboccature disposte rigorosamente in uno stesso piano orizzontale. Essi contengono inizialmente acqua colorata con fenolftaleina rosea, e, mediante un sostegno speciale a vite, sono calati nella posizione suddetta.

Dopo di che ho osservato come si propaga nelle loro gambe, a_1, c_1 e c_2 lo scoloramento dell'indicatore, ossia come avviene in esse la diffusione dell'acido cloridrico.

Ebbene, il risultato fu conforme alla teoria, poichè ho trovato che mentre in c_1 e in c_2 la regione estrema colorata si mantiene sempre sullo stesso piano orizzontale quella in a ritarda notevolmente su di essa.

Così ad esempio usando soluzioni di densità 1,06 (e quindi di concentrazione, 0,42 n. per l'$AgNO_3$ e 3,3 n. per l'HCl), ho ottenuto in 24 ore un ritardo di circa due mm. di a su c_1 e c_2, e sostituendo al nitrato di argento un sale

[1]) Nella nota successiva darò la particolarità del metodo che ho adottato per raggiungere questo scopo.

(p. e. lo $Zn\,Cl_2$) avente il coefficiente di diffusione assai inferiore, ho osservato ancora più vistosamente il fenomeno [1]).

Ma la causa principale dei singolari resultati del Vanzetti è certamente imputabile pur ai fenomeni di falso equilibrio.

Scarti inerenti ai falsi equilibri.

Già nella discussione che seguì la comunicazione del Vanzetti nella seduta del congresso di Padova, ho fatto notare che una causa degli scarti, piuttosto che alla idrolisi da lui ammessa, doveva ascriversi razionalmente alla soprasaturazione della soluzione di cloruro di argento (o del bromuro o dell'ioduro) prima della formazione del precipitato nel tubo.

[1]) Per avere un'idea dell'ordine di grandezza di tal causa d'errore si può calcolare, per alcune delle soluzioni sperimentate dal Vanzetti, il va'ore del rapporto:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{C_1}{C_2}\sqrt{\frac{K_1}{K_2}}$$

e si trova così:

$$\left.\begin{matrix}[HCl] = 9.95\ n. \\ [AgNO_3] = 1.68\ n.\end{matrix}\right\} \frac{q_1}{q_2} = 1.75$$

$$\left.\begin{matrix}[HCl] = 0.85\ n. \\ [AgNO_3] = 0.118\ n.\end{matrix}\right\} \frac{q_1}{q_2} = 2.02$$

$$\left.\begin{matrix}[NaCl] = 0.41\ n. \\ [AgNO_3] = 0.118\ n.\end{matrix}\right\} \frac{q_1}{q_2} = 1.15$$

$$\left.\begin{matrix}[KCl] = 3.10\ n. \\ [AgNO_3] = 1.68\ n.\end{matrix}\right\} \frac{q_1}{q_2} = 0.86$$

E si può anche calcolare facilmente l'ordine di grandezza della differenza di pressione che agirebbe, per tal fatto, sulle due imboccature del tubo dopo un tempo t, qualora l'equilibrio non si stabilisse con continuità.

Basta infatti applicare convenientemente la equazione di Stefan: $q = CS\sqrt{\frac{Kt}{\pi}}$. Così facendo io ho trovato che dopo 24 ore si avrebbe nel 1° caso esaminato, una differenza di pressione dell'ordine di 2 mm. di acqua; fenomeno che ho pur verificato con l'esperienza usando un tubo a U munito di chiavetta, e un conveniente metodo di osservzione.

E dalla trattazione teorica che in seguito ho sviluppato, è infatti facile di dedurre il senso e la grandezza di tali scarti usufruendo della equazione [1]:

$$x = l \frac{\eta_1 \sqrt{K_1}}{\eta_1 \sqrt{K_1} + \eta_2 \sqrt{K_2}}$$

e confrontando i valori di x che con essa si ottengono (ove si calcolino i valori di η_1 e di η_2 assumendo per γ il valore corrispondente alla solubilità del sale di argento prodotto dalla reazione) con quelli che si deducono assumendo per γ il valore corrispondente alla concentrazione della soluzione soprasatura del detto sale di argento, nel momento della formazione del precipitato.

Avviene però, che pure assumendo i massimi valori della soprasaturazione che ragionevolmente è possibile di ammettere, un tal calcolo dà bensì ragione nel segno degli scarti, ma non dà risultati sufficienti a spiegarne la entità.

Cosicchè mi venne naturale di pensare a un altro fenomeno il quale pur ritarda la formazione del precipitato, e fa quindi cambiare il valore che dobbiamo assumere per γ; e cioè allo stato colloidale che può assumere il sale di argento all'atto della sua formazione.

È noto infatti, fin dall'epoca di Berzelius, che trattando una soluzione sufficientemente diluita di un cloruro alcalino con una di $Ag\,NO_3$, si ottiene una soluzione opalescente; osservazione estesa da Deniges al caso del ioduro, e lungamente studiata qualitativamente e quantitativamente da Lottermoser per moltissimi sali poco solubili dell'argento (Ag Cl, Ag Br, Ag J, ecc.). E dalle misure di Lottermoser, si deduce che la formazione dell'idrosolo di Ag Cl, di Ag Br o di Ag J comincia ad essere completa mescolando rispettivamente le soluzioni 0,05 n. di H Cl o di cloruri alcalini o quelle 0,025 n. di H Br o di bromuri alcalini o finalmente quelle 0,01 n. di HJ o di ioduri alcalini, con quelle equinormali di nitrato di argento [2]).

[1]) *Nuovo Cimento.* Settembre 1910. *Gazzetta Chimica,* XLI, 1.

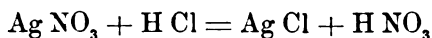
[2]) Th. Svedberg. Herstellung Koll. Losungen. Dresden, 1909.

Ora, nel dispositivo del Vanzetti, la lentezza e la regolarità della reazione è certamente favorevole alla formazione dello stato colloidale, ma, ciò che è assai notevole, fui condotto ad ammetterne la esistenza pur dalla seguente osservazione.

Calcolando ad esempio mediante la equazione di Stefan [1]:

$$\gamma = C\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta} e^{-\eta^2}\, d\eta\right)$$

il valore che deve avere assunto la concentrazione delle due soluzioni reagenti in quella regione del tubo ove ha luogo l'inizio del precipitato nell'istante ad esso corrispondente, istante che, per la coppia $[Ag\,NO_3] = 0{,}42$ n. e $[H\,Cl] = 3{,}3$ n., dista dal tempo zero di circa 20 ore, ho ottenuto sostituendo alla x il valore trovato da Vanzetti per la medesima coppia: $\gamma = 0{,}01$ n., valore che, essendo mille volte maggiore di quello corrispondente alla solubilità del cloruro di argento, sarebbe assurdo di ammettere come limite di metastabilità delle sue soluzioni soprasature, mentre, secondo le esperienze di Lottermoser, la reazione:

$$Ag\,NO_3 + H\,Cl = Ag\,Cl + H\,NO_3$$

conduce appunto per esso alla formazione (completa) dell'idrosolo.

Ma, che il precipitato di Ag Cl nei tubi di Vanzetti sia preceduto dalla esistenza dell'idrosolo è dimostrato pur dalle particolarità della sua formazione. Seguendo infatti col microscopio (illuminando lateralmente) tale formazione, ho osservato che essa si inizia con un sottilissimo anello rivestente in forma di velo le pareti interne del tubo; forma di deposito che è caratteristica dei precipitati che assumono inizialmente lo stato colloidale [2].

[1]) Per il metodo di calcolo dell'integrale, vedi la mia nota citata.

[2]) In causa delle difficoltà sperimentali, ho tentato invano la osservazione ultramicroscopica dei granuli di Ag Cl entro allo stesso tubo capillare.

Posto quindi che la formazione del precipitato non avvenga allorquando la concentrazione γ sia eguale alla solubilità del sale di argento (p. e. a 10^{-5} nel caso del $Ag\,Cl$), ma allorquando essa ha raggiunto un valore dell'ordine di 10^{-3} (esperienze di Lottermoser per l'$Ag\,Cl$), e applicando la equazione $x = l \dfrac{\eta_1 \sqrt{K_1}}{\eta_1 \sqrt{K_1} + \eta_2 \sqrt{K_2}}$, e calcolando le η mediante la equazione di Stefan e le note tabelle, si ottengono ad esempio i seguenti valori di x corrispondenti alle diverse concentrazioni sperimentate dal Vanzetti.

Acido Cloridrico.

Densità	Concentrazione del HCl	Concentrazione del $AgNO_3$	x speriment. (Vanzetti)	x teorico per $\gamma = 10^{-5}$	x teorico per $\gamma = 10^{-2}$	Osservazioni
1.240	9.95 n. (!)	1.68 n.	**54.3**	58.5 (?)	**63.0** (?)	Il calcolo teorico di x è fatto con la approssimazione di 0,5 mm. prima non tenendo conto dei falsi equilibri ($\gamma = 10^{-5}$) e poi tenendo conto di questi ($\gamma = 10^{-2}$) in base alle esperienze di Lottermoser.
1.060	3.30 n.	0.42 n.	**66.0**	60.5	**67.0**	
1.015	0.85 n.	0.118 n.	**70.1**	61.5	**69.0**	

Cloruro Sodico.

Densità	Concentraz. del $NaCl$	Concentraz. del $AgNO_3$	x speriment. (Vanzetti)	x teorico per $\gamma = 10^{-5}$	x teorico per $\gamma = 10^{-2}$	x teorico per $\gamma = 2.10^{-2}$	Osservazioni
1.120	2.82 n.	0.88 n.	**54.2**	51.0	53.0	**53.0**	Id.
1.060	1.45 n.	0.42 n.	**58.2**	51.0	54.0	**55.0**	
1.015	0.41 n.	0.118 n.	**63.7**	51.0	56.0	**60.0**	

Cloruro Potassico.

Densità	Concentraz. del KCl	Concentraz. del $AgNO_3$	x speriment. (Vanzetti)	x teorico per $\gamma = 10^{-5}$	x teorico per $\gamma = 10^{-2}$	x teorico per $\gamma = 2.10^{-2}$	Osservazioni
1.240	3.10 n.	1.68 n.	**54.4**	52.0	53.5	**53.5**	Id.
1.060	1.20 n.	0.42 n.	**56.5**	53.0	54.5	**56.0**	
1.030	0.67 n.	0.29 n.	**57.7**	53.0	55.0	**56.5**	

Osservando queste tabelle si nota:

1.° Per l'acido cloridrico, i valori calcolati tenendo conto del falso equilibrio si accordano (salvo il primo che corrisponde alla enorme concentrazione 9,95 n.) meravigliosamente (data la piccola precisione delle misure) con i risultati sperimentali. E in quanto al primo valore si deve notare che, nelle condizioni sperimentali che gli corrispondono, non solo non può verificarsi, in causa della enorme concentrazione, la legge di Fick (e in realtà é ignoto il coefficiente di diffusione corrispondente), ma inoltre, è, con molta probabilità, assai instabile la condizione colloidale del precipitato in causa del forte gradiente della concentrazione.

2.° Per il cloruro di sodio, invece, si ottengono dei valori, i quali dimostrano che la concentrazione γ è dell'ordine di 2.10^{-2}; cioè con esso è favorita la posizione di falso equilibrio assunta dal cloruro di argento, prima di formare il precipitato [1]).

Fenomeno che pur si avvera per il cloruro di potassio.

Concludendo: ho dimostrato che la causa principale degli scarti fra i valori sperimentali del Vanzetti e i risultati della teoria, e quindi fra i valori dei coefficienti di diffusione che ho dedotto dai suoi resultati sperimentali [2]) e quelli reali, può appunto essere attribuita alle condizioni di falso equilibrio assunte dal cloruro di argento prima di formare il precipitato nel tubo.

Laboratorio di Elettrochimica del Regio Politecnico
Napoli, Novembre 1910.

---

[1]) Ho creduto inutile di affinare ulteriormente i calcoli (che sono assai laboriosi) per trovare una maggiore concordanza con i risultati sperimentali, essendo più che sufficiente per il nostro scopo l'ordine di approssimazione ora raggiunto; ma ricordo che basta ancora un PICCOLO aumento di γ per accrescere di molto la concordanza suddetta.

[2]) *Nuovo Cimento.* Settembre 1910, XX.

SU ALCUNE ESPERIENZE DI DIFFUSIONE

NOTA TERZA DI O. SCARPA.

Nella nota precedente, ho dimostrato che la principale causa degli scarti fra i risultati delle esperienze di diffusione del Vanzetti, e i valori calcolati in base alla teoria della diffusione e alla solubilità del cloruro di argento, può attribuirsi, oltre che alla invisibilità dell'inizio del precipitato, alle condizioni di falso equilibrio che può assumere il cloruro di argento prima di precipitare nel tubo di diffusione.

Mi sono quindi proposto di determinare sperimentalmente se tali condizioni sussistono costantemente quando si applichi un tal metodo, oppure se sia possibile di ottenere, almeno in alcuni casi, dei risultati che (entro ai limiti degli errori casuali e di quelli di esso caratteristici) si accordano con la suddetta teoria.

Ho quindi ripetuto le esperienze del Vanzetti operando con l'acido cloridrico e con i cloruri di sodio e di potassio, che, di tutti i sali da lui sperimentati, offrono evidentemente il massimo interesse, non solo perchè son ben noti i loro coefficienti di diffusione, e ben nota, e particolarmente vicina alle condizioni ideali, è la loro dissociazione elettrolitica; ma anche perchè mi sembrò, fin dall'inizio dello studio, particolarmente difficile di ammettere per essi la conclusione del Vanzetti, cioè che la loro presunta idrolisi sia la causa precipua del fenomeno.

Ho adoperato perciò il seguente dispositivo sperimentale:

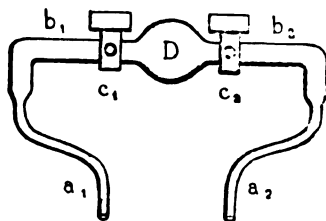
I due vasetti cilindrici contenenti le soluzioni (p. e. di $NaCl$ e di $AgNO_3$) furono accuratamente scelti fra molti e hanno il diametro di 60 mm. l'altezza eguale a 30 mm. e il bordo accuratamente arrotato. Essi sono disposti su un piano di vetro munito di tre viti calanti che permettono di stabi-

lire la *perfetta orizzontalità del piano in cui giace il loro bordo.*

I tubetti capillari sono lunghi 100 mm. in totale, con le gambette verticali di 20 mm., e il loro diametro interno è di 0,5 mm.

Essi appoggiano accavallati sul bordo dei due vasi, e pescano egualmente nelle due soluzioni di eguale densità.

L'equilibrio idrostatico iniziale è raggiunto rigorosamente nel seguente modo:

Dopo riempiti con la massima cura fino allo stesso livello i due vasetti (stimando a occhio per traguardo) disposi fra essi uno speciale equilibratore, costituito da un tubo a U avente, nella regione estrema, le due gambe a_1 e a_2 assai più sottili della orizzontale (b_1 b_2). Questa porta due chiavette a tre vie (c_1 c_2) e una bolla centrale D (fig. 1).

La regione $a_1 - b_1$ viene riempita con la stessa soluzione di $AgNO_3$ in esperimento, e analogamente la $b_2 - a_2$ con quella (p. e.) di $NaCl$; la regione centrale D è invece completamente piena di una soluzione (p. e.) di $NaNO_3$ avente esattamente la stessa densità delle due laterali.

Per effettuare comodamente, e a perfezione, tali riempimenti si usufruisce delle due chiavette a tre vie.

Tal tubo, così riempito, vien disposto con le due gambe sottili immerse (egualmente) nelle due soluzioni omonime dei vasetti, e, essendo convenientemente disposte le due chiavette, esso permette di stabilire (con rapidità) un perfetto equilibrio idrostatico, correggendo i piccoli errori della precedente operazione senza inquinare in alcun modo le soluzioni in esame. Tal tubo viene così lasciato in posto anche durante la dispo-

sizione dei capillari, dei quali, per facilitare i confronti, ne posi almeno tre in parallelo per ogni coppia di vasi; ma dopo di ciò, e dopo chiuse le chiavette, esso viene rimosso con ogni cura.

Ebbene i risultati furono i seguenti:

In taluni casi, e specialmente quando i tubetti capillari furono lavati con soluzioni di cianuro potassico per togliere tutte le traccie dei precipitati provenienti dalle precedenti operazioni, per quanto essi siano poi stati ripetutamente e accuratamente risciacquati con acqua corrente, ho avuto risultati che talvolta raggiungono, o anche sorpassano, quelli singolari del Vanzetti; ma in un numero grandissimo di casi (dal cinquanta all'ottanta per cento), e specialmente quando ho usato tubi dai quali furono asportati soltanto con una corrente d'acqua i depositi delle precedenti operazioni, che lasciarono così tracce debolissime aderenti alle pareti, i risultati si accordarono assai bene con quelli della teoria che prescinde dalla esistenza dei falsi equilibri.

Cosicchè fui indotto ad usare il seguente metodo sperimentale:

Dopo di avere ottenuto, nel tubetto capillare, un primo deposito (la cui posizione è in generale molto differente dalla teorica) ho risciacquato il tubo con acqua, ed ho ripetuta l'esperienza precedente. Risciacquato poi nuovamente il tubo con acqua, ho per la terza volta ripetuta l'esperienza, ed ho così seguitato ad operare fino a che sovrapponendosi i successivi e sottilissimi precipitati, ne sia divenuta sempre più visibile la regione ove si inizia la loro formazione, e sempre più difficile la esistenza del falso equilibrio.

Ed ecco i risultati [1]), di cui ognuno è medio di almeno sei esperienze:

[1]) Naturalmente le misure non sono riferite al *setto*, ma all'inizio del precipitato. Delle altre particolarità che accompagnano tali precipitazioni mi riserbo di continuare lo studio.

Acido Cloridrico.

Densità	Concentrazione del HCl	Concentrazione del $AgNO_3$	x (*Scarpa*)	x (*teorico*)	x (*Vanzetti*)	Osservazioni
1.060	3.31 n.	0.425 n.	**60.6**	**60.5**	**66.0**	Per calcolare il valore teorico di x fu assunto $\gamma = 10^{-5}$, e fu calcolato con la approssimazione di 0,5 mm.
1.015	0.85 n.	0.118 n.	**62.0**	**61.5**	**70.1**	

Cloruro di Sodio.

Densità	Concentrazione del NaCl	Concentrazione del $AgNO_3$	x (*Scarpa*)	x (*teorico*)	x (*Vanzetti*)	Osservazioni
1.060	1.45 n.	0.425 n.	**51.5**	**51.0**	**58.2**	Id.
1.015	0.41 n.	0.118 n.	**51.2**	**51.0**	**63.7**	

Cloruro di Potassio.

Densità	Concentrazione del KCl	Concentrazione del $AgNO_3$	x (*Scarpa*)	x (*teorico*)	x (*Vanzetti*)	Osservazioni
1.060	1.20 n.	0.425 n.	**53.3**	**53.0**	**56.5**	Id.
1.015	0.40 n.	0.118 n.	**54.5**	**53.5**	?	

Ma benchè questi miei risultati siano già notevolmente concordanti con la teoria, io credo ancora necessario di conchiudere (come già nella prima nota) sulla inapplicabilità del metodo adottato dal Vanzetti per lo studio quantitativo della diffusione. E ciò non soltanto per la piccola precisione delle misure che esso comporta, ma specialmente perchè *non è possibile di fondare delle determinazzioni sui risultati di esperienze che dipendono, o possono dipendere, da fenomeni di falso equilibrio; dei quali le entità non sono mai perfettamente definite; e dei quali non è in alcun modo possibile di riconoscere a priori e con sicurezza la esistenza.*

E infine, credo necessario di far notare che il considerevole accordo fra la teoria e l'esperimento, quale si deduce da queste ultime esperienze, e il disaccordo fra i miei risultati sperimentali e quelli del Vanzetti, dimostrano ancora una volta quanto furono illecite le sue conclusioni, e come sia da andar cauti nell'accettare i risultati di metodi non ancora sufcientemente provati, studiati e discussi.

Laboratorio di elettrochimica
della R. Scuola Sup. Politecnica di Napoli.
Decembre 1910.

ESPERIENZE SUL PIANO INCLINATO.

DI A. G. ROSSI.

1. — L'energia posseduta da un cilindro che rotola sopra un piano inclinato è la somma di una energia cinetica traslatoria e di una energia cinetica rotatoria; con un ragionamento semplicissimo si stabilisce che, astrazion fatta dagli attriti, la velocità di un cilindro che rotola è $\sqrt{\frac{2}{3}}$ di quella dovuta all' altezza di caduta.

La diminuzione di velocità può essere resa molto notevole, se il raggio di rotolamento si faccia molto più piccolo del raggio d'inerzia della massa cadente sul piano inclinato. La fig. 1 mostra la forma di una ruota adatta a scendere lentamente sopra un opportuno binario inclinato.

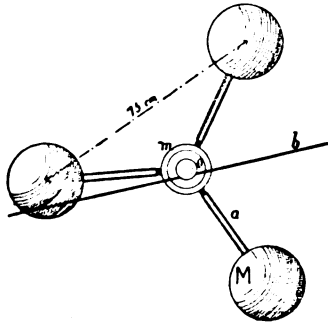



Fig. 1.

Sul centro di un alberetto di acciaio, profilato come mostra la fig. 2, può girare liberamente un mozzo cilindrico *m* fra gli orecchi *o o*, quando esso non sia costretto fra le estremità a vite delle tre asticciuole prismatiche *a*, che portano

all' altra estremità tre masse uguali di piombo M foggiate a lente, distanti un 15 cm. fra centro e centro. Avvitando a fondo queste tre asticciuole, la ruota a tre raggi è resa solidale con l'asse d'acciaio; svitandole alquanto, la ruota è folle sullo stesso asse.

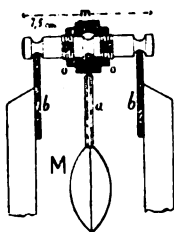



Fig. 2.

Questo asse è fatto per correre lungo un binario, costituito con due liste metalliche *b b* incastrate sopra un telaio di legno, formando per 2 o 4 metri un piano inclinato. Due di questi binarii sono disposti di fronte, come nella fig. 6, simmetricamente e raccordati in mezzo con un breve tratto ricurvo.

Si cominci col lasciar cadere la ruota (fig. 1) solidalmente congiunta all' asse; se vuol cadere, deve rotolare su questo asse; dato il grande momento d' inerzia, l' energia cinetica assorbita dalla rotazione è assai maggiore di quella corrispondente alla traslazione dell' intera massa. La ruota cade assai lentamente. Si determini il tempo impiegato a cadere fino al fondo, o a risalire il secondo piano identico; e si ponga a confronto col tempo di caduta, molto minore, che si ottiene invece dopo aver svitato alquanto due dei raggi della ruota per liberare il mozzo e trasportato il terzo raggio in direzione opposta sul mozzo, ove è un altro foro a vite (fig. 3): allora il sistema rotola con un raggio d' inerzia molto minore di prima, e la stessa massa si trasporta con velocità traslatoria ben maggiore, sebbene gli attriti sull' asse sieno aumentati. I tempi impiegati nei due casi sono diversi, così come sono diverse le velocità raggiunte alla fine di uno stesso percorso;

ma la legge del moto rimane invariata sia nella discesa che nella salita, l' una essendo l' immagine invertita dell' altra.

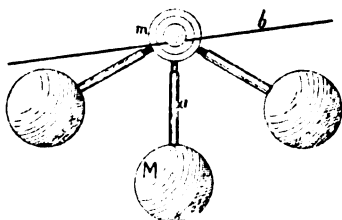



Fig. 3.

Un sistema analogo si può improvvisare con un sughero cilindrico, attraversato per l' asse da un ago da calza *a*, e trasversalmente da altri due aghi *r* caricati con sferette di piombo (fig. 4). A seconda che si faccia rotolare sopra un binario inclinato (due fili metallici tesi parallelamente) con l' asse *a a*, oppure con l' asse *r r*, le velocità di traslazione sono molto diverse.

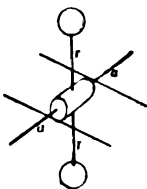



Fig. 4.

2. — Una ruota consimile a quella descritta, data la sua piccola velocità e l' attrito relativamente piccolo, può servire a osservare e registrare la legge di caduta dei gravi. Il binario metallico sia spalmato con una vernice isolante e brunita, e questa sia poi grattata via per un breve tratto a intervalli equidistanti e corrispondentisi sulle due guide; le quali vengano inserite in un circuito elettrico con una *morse:* ogni volta che l' asse della ruota passa su due punti scoperti del binario, sulla zona di carta s' imprime un segno. Non si ha che a riportare la zona col tracciato sulla lavagna lungo l'asse delle ascisse, le ordinate rappresentando in una scala

qualunque uniforme, il tempo, per poter descrivere la nota parabola.

Può servire a quest'uso, più semplicemente, una ruota a volante qualsiasi, montata sopra un asse sottile di acciaio, come la M della fig. 5.

3. — Una coppia di binarii inclinati, posti di seguito come nella fig. 6, formati con due bacchette di vetro raccordate brevemente da una curva, oppure addirittura un arco di cerchio di grande raggio, con una palla da biliardo che discenda e risalga per la velocità dovuta all'altezza di caduta, costituisce l'apparecchio più istruttivo per iniziare in iscuola lo studio del pendolo di gravità; se ne ricava subito il fattore dinamico del periodo $\sqrt{l/g}$, con un coefficiente che tende dal valore 4 al valore π quando l'altezza di caduta diviene piccolissima.

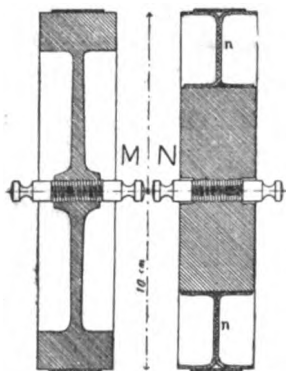



Fig. 5.

4. — Si abbiano due ruote come M, N (fig. 5), identiche sulla periferia, ma l'una M con la massa distribuita esternamente, l'altra N con la massa accumulata presso il centro, dimanierachè abbiano momenti d'inerzia molto diversi; ma sieno dello stesso peso [1]. Si dispongano a capo dei due piani

[1]) La ruota N si può costruire, data la M, ricavando il blocco cilindrico centrale in piombo-antimonio, con un peso press'a poco uguale a quello della M, e completando il diametro voluto con la parte *n n*, for-

inclinati della fig. 6, e si lascino cadere contemporaneamente. Le due ruote avendo lo stesso peso, si può ammettere che i loro assi soffriranno lo stesso attrito sui binarii. Poichè sono obbligate a rotolare, quella che ha maggior momento d'inerzia (M) assorbirà una parte maggiore della energia totale disponibile $m\,g\,h$, e quindi il suo moto traslatorio procederà con minor velocita in confronto a quello della ruota N di minor momento d' inerzia.

Fig. 6.

E succede questo, che la N giunge prima al fondo della sua discesa e risale una parte del piano inclinato di sinistra incontro alla M che discende ancora, finchè avviene lo scontro; dopo lo scontro, la ruota N torna indietro e la M l' accompagna, ben tosto distanziata, finchè si incontrano di nuovo, la N discendendo e la M salendo sul piano di destra; e *quivi si fermano a contatto.*

Si dispongano le due ruote a capo dello stesso piano inclinato, l' una di seguito all'altra, in contatto.

Se la ruota N è a valle della ruota M, abbandonandole, entrambe cominciano a discendere rotolando regolarmente come dianzi e la N distanzia tosto la M, accelerando in suo confronto: essa giunge al punto più basso, risale il secondo piano inclinato, poi ricade scontrandosi con la M che sopraggiunge, e quivi entrambe si fermano a contatto. Che se invece, si dispongano le due ruote a capo del primo piano inclinato, con la M a valle della N, cioè la M pronta a partire per la prima e la N retrostante a contatto, il sistema è in

---

mata con due anelli di lamiera, foggiati di sbalzo in forma di grondaia a sezione rettangola e poi calzati sul cilindro di piombo. Si possono creare sulla periferia delle due ruote varie condizioni di attrito, per gli scopi esposti più innanzi, cerchiandole con anelli metallici bruniti o altrimenti, oppure con anelli elastici di gomma, etc.

equilibrio e non rotola: l' *attrito al distacco* delle due periferie impedisce alla N di acquistare una velocità iniziale qualunque, che vorrebbe sempre essere maggiore di quella della M che le sta innanzi; onde si contrastano immutabilmente. Quando invece la N preceda la M, il distacco avviene, si può dire *virtualmente*, fin dallo stato di quiete.

Se, partendo da una piccola inclinazione del piano del binario, la si aumenti a poco a poco, giunge il momento in cui le due ruote a contatto, N a monte, M a valle, cominciano a scorrere, *pattinando* sul binario, e avanzano senza distaccarsi e senza quasi rotolare.

Ancora: si dispongano N ed M nello stesso ordine a contatto. Se entrambe sono libere, non cadono; se invece si fissa la retrostante N con un arresto (una pallina di cera sull'asse), si riesce a far partire la M dando dei piccoli colpi al sostegno, con che si sminuisce l' attrito al distacco. Se N è libera, gli stessi scuotimenti non hanno alcun effetto.

Queste esperienze possono fornire un esempio per il principio dei lavori virtuali, applicato ad un caso d' attrito radente. Se m è la massa di ciascuna delle due ruote, e si indichino con J i momenti d'inerzia, con ω le velocità angolari e con V le velocità di traslazione dei centri d' inerzia, l'equazione della energia è

$$m\,g\,h = \begin{cases} \frac{1}{2} J_N\, \omega_N^2 + \frac{1}{2}\, m\, V_N^2 \\ \frac{1}{2} J_M\, \omega_M^2 + \frac{1}{2}\, m\, V_M^2 , \end{cases}$$

che si può abbreviare così:

$$m\,g\,h = \widehat{N} + \overline{N} = \widehat{M} + \overline{M} ,$$

segnando cioè con un arco o una linea le *energie* risp. rotatoria o traslatoria delle due ruote. Allora

$$\overline{N} - \overline{M} = \widehat{M} - \widehat{N} .$$

Se il secondo membro è positivo, sarà anche

$$\overline{N} > \overline{M}$$

ossia, data l'uguaglianza delle masse,

$$V_N > V_M .$$

L' attrito al distacco delle due ruote N, M dipende ora dalla pressione periferica, e questa è funzione diretta della differenza fra le due velocità virtuali, $\Delta V_N - \Delta V_M$: quanto maggiore sia questa velocità differenziale, tanto più grande è la resistenza d' attrito al distacco.

L' altro fattore del lavoro virtuale dell'attrito è poi un'altra funzione diretta della differenza delle due velocità periferiche virtuali o, se vuolsi, delle velocità angolari virtuali, $\Delta\omega_N + \Delta\omega_M$.

Se le ruole fossero identiche, non solo nella massa ma anche nel momento d'inerzia, si avrebbe: $\Delta V_N = \Delta V_M$, cioè sarebbe nulla la pressione periferica, e $\Delta\omega_N = \Delta\omega_M$ cioè sarebbe $2\,\Delta\omega$ lo scorrimento virtuale; il quale realizzandosi però senza pressione, si sottrarrebbe all' attrito per il minimo scuotimento: le due ruote rotolerebbero indipendenti.

Ora, il prodotto dei due fattori del lavoro virtuale dell' attrito, $(\Delta V_N - \Delta V_M)(\Delta\omega_N + \Delta\omega_M)$, differisce per il solo fattore r, raggio di rotolamento dell' asse delle ruote sul binario, dall' espressione $\Delta V_N^2 - \Delta V_M^2$, che moltiplicata per $\frac{1}{2}m$ dà la differenza delle energie cinetiche virtuali di traslazione, ossia il lavoro virtuale motore $(\Delta\overline{N} - \Delta\overline{M})$; che è uguale puranche alla differenza delle energie di rotazione $(\Delta\widehat{M} - \Delta\widehat{N})$. Finchè questa sia positiva, cioè le ruote cadano nel senso N M, il lavoro virtuale motore non può superare il lavoro virtuale resistente; donde, condizione d' equilibrio.

Se le ruote fossero *identiche* in tutto, e con la periferia perfettamente *liscia,* cadrebbero indipendenti con uguali velocità, su ogni piano inclinato; abbandonate insieme a contatto, rotolerebbero a contatto. Ma è prevedibile, senza tentare l'esperienza, che nelle condizioni reali esisterà sempre un lavoro virtuale d' attrito al distacco maggiore di zero, a vincere il quale occorrerà una energia disponibile di caduta, variabile da caso a caso. A seconda, cioè, del coefficiente d' attrito fra le due periferie, esisterà in ogni caso una certa inclinazione

critica del binario al disotto della quale il sistema delle due ruote identiche a contatto non potrà cominciare a rotolare come un tutto. Superata questa inclinazione, le due ruote acquisterebbero una velocità di rotazione, che, in presenza dell' attrito periferico, dovrebbe tendere ad un valore costante di regime, tanto più rapidamente raggiunto quanto meno distante fosse la inclinazione assunta da quella critica.

Salvo le difficoltà pratiche per rendere uniformi le condizioni d'attrito sulle due periferie, e l'effetto delle vibrazioni, v' ha qui il principio di un metodo per determinare il coefficiente d' attrito, — almeno per un apparecchio di carattere unicamente dimostrativo o comparativo.

Questo apparecchio potrebbe ricevere la disposizione indicata nella fig. 7. Le due ruote M, M, *identiche,* poggiano

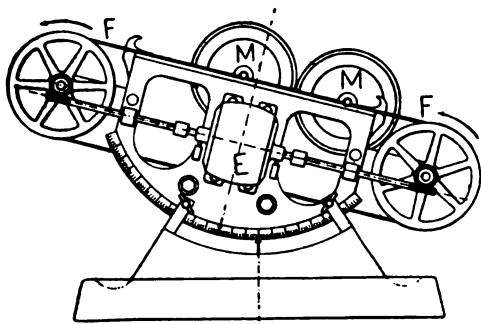



Fig. 7.

con le gole intagliate presso gli estremi dei loro assi sopra un *binario mobile,* formato con due corde senza fine (di due o tre mm. di diametro) passanti su due coppie di puleggie F, F, solidali a due a due su gli stessi assi agli estremi dell' apparecchio. Questi assi sono collegati fra loro da una vite perpetua, condotta da un motore elettrico E (in serie), cosicchè le guide del binario scorrono nella propria direzione con una stessa velocità. Il castello, avente una sezione ad U, che sopporta il piano inclinato, è profilato in basso in un settore circolare che risiede sopra un piedestallo analogamente profilato, costituendo arco diviso in gradi a partire dal centro e

di fronte a un segno di riferimento che dà la verticale, cui corrisponde la posizione orizzontale per il binario mobile. Un bottone a scrupolo, non indicato in figura, permette di variare lentamente l' inclinazione. V' ha una disposizione di commutatore automatico che fa girare il motore E sempre nel senso di trascinare il binario in salita; cosicchè quando il piano è orizzontale, il circuito è aperto e il binario immobile. Un reostato a corsoio permette di regolare la velocità delicatamente, e un tachimetro, condotto dalle puleggie F, indica direttamente in m. la velocità del binario. Alle estremità del binario si trovano due arresti, in forma di uncini raccordati al piano stesso, che trattengono verso l' interno gli assi delle ruote M.

Partendo da una piccola inclinazione, si supponga di dare al binario una velocità moderata: le ruote M vengono trasportate in alto solidalmente, fino all'arresto. Allora si faccia crescere lentamente l' inclinazione: giungerà un momento in cui le due ruote cominceranno a cadere, rotolando. Siccome il moto di caduta in principio sarà assai lento, si avrà tempo di regolare l' inclinazione, o la velocità, in maniera che il sistema raggiunga l' equilibrio dinamico; le due ruote rimangano cioè con i loro centri d' inerzia immobili nello spazio, rotolando su gli assi, con le periferie animate da velocità uguali e contrarie in contatto. La pressione nel punto di contatto essendo evanescente, il lavoro d' attrito a considerarsi dipenderà dall' attrito superficiale limite delle due circonferenze, quale caratterizzerebbe per es. lo *scorrimento* di un velo di lubrificante interposto; due superfici perfettamente piane vicinissime e parallele, comprendenti uno strato sottile di lubrificante, per uno scorrimento tangenziale metterebbero in giuoco semplicemente la viscosità del liquido. È il caso della *linea di contatto* delle due ruote M.

Raggiunto l'equilibrio dinamico per una data inclinazione, un piccolo aumento o una piccola diminuzione della velocità del binario, verrà trasmesso in una traslazione analoga ai due assi: se la velocità cresce, i centri delle ruote salgono, se diminuisce i centri discendono, per l'importo della variazione. Viceversa, per una data velocità, una variazione

nella inclinazione critica, produrrà una rottura dell'equilibrio dinamico, perfettamente invertibile: aumentando l'inclinazione, i centri delle due ruote cominceranno a discendere, diminuendola saliranno.

La disposizione del binario mobile serve appunto per valutare con sicurezza la velocità di traslazione corrispondente, per ogni data inclinazione critica, all'equilibrio dinamico.

Si suppone che gli assi delle due ruote non soffrano scorrimento sul binario. Sarebbe facile dimostrare che la condizione affinchè gli assi rotolino senza scorrere, è

$$A \geqq \frac{J}{J + m r^2} \operatorname{tg} \alpha ,$$

ove sia A il coefficiente di attrito radente degli assi sulle corde del binario, J il momento d'inerzia, m la massa delle ruote ed r il raggio di rotolamento. O altrimenti, se ρ è il raggio d'inerzia,

$$A \geqq \frac{1}{1 + \frac{r^2}{\rho^2}} \operatorname{tg} \alpha .$$

Finchè l'inclinazione α sia piccola, gli assi rotoleranno senza scorrere. E sarà conveniente che il raggio di rotolamento non sia troppo piccolo in confronto al raggio d'inerzia, e le corde del binario non sieno lubriche, per assicurare una sufficiente aderenza fra larghi limiti.

Per ogni data inclinazione del binario, vi sarà dunque una certa velocità critica, e per ogni data velocità una certa inclinazione critica, che danno l'equilibrio dinamico: a questo corrisponde in ogni caso una velocità di traslazione nulla, rispetto al basamento, per il sistema delle due ruote. Per ciascuna data inclinazione α, la velocità critica V, letta al tachimetro, e moltiplicata per il rapporto R/r dei raggi, periferico e di rotolamento delle ruote M, darà la velocità tangenziale di ciascuna sulla linea di contatto; la velocità relativa di scorrimento sarà $2 V \frac{R}{r}$. A questo scorrimento si oppone una forza tangenziale d'attrito, che diciamo σ per la velocità *uno*;

cosicchè il lavoro speso nell'attrito di scorrimento sarà, nella unità di tempo,

$$2V\frac{R}{r}\sigma \, . \, 2V\frac{R}{r} ,$$

che all' equilibrio dinamico deve uguagliare il lavoro motore

$$2\, m\, g \ \text{sen}\, \alpha \, . \, V \, .$$

Se ne deduce il coefficiente d' attrito di scorrimento limite

$$\sigma = \frac{1}{2} m g \frac{r^2}{R^2} \cdot \frac{\text{sen}\, \alpha}{V} ,$$

il quale caratterizza la viscosità del lubrificante che si suppone interposto nella linea di contatto delle due ruote M.

Abbiamo supposto la resistenza di scorrimento proporzionale alla velocità; è però più ragionevole scrivere [1]),

$$\sigma = K \, . \frac{\text{sen}\, \alpha}{f(V)} ,$$

ove K indichi una costante dell' apparecchio. Questa funzione della velocità si potrà riconoscere facendo esperienze con inclinazioni α diverse, a parità di altre condizioni; la velocità V d' altra parte non può variare fra limiti estremamente distanti.

L' espressione della costante dell' apparecchio mostra che converrà limitare il raggio R delle ruote, ossia anche il loro raggio d' inerzia, e dare ad esse, cioè, la forma di rulli cilindrici piuttosto che di volanti, con assi di rotolamento non troppo sottili: nulla sembra opporsi a prendere prossimamente

[1]) Il Dettmar, col suo noto apparecchio (*Elektrotechn. Zeitschr.* 1899; pag. 380), che cimenta gli olii lubrificanti fra perni e cuscinetti analoghi a quelli delle macchine della pratica, trova difatti che il « coefficiente d'attrito » cresce come la radice quadrata della velocità dell'albero. Il Lasche (*Zeitschr. d. Ver. D. Ing.* 1902; pag. 1889) trova che questa legge si limita a velocità lineari non superiori a 2,5 m/sec, e da questa fino a 10 m/sec, l'attrito cresce proporzionalmente alla radice quinta della velocità; di poi, tende a divenire costante. Ma si tratta di attrito *con pressione*.

$r = \mathrm{R}$. L'equazione si riduce, in sostanza, alla forma $\sigma . f(\mathrm{V}) = \mathrm{P} \operatorname{sen} \alpha$.

Questo apparecchio potrebbe servire all'esame di lubrificanti molto viscosi, che male si sottopongono alla prova degli ordinari viscosimetri a efflusso; salvo la difficoltà pratica di costruire due cose perfettamente identiche, come dovrebbero essere i rulli M e le corde del binario, e salvo l'effetto delle vibrazioni del motore.

5. — Comunque sia, con esperienze sul piano inclinato, si possono mettere in luce varii effetti dall'attrito. Fra l'altro, è possibile determinare qual è la direzione della forza d'attrito in condizioni d'equilibrio, che in generale non può venire assegnata se manca la velocità fra i punti di contatto.

I pattinatori sanno per pratica che in giornate eccessivamente fredde, il loro esercizio è ben più faticoso che non quando la temperatura sia prossima a 0° C. L'attrito del metallo sul ghiaccio è allora assai più forte quando la pressione del tagliente del pattino non riesce ad abbassare la temperatura di fusione del ghiaccio fino al disotto della temperatura regnante, in modo da produrre l'acqua temporaneamente necessaria alla lubrificazione delle due superfici solide.

Non è difficile mostrare con una esperienza didattica questo effetto grandemente lubrificante che accompagna il fenomeno del rigelo, facendo scendere o *risalire* un grosso blocco di ghiaccio sopra un piano inclinato, quando con una pressione normale sufficiente si faccia sparire l'attrito a secco.

Si costituisce il piano inclinato con una coppia di fili di ferro zincato (di 3-4 mm) tesi fortemente a 45° fra il terreno e una parete, distanti fra loro 5 o 6 cm, circa $^1/_3$ del lato del blocco parallelepipedo di ghiaccio che vi si appoggia sopra per il lungo, fissandolo temporaneamente a capo del piano inclinato: se pesa una diecina di Kg. dopo qualche quarto d'ora i fili di ferro sono affondati nel ghiaccio fin quasi a metà, come mostra in sezione G la figura 8. Allora si avvolge una corda sulla mezzeria per servire d'attacco ad un legame, come G′A, destinato a sostenere il peso per l'equilibrio. Questo legame passa sopra una puleggia A, abbastanza alta da fornire una componente che compensi in buona parte

la pressione normale del blocco sui fili del binario inclinato: si tratta di regolare l'altezza di A in maniera che il peso equilibratore non possa vincere l'attrito di distacco e la componente normale sia ridotta abbastanza piccola da lasciare un

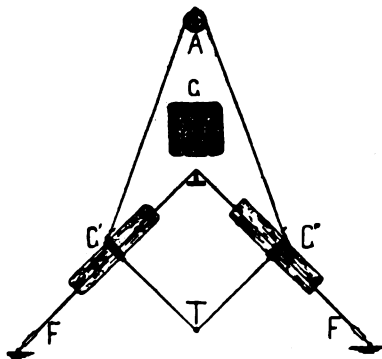



Fig. 8.

attrito a secco, ciò che è facile ottenere se la temperatura ambiente è un po' sotto 0° C. L'esperimento riesce bene in un cortile, d'inverno. Allora, se si aumenta la pressione, mediante una trazione normale eseguita sulla corda T G', *il blocco scorre*, verso il basso o l'alto, a seconda del valore del peso d'equilibrio. Meglio convincente è il risultato che si osserva con la disposizione in doppio, mostrata dalla fig. 8. Due piani inclinati uguali, a 45° col terreno, come sopra è descritto, sostengano due blocchi di 10 Kg. ciascuno, che si fanno equilibrio col legame G' A G" passante sopra una carrucola A (dolce e robusta!), di cui si possa regolare l'altezza, *intorno* ai 2 m. sul vertice dei piani F F, variando insieme la lunghezza del legame. Sotto i due blocchi G' e G" pende una cordicella G' T G" tesa in angolo retto da una pallina fissata nel suo mezzo, per marcare le normali ai due piani inclinati. Esercitando una trazione in direzione T G', il blocco G' *risale* un po' il suo binario e il blocco G" discende di altrettanto. E viceversa.

Torino, R. Politecnico. Febbraio 1911.

SULLA MACCHINA IDROELETTRICA AD INFLUENZA DI R. W. THOMSON.

DI ARCIERO BERNINI.

Cap. I. — Introduzione e scopo del lavoro.

Fra le macchine ad influenza una delle più interessanti è senza dubbio quella idroelettrica ideata da Sir William Thomson [1]), di cui la fig. 1 rappresenta uno schema.

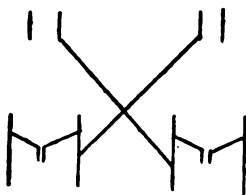



Fig. 1.

Nel modo di funzionare essa è, si può dire, identica a tutte le altre; solo che l'energia elettrica ha origine in questa semplicemente dal lavoro di caduta dell'acqua che zampilla da due tubi sottili in comunicazione col suolo, e l'ufficio di assumere cariche indotte, e trasportarle sopra corpi alla loro volta inducenti, è adempito dalle goccie, in cui si divide il getto d'acqua stesso.

Così, come il Thomson la costruì, presenta, secondo il S.r Silvanus Thompson [2]), degli inconvenienti, in quanto che esige due getti d'acqua e delle speciali disposizioni di isolamento, quando si vogliano raggiungere grandi differenze di potenziale. Epperciò quest'ultimo ha creduto apportarvi notevoli vantaggi, modificandola come appare dalla figura 2.

Il recipiente di mezzo funge da collettore rispetto a quello superiore e da induttore rispetto a quello inferiore.

[1]) *Proc. Roy. Soc.;* 1867.
[2]) *Phil. Mag.* Serie V, 25; 1888.

Con tale disposizione egli ottiene il funzionamento anche con sabbia resa conduttrice mescolandola con piombaggine o

Fig. 2.

con fina limatura di bronzo di Brewsten. Non riporta però alcun dato che stia a convalidare come la sua disposizione abbia effettivamente dei vantaggi rispetto a quella del Thomson.

Un'altra macchina del genere è stata descritta dal S.r George Fuller [1]). In essa gli induttori sono quattro (*a b c d*) e quattro sono i collettori (A B C D), collegati così come è indicato nella figura 3. Il Fuller dice che il funzionamento della

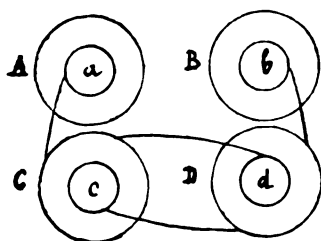



Fig. 3.

sua macchina sembra simile a quello delle due sopra ricordato, e ciò è logico, perchè essa non è che un accoppiamento

[1]) Fuller. *Phyl. Mag.* 5, 28, p. 42, 1889: Water-spray Influence-Machine.

di due macchine di Thomson. Altrettanto logici però non mi sembrano i ragionamenti coi quali egli intende di spiegare i grandi effetti, che asserisce di avere ottenuto colla macchina stessa.

Così p. es. egli dice che l'efficacia che si ottiene con un getto che si suddivida in molte goccie è dovuta a ciò, che, riunendosi poi queste in un volume più piccolo, il potenziale in quest'ultimo stato diventa più elevato; e non pensa che le cariche portate dalle goccie cadenti sul collettore vanno a distribuirsi sopra tutta la superficie del sistema di cui il collettore fa parte, e che la capacità di questo sistema può rimanere anche più grande che non la somma di quelle delle goccie cadute in un certo tempo.

A spiegare il perchè un getto che si suddivide in molte goccie dia luogo ad una maggiore quantità di elettricità che non un altro da cui effluisca la stessa quantità d'acqua, ma nel quale la suddivisione in goccie sia minore, basta far notare che la quantità di elettricità che le goccie trasportano sul collettore a parità di altre condizioni (tempo e potenziale dell'induttore) è dipendente dalla superficie totale delle goccie, e quindi deve necessariamente essere maggiore nel primo caso che nel secondo.

I risultati che il Fuller ottiene modificando il getto non sono poi nemmeno in accordo fra loro a questo riguardo. Con un polverizzatore che forniva un getto suddiviso in un numero assai grande di goccie egli ottenne, impiegando poca acqua, delle scintille lunghe circa mm. 3,1, ciò che, utilizzando l'azione della gravità, otteneva soltanto con grande quantità d'acqua e con cadute di circa 23 piedi; ma impiegando invece dei getti a numero di fori diverso ed utilizzando l'azione di gravità, ottenne sovente con getti a 12 fori effetti maggiori che non p. e. con getti a 18 fori.

È però da supporsi che in queste esperienze intervenissero delle cause di errore, alcune delle quali, dato il metodo stesso per la determinazione del rendimento, si potrebbero anche indovinare. Così p. e. egli deduce la quantità di elettricità dalla lunghezza delle scintille ottenuta quando, com'egli stesso asserisce, per l'alto potenziale della macchina le minutissime

goccie in cui si suddividono i getti, anzichè cadere sui collettori, risalivano in parte anche sui sistemi induttori. È quindi più che probabile che le goccie andassero in parte anche sui sistemi isolanti e modificassero così le condizioni di isolamento. Inoltre egli cambia i getti, ma non tiene conto delle conseguenti variazioni nella quantità d'acqua che cade, ciò che ha, come vedremo, una importanza grandissima.

Per confrontare le produzioni di elettricità per diverse condizioni delle parti della macchina era da preferirsi invece il metodo che io ho adottato per le ricerche che descrivo più oltre, e che consiste nel fare il rapporto fra i numeri di scintille che scoccano fra due parti della macchina, la cui distanza possa variarsi e rendere tanto piccola da richiedere un potenziale di scarica relativamente basso. In tale modo, oltre all'essere poca la dispersione, le condizioni di isolamento si mantengono meglio, perchè l'acqua non spruzza, e le variazioni che vi possono altrimenti avvenire portano poco pregiudizio ai risultati.

Afferma poi altresì il Fuller che un maggior rendimento della macchina è provocato dalla maggiore suddivisione che i getti subiscono in causa dell'induzione crescente, che su di esso esercitano gli induttori, mano a mano che vanno aumentando i loro potenziali. Ma questa asserzione è priva affatto di fondamento. Noi abbiamo visto è vero come una maggiore suddivisione in goccie del getto provochi nella macchina una maggiore produzione di elettricità, ma è evidente però che ciò non può accadere nel caso in cui la suddivisione in goccie sia proprio un effetto di un lavoro elettrico fornito dalla macchina stessa; chè altrimenti nella trasformazione dell' energia elettrica in meccanica e viceversa si avrebbe un guadagno di energia.

Devesi invece ritenere che la maggiore suddivisione del getto in causa dell'induzione, in quanto consuma un lavoro, contribuisce a limitare anzichè ad aumentare la produzione di elettricità, la quale viene anche contemporaneamente limitata da ciò che le goccie, così suddivise e per ciò più leggere, invece che sui collettori vanno a finire, perchè attratte, sui

sistemi induttori, opponendosi per tale modo all'aumento di potenziale di questi.

Riassumendo si può dire che nè il Thompson nè il Fuller hanno aggiunto riguardo a queste macchine una parola a quella semplice descrizione che ne aveva dato W. Thomson. Nelle pagine che seguono ho creduto opportuno esporre quanto a mio parere ho di interessante constatato con esperienze intese a conoscere meglio il loro funzionamento, ed a studiare un po' sistematicamente come varî la produzione di elettricità, quando si modifichino le condizioni che sono necessarie al funzionamento stesso.

Avviamento.

a) La disposizione che ho adottato nelle prime esperienze, perchè l'ho trovata semplice e perchè si presta per un buon isolamento, è quella indicata dalla figura 4. Un bastone di

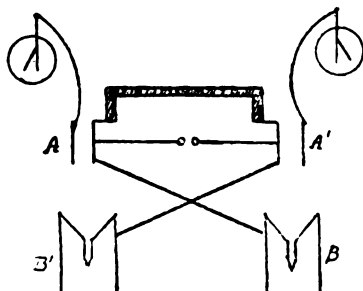



Fig. 4.

ebanite o di vetro paraffinato M, sostenuto nel suo punto di mezzo, regge i due sistemi A B e A' B' di latta, i cui collettori (con raggio di 15 cm., ed altezza 20 cm.) sono rigidamente connessi agli induttori (raggio cm. 5, altezza 7 cm.) mediante due grossi fili di Zn ad essi saldati. Da una bottiglia di Mariotte, che si può opportunamente alzare od abbassare, si deriva l'acqua mediante un tubo di gomma grosso che poi si biforca, portando innestato a ciascuna estremità della biforcazione un tubo di vetro, che penetra colla parte

affilata lungo l'asse dell'induttore, in modo che il getto si rompa dentro all'induttore stesso.

Due elettroscopi graduati per confronto con un elettrometro Hartman e Braun, gentilmente concessomi dal Prof. A. Pochettino, possono congiungersi ai due sistemi per indicarne i potenziali.

A prima vista parrebbe che l'autoeccitazione della macchina fosse dovuta soltanto alla differenza iniziale di potenziale dei due induttori, dalla quale pure parrebbe che dovesse dipendere anche il segno delle cariche. Orbene, fino dalle prime esperienze mi accorsi che questo non era. Col sistema A B carico positivamente a 50 volts e col sistema A' B' carico pure positivamente a 64 Volts mediante una batteria di pile ad acqua succedeva che il sistema A' B' diventava negativo. Bastava poi scambiare di posto ai getti, perchè colle stesse condizioni il sistema A' B' rimanesse positivo.

b) Piuttosto che dilungarmi a riferire la serie di fatti in apparenza inverosimili o contradditori che ho constatato, credo meglio esporre sulle considerazioni alle quali sono stato tratto per la loro spiegazione.

Cominciamo pertanto a distinguere alcuni casi:

1° caso. — Siano i due sistemi carichi dello stesso segno p. e. positivamente, e indichiamo con V il potenziale del sistema A B (fig. 4) e con V' il potenziale del sistema A' B'. Supponiamo sia $V > V'$; inoltre uguali le capacità C e C' dei due sistemi, ed i getti g e g' identici, cioè tali da lasciare uscire nel medesimo tempo uno stesso numero di goccie tutte eguali.

Se apriamo contemporaneamente i getti, le goccie cariche negativamente cadendo sui collettori vanno ad abbassare i potenziali dei due sistemi, ma si comprende che per essere $V > V'$ la quantità di elettricità negativa che trasportano su B' le goccie uscenti dal getto g è maggiore che non la quantità di elettricità che nello stesso tempo le goccie uscenti da g' trasportano su B. Il potenziale V' perciò calerà più rapidamente che V, e, siccome d'altra parte era anche inizialmente inferiore a quello, avverrà che si ridurrà al valore zero e cambierà di segno, mentre V, che pur va diminuendo, è ancora positivo.

Dall' istante però in cui V' cambia segno lo cambiano anche le goccie cadenti da g', sicchè queste, invece di scaricare più oltre il sistema A B, lo caricheranno di più; V e V' ricresceranno entrambi fino a che lo permetterà la dispersione, rimanendo sempre però l' uno positivo e l' altro negativo.

2° caso. — Supponiamo che g' sia un getto che fornisce una maggior quantità d'acqua e si suddivida in un numero maggiore di goccie che non g, per modo che, pur essendo $V > V'$, la quantità di elettricità negativa che le goccie da esso cadenti portano su B nei primi istanti sia molto maggiore di quelle che portano su B' le goccie uscenti da g.

In questo caso sarà V che calerà più rapidamente che non V', e potrà ridursi a zero e diventare negativo quando V' è ancor positivo. Da quell' istante, per l'inversione nel segno che di conseguenza subiscono le goccie uscenti da g, V e V' ricresceranno, rimanendo però sempre l'uno negativo, l'altro positivo, vale a dire con segni opposti a quelli del caso precedente.

Con ciò il fatto a cui avevo accennato sopra e che appariva quasi inverosimile risulta completamente chiarito.

3° caso. — Supponiamo che, sempre rimanendo $C = C'$ e $g' > g$ nel senso già indicato, siano V e V' positivi e uguali.

Si comprende come, a più forte ragione che non nel caso precedente, A B debba diventare negativo ed A' B' positivo. Ne deriva che *la differenza di potenziale dei sistemi non è necessaria per l' autoeccitazione della macchina.*

4° caso. — Siano V e V' uguali e positivi, $g = g'$, ma $C > C'$. Nel primo istante le goccie uscenti da g portano su B' la stessa quantità di elettricità negativa che quelle uscenti da g' portano su B. Per essere però $C > C'$, V' sarà diminuito più che non V, e più ancora ciò accadrà in seguito, quando di conseguenza la quantità di elettricità negativa che viene portata su B va diminuendo rispetto a quella che viene portata su B'.

Ne nascerà che V' diventerà negativo mentre ancora V è positivo, e da quell'istante in poi manterranno sempre i loro segni, che sono opposti a quelli del caso precedente.

5° caso. — Siano V e V' uguali e positivi, $g = g'$, $C = C'$; ma si permetta l'uscita dell'acqua prima da g che non da g'.

È evidente che le goccie uscenti da g andranno subito a far calare V', sicchè dovrà accadere quanto si è esposto nel caso secondo, in cui si aveva $g = g'$, $C = C'$, $V > V'$ e dello stesso segno.

Fra i tanti altri casi che si potrebbero oltre questi combinare modificando i potenziali, le capacità ed i getti, ma che si potrebbero ridurre ad uno di questi cinque ora esposti, è interessante quello in cui si faccia V di un segno V' di segno opposto, $C \lesseqgtr C'$ e $g \lesseqgtr g'$.

Per quanto abbiamo veduto è facile dedurre come in tali condizioni i segni dei sistemi non possono mai cambiare. Perchè adunque un sistema di una di queste macchine possa mantenersi carico di un certo segno non è in generale *sufficiente* caricarlo precedentemente di quel segno, *ma è necessario anche caricare l'altro di segno contrario.*

c) Quando poi si volesse eccitare la macchina agendo inizialmente sui sistemi per influenza non è altrettanto semplice il fare acquistare ai medesimi il segno che si desidera. Così ad esempio: Supponiamo di accostare al collettore B appena aperta l'acqua un bastone di vetro strofinato. In tal modo, se le capacità dei due sistemi non sono tanto diverse, per essere A ad un elevato potenziale positivo il sistema AB rimane positivo ; ma lo stesso risultato non si ottiene sempre se col bastone di vetro ci accostiamo all' induttore A', per quanto, anche così facendo, A' diventi come prima per induzione carico negativamente.

Ciò si deve probabilmente al fatto che, in quest' ultimo caso, col bastone, oltre all'agire sull'induttore, si agisce anche sul getto, annullando l' influenza che su quello esercita l' induttore, e che da sola avrebbe provocato l'effetto che si voleva.

d) A macchina avviata si riesce facilmente ad invertire il segno dei sistemi. Basta infatti metterli al suolo toccandoli contemporaneamente con una mano, ed accostare coll'altra ad un collettore un bastone carico convenientemente.

Se, dopo di avere fatto funzionare per alcun tempo la macchina, si mettono momentaneamente i sistemi al suolo eppoi si riaprono i getti, la macchina si rieccita da sè, sempre coi sistemi del segno che avevano in precedenza. Ciò è dovuto alle cariche di segno contrario penetrate nei sistemi isolanti, le quali, trasmettendosi ai conduttori della macchina, vengono a stabilire le condizioni dell'ultimo fra i casi sopra considerati.

Influenza della quantità d'acqua sulla produzione di elettricità.

A studiare l'influenza della quantità d'acqua sulla produzione dell'elettricità, congiunti ai due induttori i due elettroscopi graduati, si metteva in azione la macchina, e si contava il numero di scariche che avvenivano in un certo tempo, quando la bottiglia di Mariotte si trovava ad una certa altezza rispetto al piano orizzontale che passava per l'origine dei getti; e si ripeteva l'esperienza per diverse altezze. Siccome l'acqua che cadeva era direttamente proporzionale a questa altezza, si aveva modo di osservare l'influenza che le variazioni della quantità d'acqua portavano nel numero delle scintille.

Le sferette dello spinterometro, per ragioni sopra già esposte, erano molto vicine, quindi il potenziale di scarica molto basso, cosicchè si poteva accorgersi delle scariche che avvenivano, meglio che non dalle scintille, dal conseguente istantaneo abbassarsi delle foglie di uno qualunque degli elettroscopi.

Non riporto per brevità le lunghe serie di risultati ottenuti. Dico solo che, entro i limiti che vanno da 50 cm. a 2 metri di dislivello, per quantità d'acqua che stanno fra loro come:

1, 1.5, 2, 3, 4,

i numeri di scintille per secondo erano:

20, 30, 42, 63, 85.

Pare dunque che la quantità di elettricità, a parità di altre condizioni, cresca di più, sebbene di poco, che non la quantità d'acqua che cade.

Da prima ritenni che ciò fosse dovuto al fatto che, variando la pressione, il getto non si rompeva più nella posizione iniziale, che coincideva circa col punto di mezzo dell' asse dell' induttore; ma ebbi subito a constatare che la causa non poteva essere questa, perchè variazioni sensibili collo spostamento del getto si ottenevano solo quando questo spostamento era rilevante, ed in ogni caso poi si aveva una diminuzione di effetto e non un aumento. Col getto che si rompeva due centimetri al di sotto il numero di scintille si riduceva circa a metà.

Ritengo che il fenomeno si possa spiegare ammettendo che, in seguito alla maggiore velocità di efflusso dell' acqua, questa possa suddividersi in un numero relativamente maggiore di goccioline.

Influenza dei getti.

a) Quando abbiamo considerato quale influenza potevano avere i getti sull'avviamento, facemmo la supposizione che i getti potessero essere anche identici, nel senso di dare nello stesso tempo il medesimo numero di goccie. Ora questa condizione è possibile per tentativi realizzare, dividendo secondo *m n* dei tubi di vetro ridotti come nella figura 5. A decidere

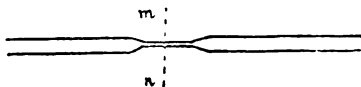



Fig. 5.

della loro identità nel senso sopra riferito serviva la prova seguente: Avviata la macchina con una coppia di getti, si osservavano nei due elettrometri i potenziali massimi assunti dai sistemi per una data altezza della bottiglia di Mariotte, i quali in generale erano diversi; poi si cambiava di posto ai getti, curando che la suddivisione in goccie avvenisse sempre a metà dell' asse dei cilindri induttori.

Se i getti erano diseguali, osservando di nuovo i potenziali massimi negli elettrometri questi si trovavano evidente-

mente modificati. Se invece i potenziali rimanevano gli stessi si concludeva per l' uguaglianza dei getti.

Ora per le ricerche sull' influenza dei getti nella produzione di elettricità ho creduto opportuno adoperare coppie di getti riconosciuti praticamente uguali nel modo ora accennato.

I risultati ottenuti con cinque coppie di getti sono raccolti nella tabella che segue, dove t ed n stanno a significare rispettivamente i tempi per la caduta di una medesima quantità d' acqua, ed il numero di scariche avvenute nei tempi stessi.

TABELLA I.

I Coppia		II Coppia		III Coppia		IV Coppia		V Coppia	
t	n	t	n	t	n	t	n	t	n
37"	40	126"	128	183",4	138	300"	160	600",4	128
37"	41	126"	121	183",2	139	300",4	161	600"	128
37",2	40	126",2	121	183",2	139	300",2	161	600"	128
37"	41	126",2	121	183",4	138	300",2	160	600",6	129
37"	41	126	120	183"	139	300",2	161	600",4	129

I risultati relativi alle prime quattro coppie stanno a dire che *una stessa quantità d'acqua genera una maggiore quantità di elettricità quando effluisce da tubi a sezione piccola che non da tubi a sezione grande ;* il che potrebbe giustificarsi coll' ipotesi del resto molto verosimile che, effluendo dai tubi a sezione piccola, una stessa quantità d'acqua venga suddivisa in un numero maggiore di goccie che non effluendo da tubi di maggior sezione [1]). I risultati della coppia 5 però sono in contraddizione col principio enunciato, ma possono spiegarsi col pensare che, diminuendo molto la sezione dei

[1]) Vedremo in seguito come a questa ipotesi se ne possa aggiungere anche un'altra.

getti, si rende più difficile la separazione in goccie, quando, come nel caso nostro, venga anche diminuita la velocità d'efflusso; e che la dispersione, per quanto piccola, deve avere sui risultati un' influenza tanto più grande quanto più grande è la durata dell'esperienza.

b) È noto che a potenziali elevati l'acqua modifica come tutti i liquidi molto sensibilmente la sua tensione superficiale. Poteva darsi che per questa ragione, oltre alla maggiore o minore facilità di dividersi in goccie, l'acqua uscisse dai getti in quantità variabile col potenziale di questi, con che, a parità di pressione sarebbe stato pure variabile anche la quantità di elettricità trasportata in un medesimo tempo sui collettori.

Orbene, in diverse serie di esperienze eseguite all' uopo, con tubi a sezioni diverse e per potenziali degli induttori variabili da 0 a + 4000 e da 0 a — 4000, i tempi di caduta di una stessa quantità d' acqua furono per ciascuna coppia di getti concordantissimi.

Influenza delle distanze fra le diverse parti dei sistemi.

a) A studiare come variasse la produzione di elettricità col variare delle distanze fra le singole parti dei sistemi mi sono costruito una macchina a sistemi mobili.

A ciascun induttore ed a ciascun collettore era saldato un grosso filo metallico, il quale veniva sostenuto da un bastone di ebanite C, così com'è indicato nella figura 6.

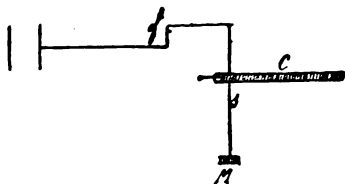



Fig. 6.

Mediante il bottone M pure di ebanite, i cilindri induttori e collettori si facevano ruotare attorno all'asse *s*, con che veniva variata la loro posizione relativa.

I due bastoni di ebanite che reggevano i due collettori erano poi fissati ad un unico sostegno, e potevano così insieme venire alzati od abbassati, ossia accostati od allontanati dagli induttori. Due lunghi tubi di ottone terminati da sferette si appoggiavano ai fili *f*, e mantenevano il contatto fra i cilindri d'uno stesso sistema per tutte le diverse posizioni; ed un adatto congegno faceva seguire ai getti gli spostamenti degli induttori.

Nella tabella che segue, in cui riporto i risultati delle esperienze eseguite con questo apparecchio, con x indico le distanze orizzontali degli assi dei cilindri, le cui dimensioni erano le stesse di quelli della macchina usata precedentemente (fig. 4), con z indico le distanze fra gli orli inferiori degli induttori e gli orli superiori dei collettori, con C_1 e C_2 le capacità dei due sistemi congiunti agli elettrometri e misurate ciascuna quando l'altro sistema era scarico, con V_1 e V_2 i potenziali che i due elettrometri accusavano all'atto della scarica, con n il numero di scintille per minuto primo, e con n' il numero di scintille che si aveva togliendo gli elettrometri, cioè coi soli sistemi della macchina.

TABELLA II.

z	x	C_1	C_2	V_1	V_2	n	n'
40	40	$11,3.10^{-4}$	$12,2.10^{-4}$	765	560	31	46
40	35			730	540	33	43
40	20	$11,5.10^{-4}$	$12,1.10^{-4}$	710	510	35	39
30	40	$11,7.10^{-4}$	$12,6.10^{-4}$	735	520	26	48
20	40			725	510	28	56
12.5	40			700	470	21	40
0	40	20.10^{-4}	19.10^{-4}	680	420	17	31

Da questa tabella si deduce come, pur rimanendo alla stessa distanza le sferette fra le quali avvengono le scintille:

1). *I potenziali segnati dagli elettrodi all'atto della scarica vanno diminuendo al diminuire di x e di z.*

2). *Mentre al diminuire di x n aumenta, n' diminuisce; e, al diminuire di z, n e n' da prima crescono entrambi fino ad un massimo, dopo di che accennano a diminuire.*

Vediamo come si possono giustificare tali risultati. Se quando la macchina è eccitata mettiamo al suolo, p. e. toccandolo, uno qualunque dei due sistemi, noi notiamo che l'elettrometro dell' altro sistema segna un repentino aumento del potenziale nonostante l' aumento di capacità che ne è derivato. Ciò sta pertanto a significare che in conseguenza della reciproca induzione fra i due sistemi gli elettrometri (che vengono a costituire come le parti lontane dei sistemi stessi) accusano, qualunque sia l' istante in cui si considerano, dei potenziali minori di quelli che spetterebbero ai sistemi, in forza delle cariche che questi effettivamente possiedono, e quindi V_1 e V_2 non sono i potenziali di scarica dei sistemi.

Ora il diminuire delle x e delle z questi sistemi e specialmente le parti che costituiscono i collettori che sono quelle a maggior superficie, si influenzano sempre più. È giusto quindi che i potenziali che accusano abbiano l'andamento che appare dalla tabella.

Si comprende poi facilmente come per l'identica ragione, se le sferette tra cui avvengono le scariche si trovano come nel caso nostro in tali posizioni rispetto al rimanente dei sistemi da costituire come le parti vicine dei sistemi stessi, il numero di scintille debba avere andamento contrario a quello dei potenziali degli elettrometri, ossia debba crescere. Se non che l'andamento di n non è conforme del tutto a questa deduzione, poichè, mentre cresce col diminuire di x, col diminuire di z cala dopo avere raggiunto un massimo. Ma per la spiegazione di questo fatto basta osservare come al diminuire di z sia andata aumentando la capacità dei sistemi.

A giustificare poi finalmente l'andamento dei valori di n', cioè dei numeri di scintille ottenute colla macchina senza elettrometri, basta notare che i collettori, data la loro grande superficie rispetto agli induttori, agiscono fra loro per influenza più che non gli induttori, e che al diminuire di x vanno cre-

scendo le cariche di induzione che ciascun collettore provoca sull' induttore dell' altro sistema. Apparirà allora naturale che debba essere più lungo il tempo necessario, perchè venga raggiunto il potenziale occorrente per la scarica.

Il contrario dovrà poi evidentemente accadere al diminuire di z, in quanto che allora i collettori agiscono sugli induttori sempre di più nel senso di favorire la scarica, poichè ne innalzano per induzione il potenziale; e diffatti sono crescenti i primi valori di n al diminuire di z. Siccome però col diminuire di z la capacità dei sistemi va mano a mano aumentando, così si comprende come a partire da un certo limite questa abbia ad influire più che non le cariche d' induzione, e conseguentemente i valori di n da quel limite in poi debbano decrescere.

b) Ora che ci siamo dati ragione dei risultati delle tabelle vediamo cosa si possa asserire riguardo alla produzione di elettricità, la quale evidentemente non può venire dedotta come nei capitoli precedenti soltanto dal numero di scariche.

La quantità di elettricità Q generata in ogni minuto primo dalla macchina dovrebbe ricavarsi facendo la somma dei prodotti delle capacità pei potenziali di scarica dei sistemi, e moltiplicando questa somma pel numero n di scintille scoccate nell' unità di tempo indicata. Cosicchè, se i valori V_1 e V_2 e C_1 C_2 della tabella II fossero i veri valori dei potenziali di scarica e delle capacità, sostituendoli nella formula

$$(\alpha) \qquad Q = (V_1 C_1 + V_2 C_2)\, n \; . \; . \; . \; . \; .$$

potremmo giungere subito ad una deduzione sicura in riguardo.

Se non che, per quanto abbiamo già veduto, V_1 e V_2 non rappresentano punto i valori effettivi dei potenziali di scarica dei sistemi. D' altra parte nemmeno C_1 e C_2 corrispondono esattamente ai valori delle capacità che dovrebbero venire sostituiti nella formula. Ed infatti noi sappiamo che la capacità d' un conduttore non è indipendente dalle condizioni elettriche dei sistemi che gli stanno vicino, e non può quindi valere per definizione di capacità dei nostri sistemi all' atto della scarica quella definita dal Maxwell, che sottintende la condi-

zione da noi verificata per determinare C_1 e C_2, e cioè che il potenziale dei corpi circostanti sia zero; e nemmeno quella data da Pulgar e Wulf che si riferisce al caso in cui il potenziale dei corpi circostanti può essere diverso da zero, ma però costante, in quanto che nel caso nostro abbiamo invece che i potenziali dei corpi circostanti vanno crescendo.

Ritenendo interessante potere giungere ad una conclusione nel riguardo, io ho creduto di eliminare gli inconvenienti accennati nel modo seguente:

Quando la macchina era in funzione colle condizioni indicate da una qualunque delle linee della tabella II, seguivo per un po' di tempo il ritmo delle scariche per abituarmi all'intervallo preciso fra l'una e l'altra, e potere così riescire a mettere al suolo uno dei sistemi e contemporaneamente chiudere il getto che ne attraversava l'induttore un istante prima che la scarica avvenisse.

Osservando allora l'elettrometro in comunicazione coll'altro sistema, si notava che l'ago aveva subito un salto, e indicava un potenziale costante e più elevato di quello che non segnava prima all'atto della scarica.

Ripetendo parecchie volte l'esperienza, e scegliendo, fra i valori del potenziale che rimaneva costante, il maggiore, potevo con buona approssimazione ritenerlo come il valore vero del potenziale di scarica del. sistema da introdurre nella formula (α), nella quale la capacità assumeva allora il significato ben definito con cui sono stati determinati i valori della capacità della tabella II.

Sostituiti pertanto questi valori caso per caso nella formula, e indicando con Q il prodotto $(V_1 C_1 + V_2 C_2) n$ dopo avere trasformato le V e le C in unità assolute, ho ricavato i valori della tabella seguente:

TABELLA III.

x	z	Q
40	40	$51{,}7.10^4$
35	40	—
20	40	$57{,}9.10^4$
40	30	—
40	20	$52{,}4.10^4$
40	12.5	—
40	0	$46{,}4.10^4$

Da questi si deduce che, come accadeva pei valori di n ed n' della Tabella II, *mentre al diminuire di x Q va sempre crescendo, al diminuire di z Q da prima cresce ma poi raggiunto un massimo tende a diminuire.*

c) Se esaminiamo attentamente i movimenti delle foglie dei due elettroscopi in comunicazione coi sistemi della macchina in funzione, notiamo che all'atto della scarica, ossia all'atto dell'uguagliamento dei potenziali, le foglie subiscono un repentino abbassamento, che però in generale non è completo; poscia notiamo che, mentre in un elettroscopio la foglia si abbassa ancora un poco lentamente, eppoi si rialza, nell'altro la foglia si abbassa pure gradatamente, ma non risale se non dopo di avere raggiunta la posizione corrispondente al potenziale zero.

Ora tutto ciò diventa chiaro ricordando ciò che vedemmo riguardo all'avviamento della macchina nel caso in cui i potenziali dei sistemi erano inizialmente uguali in valore assoluto ed in segno, ma erano diversi i getti e le capacità, sicchè si comprende come basti variare convenientemente o uno dei getti o la capacità di uno dei sistemi perchè all'atto della scarica entrambi gli elettroscopi e quindi anche i sistemi scendano al potenziale zero.

I risultati di esperienze eseguite dopo avere raggiunto queste condizioni furono concordanti con quelli ottenuti altrimenti [1]).

Rendimento.

a) L'energia elettrica prodotta da una macchina idroelettrica deve essere equivalente alla differenza fra l'energia cinetica, che le goccie avrebbero cadendo sui collettori quando i sistemi sono al suolo, e l'energia cinetica che possiedono quando vi cadono a macchina eccitata, vale a dire dovrebbe essere soddisfatta l'uguaglianza

$$E = \frac{m v^2 - m v_1^2}{2},$$

dove E rappresenta l'energia elettrica, m la massa d'acqua caduta, e v e v_1 le diverse velocità con cui le goccie arrivano sui collettori. La verifica sperimentale di questa formula richiederebbe che, per ciascun getto che si adopera, una stessa quantità d'acqua si suddividesse sempre nello stesso numero

[1]) Quando la macchina si trovi nelle condizioni ora accennate essa si presta per una rapida determinazione della capacità d'un conduttore qualunque. Infatti, si congiungano i sistemi a due condensatori di Epino, e girando la vite micrometrica di uno si ristabiliscano le condizioni di prima, se con tale congiunzione erano state turbate. Il rapporto $K = \frac{C_1}{C_2}$ delle capacità dei due condensatori di Epino sarà evidentemente uguale al rapporto della capacità dei due sistemi.

Sostituiamo ad uno dei condensatori, p. e. a quello di capacità C_1 un condensatore da studio di capacità X. Se le condizioni della foglia all'atto della scarica rimanessero inalterate sarebbe $X = C_1$. Poichè in generale ciò non avviene, si cerchi di riprodurre il noto fenomeno modificando la capacità C_2 dell'altro condensatore. Se C'_2 è la nuova capacità, allora sarà evidentemente

$$X = K C'_2.$$

I risultati ottenuti in questo modo per la capacità d'un elettroscopio tipo Exner con dispersore e campana mentre K aveva i valori 1, 0,8, 1,5 furono ripettivamente 26.10^{-4}, $27,4.10^{-4}$ e 27.10^{-4}, concordanti col valore (28.10^{-4}) precedentemente determinato col metodo dell'elettrometro, quando ebbi a servirmi dell'apparecchio per misure di radioattività.

di goccie, delle quali fosse possibile la determinazione della superficie [1]).

Se non che abbiamo già veduto come a parità di altre condizioni la suddivisione in goccie di una stessa massa d'acqua è diversa a seconda del getto, e diversa di conseguenza ne viene la quantità di elettricità che essa genera cadendo. Aggiungasi che le goccie di uno stesso getto non sono uguali, e che inoltre la diversa resistenza che l'aria offre all'acqua cadente a seconda della maggiore o minore suddivisione in goccie provoca, indipendentemente dalle azioni elettriche, delle variazioni certo non trascurabili nell'energia cinetica delle goccie e che d'altronde non si possono valutare.

[1]) Qualora fossero verificate queste condizioni i valori dei potenziali necessari pel calcolo di E si otterrebbero facilmente nel seguente modo: Sia U il potenziale di A (figura 4) V quello di B'. La carica della goccia che scende attraverso A è $-UQ$ se Q è la sua capacità, sicchè se la capacità di A'B' è C', quando la goccia è caduta il potenziale di A'B' diventa $V - \frac{Q}{C'}U$.

Se l'altra goccia cadente da A' ha la capacità Q', la carica che essa porta da A' in B sarà $-VQ'$, e il potenziale di AB diventa $U - \frac{Q'}{C}V$, dove C è la capacità di AB.

Se U_n e V_n sono i valori di U e V dopo cadute n goccie, sarà

$$\alpha' \ldots \begin{cases} U_{n+1} = U_n - \frac{Q'}{C} V_n \quad \text{e} \\ V_{n+1} = V_n - \frac{Q}{C'} U_n \end{cases}$$

Poniamo ora $\frac{Q}{C'} = p^2$ e $\frac{Q'}{C} = q^2$, poi moltiplichiamo la prima delle α' per p, e la seconda per q, indi sommiamo e sottragghiamo.

Avremo

$$p\,U_{n+1} + q\,V_{n+1} = (p\,U_n + q\,V_n)(1 - pq) = (p\,U_0 + q\,V_0)(1 - pq)^{n+1}$$

$$p\,U_{n+1} - q\,V_{n+1} = (p\,U_n - q\,V_n)(1 - pq) = (p\,U_0 - q\,V_0)(1 + pq)^{n+1}$$

da cui

$$U_n = U_0[(1 - pq)^n + (1 + pq)^n] + \frac{q}{p} V_0[(1 - pq)^n - (1\,pq)^n]$$

$$V_n = \frac{p}{q} V_0[(1 - pq)^n - (1 + pq)^n] + U_0[(1 - pq)\,(1 + pq)^n].$$

Ho creduto di ovviare a tutti questi inconvenienti col sostituire all'acqua dei pallini di Pb tutti uguali, quindi di uguale capacità. Operando con questi, i valori riscontrati pel potenziale di uno dei sistemi dopo n pallini caduti erano entro certi limiti abbastanza d' accordo coi valori che si deducevano dalle formule della nota.

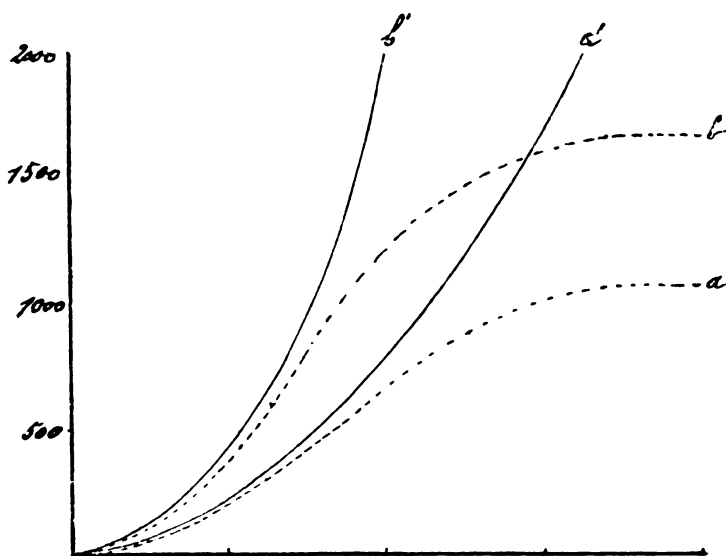



Fig. 7.

Le curve a e b della figura 7 rappresentano l'andamento del potenziale di uno dei sistemi della macchina, quando si sperimentava con diverso numero di pallini, ma con getti uguali, coi sistemi di uguali capacità e colle parti tanto lontane da ritenere trascurabili i fenomeni d'influenza reciproca, e coi potenziali iniziali di + 10 e di — 10 Volta.

Le curve a' e b' rappresentano gli andamenti che avrebbe dovuto avere il potenziale del sistema qualora non vi fosse stata dispersione [1])

[1]) Si nota però come, anche quando il potenziale è piuttosto basso, le curve a e b sono sempre benchè di poco al di sotto delle a' b', ciò che non potrebbe attribuirsi alla dispersione, perchè accurate esperienze ri-

b) L'uso però dei pallini di Pb faceva sorgere, data la loro grande massa, un'altra difficoltà nel trovare quella disposizione che permettesse di stabilire istante per istante la variazione della loro energia cinetica coll'aumentare dei potenziali dei sistemi.

Dopo parecchi tentativi, fatti lasciando cadere i pallini sopra il piattello leggermente convesso di due bilancelle contenute nei collettori, e riesciti infruttuosi, ottenni dei risultati molto soddisfacenti col sostituire dei semi di miglio ai pallini di Pb, ed alla bilancella un areometro, e col semplificare il problema oltre che la disposizione nel modo che vengo ora indicando:

Dall' imbuto metallico I sempre colmo di miglio ed in comunicazione col suolo, i semi cadevano, attraversando l'induttore A mantenuto ad un potenziale costante, sul piattello di un areometro immerso nell'acqua del recipiente di vetro V, provocandone l' affondamento all' incirca così come è indicato dalla figura (8).

Un altro recipiente metallico R, isolato, mantenuto a un potenziale costante e contrario a quello di A e contenente il recipiente V, fungeva da collettore, e permetteva che, attraverso ad apposite fessure (*f*), venisse fissato nella scala di un micrometro oculare la posizione di un piccolo indice congiunto all'asticella dell' areometro che sostiene il cestello per la zavorra.

Se dopo di avere osservata la posizione dell'indice nella scala si mettevano al suolo contemporaneamente sia l' induttore che il collettore, senza impedire la caduta dei grani, si notava allora che l'indice lentamente saliva, e dopo due o tre lente oscillazioni si fermava in corrispondenza ad una nuova divisione della scala, la cui differenza colla divisione di prima indicava di quanto l' areometro si era in più affondato. Con questa si poteva calcolare la diminuzione di forza viva dei

guardo all'isolamento dei sistemi stavano a mostrare che la dispersione avrebbe dovuto cominciare a far sentire il suo effetto soltanto per potenziali superiori ai 500 Volta. La spiegazione di queste divergenze verrà data più oltre.

pallini e quindi fare il confronto coll'energia elettrica prodotta di conseguenza.

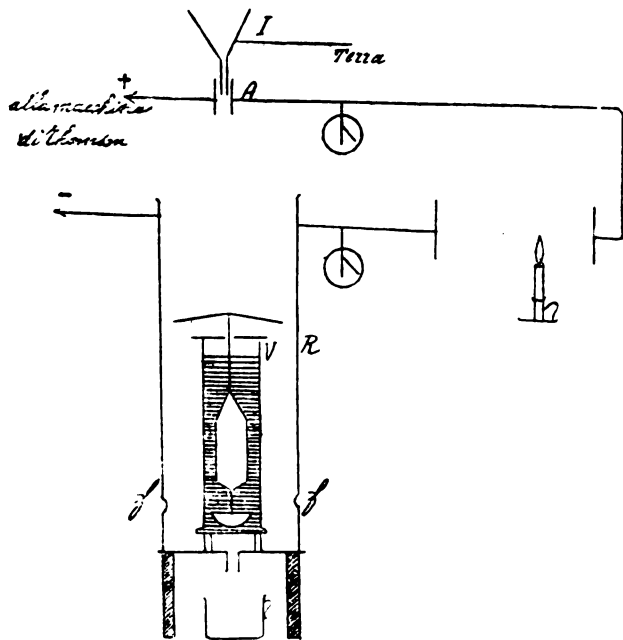



Fig. 8.

Per raggiungere gli elevati potenziali (dai 1000 ai 2000 Volta) a cui venivano portati A ed R, mi servii di una macchina Thomson; e quanto il mantenerli costanti ricorsi con felice successo alla disposizione pure indicata nella figura 8, che consiste nel collocare in posizione opportuna fra due piatti conduttori spostabili P e P′ in comunicazione metallica con A ed R, e quindi coi poli opposti della macchina di Thomson, una candela accesa, colla fiamma convenientemente protetta dalle correnti d'aria, la quale funge così come da resistenza Br. Gli joni da questa prodotti venivano attratti su P e P′ conforme al segno delle loro cariche, ed in modo diverso a seconda delle distanze, impedendone così il crescere del potenziale oltre il limite voluto.

c) A dare meglio una idea del procedimento tenuto nei calcoli credo opportuno riportare un esempio numerico.

Il peso che dovevo collocare sul piattello dell'areometro perchè avvenisse l'affondamento, così come quando, coi sistemi a potenziale zero, cadevano 1720 grani di miglio al secondo, era di gr. 2,712, equivalente a 2587,76 dine. Lo spostamento che si notava passando dai sistemi a potenziali uguali e di segno contrario (1500 Volta) al potenziale zero era di divisioni 1,5 della scala, corrispondente all' effetto di un peso equivalente a 0,882 dine.

A calcolare la velocità con cui i grani di miglio raggiungevano il piattello dell'areometro, invece di applicare la formula $v = \sqrt{2gs}$, poichè lo spazio s non si poteva misurare con esattezza, applicai la formula $F\,t = m v$. Sostituendo ad F 2587,56 dine, a t 1 ed a m gr. 9,311 rappresentanti la massa dei 1720 grani di miglio che cadevano in un secondo, ricavai

$$v = 277{,}86 \text{ cm.}$$

E sostituendo ad F

$$2587{,}56 + 0{,}882 \text{ dine}$$

ottenni

$$v_1 = 278{,}33\,.$$

La differenza $\frac{m\,v_1^2 - m\,v^2}{2}$ risultò uguale a 1842,84 ergon.

Passiamo ora al calcolo della energia elettrica. La capacità di ciascuno dei grani di miglio, che si potevano ritenere tutti uguali fra loro, data la loro forma ellissoidale si ricavò dallla formula $C = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$, dove a e b sono i due assi dell' ellissoide, e risultò di $\frac{1}{8}$ di unità elettrostatica.

Poichè i grani che cadono nell'unità di tempo sono 1720 e la differenza di potenziale fra induttore e collettore è di 3000 volta, ossia 10 unità elettrostatiche assolute, l' energia elettrica risulta uguale al prodotto $1720 \times \frac{1}{8} \times 10$, ossia u-

guale a 2150 ergon; valore alquanto maggiore di quello ricavato dal calcolo delle energie cinetiche.

d) Nella tabella che segue sono raccolti i risultati ricavati nel modo ora descritto da esperienze eseguite con valori diversi dei potenziali.

TABELLA IV.

Potenz. di A	Potenz. di R	Differenza dei Potenziali	Energia Elettrica	$\frac{mv_1^2 - mv^2}{2}$
1000	— 1000	2000	1431	1390
1500	— 1500	3000	2150	1842
2000	— 2000	4000	2865	2463

Da questi risulterebbe l'assurdo che l'energia elettrica è maggiore dell'energia cinetica spesa per produrla, e tanto di più quanto è più grande il campo.

La divergenza crescente col campo lasciava prevedere che intervenisse una causa di errore pure crescente col campo; e da prima pensai ad una azione attrattiva dell'induttore sul piatto dell'areometro. Ma accurate osservazioni in riguardo mostrarono che l'areometro, nella condizione di affondamento, si trovava completamente protetto dal recipiente collettore anche per potenziali più elevati.

Potei invece accertare come la ragione delle suddette divergenze dipendeva dal fatto che non tutti i granelli di miglio che scendevano dal tubo, necessariamente un po' largo perchè non si arrestasse il loro moto, acquistavano il potenziale dell'induttore, in quanto che quelli che venivano a costituire come la superficie esterna, all'atto in cui lasciavano l'imbuto, formavano una specie di gabbia protettrice rispetto a quelli che si venivano a trovare internamente.

E diffatti accadeva che, lasciando cadere uno stesso numero di grani da un imbuto I fig. 9 attraverso ad un induttore A mantenuto a un potenziale costante di 100 volta, il

potenziale del collettore C si innalzava di più quando il foro dell' imbuto era stretto che non quando era largo. I valori più elevati pel potenziale di C, e concordanti col potenziale che C doveva assumere data la sua capacità, si ottenevano

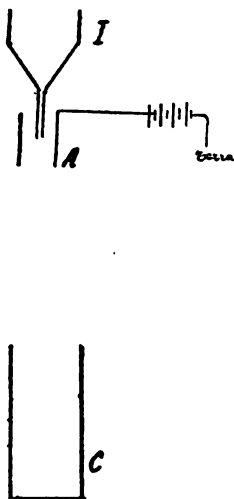



Fig. 9.

solamente quando i grani si lasciavano cadere poco alla volta dalla mano entro l'imbuto in modo da farli uscire l'uno dopo l' altro, ancorachè in tal modo la durata dell' esperienza fosse molto maggiore.

Tale condizione di cose non poteva adottarsi per la determinazione coll'areometro del valore $\frac{m v_1^2 - m v^2}{2}$, perchè allora era necessario un getto di grani piuttosto intenso e continuato.

D' altra parte solo cadendo in qualche modo i grani si sarebbe potuto ottenere la coincidenza fra i valori delle energie.

Si spiegano perciò i risultati della tabella IV; e con ciò rimane anche spiegata la divergenza fra le curve della figura 7 di cui è fatto parola nella nota ad esse relativa. Supponendo poi che il fenomeno ora descritto pei grani possa avvenire

anche nel caso in cui si faccia uso dell' acqua, restano allora ancor meglio giustificati i risultati ottenuti quando si studiò l' influenza dei getti (tabella I).

Appendice. a) Non credo fuori di proposito l' accennare qui ad una disposizione che ho con vantaggio utilizzato in campagna per mantenere costante il potenziale dei poli della macchina, anche quando il vento pel conseguente spruzzamento dell' acqua lo avrebbe impedito.

Gli induttori, come si vede dalla figura 10, rimangono completamente racchiusi dai collettori.

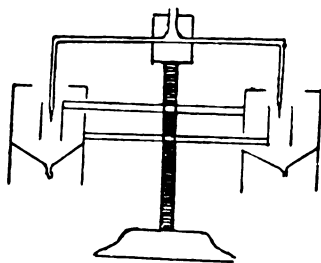



Fig. 10.

b) La figura 11 poi sta ad indicare un' altra disposizione molto semplice, nella quale sono aboliti gli induttori.

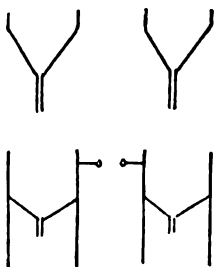



Fig. 11.

Si richiede però l' uso di granelli conduttori, ed inoltre che i due imbuti, dai quali questi scendono, siano isolanti, ed acquistino strofinati colla stessa sostanza cariche elettriche di-

verse. (Nel mio caso l' uno era di vetro, l' altro di vetro rivestito internamente di ceralacca).

I pallini od i granelli che scivolano lungo la parete di uno degli imbuti acquistano cariche per strofinio di segno contrario a quelli dell' altro imbuto, e, se gli imbuti non sono troppo stretti, bastano pochi istanti, perchè le cariche di segno contrario trasportate dai pallini sui collettori provochino gli alti potenziali necessari per produrre scintille.

È ovvio rilevare il vantaggio di poter usare ciascun sistema anche da solo.

Ringrazio il Prof. A. Pochettino per l' aiuto di mezzi e di consigli.

Dall' Istituto Tecnico di Sassari.

SULLA MAGNETIZZAZIONE DEL FERRO PER EFFETTO DI DUE CAMPI ORTOGONALI.

G. ERCOLINI.

1. — Diversi fisici hanno studiato questo argomento, ma i molteplici risultati a cui son pervenuti presentano tale varietà che non è possibile riassumerli con leggi più o meno complesse e numerose, nè dedurre chiaramente l'origine di tanta complicazione.

Di recente l'Ing. Vallauri [1]), guidato da alcune considerazioni teoriche sulla magnetizzazione del ferro, ha eseguito in proposito alcune esperienze molto interessanti su di un tubo posto entro due avvolgimenti ortogonali.

Egli osserva che i due campi magnetici, longitudinale e trasversale, si compongono e formano un campo risultante obliquo, che dà luogo ad una magnetizzazione obliqua del ferro, che dipende dalla grandezza e direzione attuali del campo risultante e dalle grandezze e direzioni che questo ha precedentemente assunto. Ma bisogna distinguere il caso in cui la suscettività magnetica va crescendo (campi deboli) dall'altro in cui essa decresce; ed allora l'azione esercitata da un campo magnetico sulla magnetizzazione prodotta dall'altro cambia di senso a seconda che la suscettività pel campo risultante è maggiore o minore di quella che corrisponde al campo applicato pel primo. Se non che la direzione della mamagnetizzazione risultante segue quella del campo risultante con un certo ritardo in virtù del quale viene ad avere importanza l'ordine di successione secondo cui i due campi ortogonali si applicano. Le due cause di variazione — muta-

[1]) *N. C.* Marzo-Aprile 1910.

mento della suscettività e ordine di successione nell'applicare i due campi — possono diversamente combinarsi, ed è allora possibile render ragione della varietà dei risultati che possono ottenersi in diverse condizioni.

Le esperienze eseguite dall'A., i cui risultati confermano in modo sodisfacente le precedenti considerazioni, sono fatte eseguendo le misure dopo di avere invertito più volte di seguito il campo che è applicato pel primo, e poi applicando e invertendo reiteratamente l'altro campo, finchè nelle variazioni osservate non sia raggiunto uno stato di regime.

Nonostante, come nota l'A., questo modo di magnetizzazione porti a valori dell'intensità magnetica solo un po' maggiori di quelli che si ottengono con variazioni meno brusche e ampie della magnetizzazione, è pur tuttavia noto che la magnetizzazione si comporta, rispetto a diverse azioni che la possono alterare, in modo differente a seconda che si perviene ad una data grandezza del campo che la suscita con valori crescenti di questo o decrescenti.

Poichè in sostanza l'applicazione d'un secondo campo produce una perturbazione degli effetti del primo, nasce quindi il sospetto che, sottoponendo il ferro ad un campo variabile gradatamente in modo che la magnetizzazione percorra dei cicli finchè questi si fissino, sia possibile ottenere dei fenomeni differenti a seconda del punto del ciclo limite in cui si fa agire il campo che si applica per secondo.

Dei saggi preliminari, fatti su di un filo di ferro percorso da corrente e posto in un campo longitudinale, avvalorarono subito questa congettura, sì che ho eseguito uno studio sistematico dei fenomeni che si verificano e qui lo espongo.

Si vedrà che, almeno nelle circostanze in cui ho potuto sperimentare, non basta considerare i ritardi esistenti fra campo e magnetizzazione risultanti; occorre prendere in esame anche il ritardo fra campo e intensità di magnetizzazione per ognuno dei campi componenti. Si ha allora che l'ordine di successione nell'applicazione di questi non ha sempre influenza sui fenomeni che si osservano, che in realtà sono molto complessi, più di quel che si è creduto finora.

2. — La considerazione della curva di magnetizzazione anisteretica permette di trovarli e classificarli.

È noto che se A B C D è il ciclo magnetico fissato (fig. 1) la curva di magnetizzazione anisteretica [1]) è F O E.

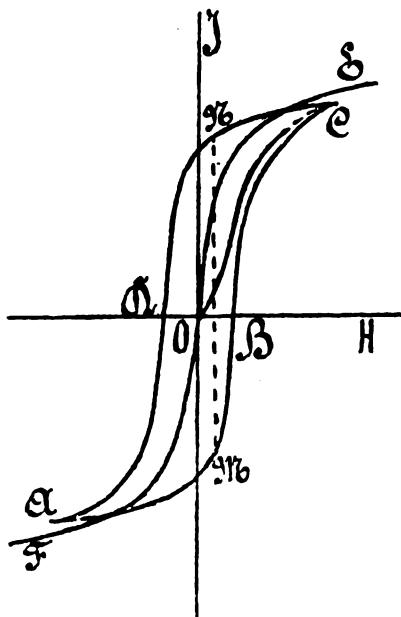



Fig. 1.

Assoggettiamo il ferro a due campi ortogonali, longitudinale l'uno, trasversale l'altro, e distinguiamo i seguenti casi:

1° Il campo longitudinale H_l è posto per primo.

2° Il campo trasversale H_t è posto per primo.

In ogni caso bisogna osservare che coi valori dei campi e delle intensità si può essere:

a - sulla curva di prima magnetizzazione O C.

b - sulla curva O E di magnetizzazione anisteretica.

[1]) È ottenuta coll'azione d'un campo alternato che, sovrapposto a quello costante, da un opportuno valore iniziale decresce fino a zero.

c - sul ciclo magnetico fissato, ma in un punto, su M C, al di sotto di O E.

d - sul ciclo magnetico fissato, ma in un punto, su N C, al di sopra di O E.

3. — 1° Caso : *a* - H_t è posto dopo H_l e col magnetometro si osservano le variazioni che subisce l' intensità magnetica longitudinale I_l.

Un filo di ferro Fe_1, del diametro di cm. 0,05 e della lunghezza di 50 cm., è nell' interno d' un solenoide lungo 80 cm. e può farsi percorrere da una corrente.

Smagnetizzato il filo a principio d' ogni esperienza mediante un campo magnetico alternato decrescente, si stabilisce il campo longitudinale H_l e poi si lancia la corrente manovrando un reostato metallico : la deviazione del magnetometro passa dal valore *d* all' altro *d'*. Qui son riportate le differenze ottenute pei diversi valori H_l (in unità c. g. s.) con quattro differenti intensità di corrente e, cioè, con 1, 2, 4 e 5 amp. rispettivamente [1]).

			$d - d'$				$d - d'$
H_l	d	1 *a.*	2 *a.*	4 *a.*	H_l	d	5 *a.*
1.05	11	— 33	— 38	— 35	4.2	133	— 22
4.5	145	— 82	— 92	— 88	5.85	275	42
5.9	225	— 66	— 75	— 69	8.15	384	78
7.5	295	— 56	— 57	— 47	10.03	428	87
10.1	360	— 35	— 35	— 20			
11.5	379	— 30	— 30	— 15			

Se si esaminano i risultati ottenuti colle prime tre correnti, si osserva che l' applicazione del campo trasversale H_t generato dalla corrente accresce sempre il valore della ma-

[1]) Trattandosi qui di misure di confronto e data la natura dei risultati che si ottengono, si vedrà che il calore svolto dalle correnti non può riguardarsi come una causa perturbatrice.

gnetizzazione longitudinale I_l, i cui aumenti, col crescere di H_l, presentano rapidamente un massimo e poi diminuiscono.

Con la corrente di 5 *a*. e col campo $H_l = 4.2$ si ottiene un aumento di magnetizzazione, ma con gli altri valori di H_l l' applicazione della corrente produce considerevoli e crescenti diminuzioni di I_l [1]).

Se si vogliono considerare i fenomeni dal punto di vista della composizione dei campi ortogonali H_l e H_t [2]), si facciano coincidere le direzioni di questi con le coordinate cartesiane O L e O T (fig. 2) e s' indichi con H il campo risultante e con I la magnetizzazione risultante di componenti I_l e I_t.

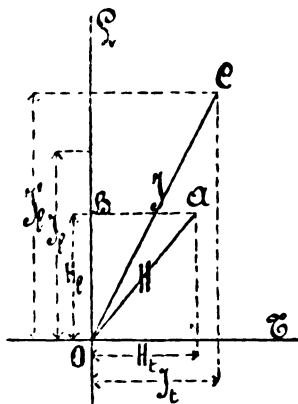



Fig. 2.

Allorchè si mette H_t dopo H_l, il campo risultante H giunge al suo valore O A in modo che l' estremo del vettore che lo rappresenta scorre lungo B A; il vettore I segue H con ritardo in modo che assume un certo valore O C pel quale $B\widehat{O}C < B\widehat{O}A$ e I_l diventa $I'_l > I_l$.

[1]) L' andamento dei valori delle differenze $d - d'$ sembra in buon accordo coi risultati ottenuti dall'Ing: Vallauri, almeno per quanto è possibile dedurre dai diagrammi della fig. 5 della Sua Memoria (l. c.).

[2]) Vallauri., l. c.

Ciò spiega l' aumento di I_l per campi risultanti deboli, quando cioè con H si è nella regione di suscettività magnetica crescente. Allorchè si passa alla regione di suscettività decrescente, adoprando campi intensi, l' effetto precedente del ritardo di I su H non è più in prevalenza e si hanno diminuzioni di I_l.

4. — 2° Caso: *a* - Nel filo, smagnetizzato, si lancia la corrente e poi si applica il campo longitudinale H_l, ottenendosi al magnetometro la derivazione δ: le differenze $d - \delta$, ove *d* è la deviazione che si ottiene (1° Caso: *a*) con lo stesso H_l quando nel filo non passa corrente, sono:

H_l	$d - \delta$			H_l	$d - \delta$
	1 *a.*	2 *a.*	4 *a.*		5 *a.*
1.05	— 6	— 8	— 5	4.2	25
4.5	— 10	— 2	1	5.85	84
5.9	— 7	21	25	8.15	113
7.5	— 16	38	49	10.03	114
10.1	— 28	56	64		
11.5	29	59	65		

Il segno ed il valore di $d - \delta$ dipendono dalle intensità di H_l e H_t. Se questi sono entrambi deboli, la magnetizzazione longitudinale I_l risulta più grande di quella che si genera quando il ferro non è magnetizzato trasversalmente. Quando il campo risultante H è più intenso succede il rovescio e si ha allora che le diminuzioni di I_l vanno crescendo [1]).

Riferendosi alla composizione dei campi ortogonali, con ragionamento molto simile a quello fatto nel caso precedente si rende conto qualitativamente degli aumenti e delle diminuzioni di I_l.

[1]) Questi risultati sono d' accordo con quelli ottenuti dall' Ing. Vallauri (Tab. II della Memoria l. c.).

5. — 1° Caso: *c* - Ciclizzato il filo fra i valori estremi $\pm H'_l$, ci si arresta ad un punto del ciclo magnetico posto al di sotto della curva anisteretica: sia d_2 l'indicazione del magnetometro pel valore H_l del campo longitudinale a cui ci si ferma. Applicando allora la corrente il magnetometro dà la deviazione finale d'_2. Le differenze $d_2 - d'_2$ sono:

			$d_2 - d'_2$						$d_2 - d'_2$
H'_l	H_l	d_2	1 *a.*	2 *a.*	4 *a.*	H'_l	H_l	d_2	5 *a.*
	1.05	— 303	— 140	— 193	— 253		4.2	114	— 64
	4.5	66	— 121	— 133	— 140	10.03	5.85	263	70
11.5	5.9	185	— 78	— 81	— 79		8.15	373	96
	7.5	280	— 58	— 54	— 39				
	10.1	355	— 37	— 34	— 17				

Queste differenze presentano lo stesso segno di quelle $d - d'$ (1° Caso: *a*) pei valori di H_l e H_t corrispondentemente uguali, ma nel caso presente esse risultano in generale più grandi e di più, quanto minori sono i valori di H_l.

È però da osservare che, nel caso delle prime tre correnti, côl campo $H_l = 1.05$ il punto del ciclo magnetico corrispondente si trova al di sotto dell'asse dei campi (nel punto M, fig. 1); e allora il segno di $d_2 - d'_2$ indica che il campo H_t produce una *diminuzione* d'intensità magnetica I_l.

Per gli altri valori di H_l si ha intanto che l'effetto d'un campo trasverso è differente a seconda che con la magnetizzazione si è sulla curva di prima magnetizzazione o sul ciclo magnetico al di sotto della curva anisteretica.

Quando $H_l = 1.05$ l'effetto di H_t è simile a quello del caso che segue.

6. — 1° Caso: *d* - Se con la ciclizzazione ci si arresta ai punti del ciclo magnetico posti al di sopra della curva anisteretica, si ottengono per le differenze $d_3 - d'_3$ fra le indicazioni del magnetometro, avute prima e dopo l'applicazion di H_t, i valori seguenti.

H_t	H_l	d_3	$d_3 - d'_3$ 1 a.	2. a	4 a.	H'_t	H_l	d_3	$d_3 - d'_3$ 5 a.
	1.05	300	47	93	153		4.2	400	242
	4.5	351	17	37	80	10.03	5.85	418	188
11.5	5.9	360	26	23	57		8.15	431	137
	7.5	369	— 3	7	36				
	10.1	375	— 21	— 18	4				

Il segno di queste differenze ci rivela che, in generale, l'applicazione della corrente produce *diminuzioni* di magnetizzazione longitudinale I_l, mentre nel caso immediatamente precedente si hanno aumenti o, colla corrente più intensa, assai meno cospicue diminuzioni. Queste vanno ora sempre decrescendo quando H_l aumenta.

Risulta dunque che « l'effetto d'un dato campo trasversale può esser quello di aumentare o di diminuire l'intensità magnetica longitudinale, dovuta allo stesso campo H_l, a seconda del modo come questo è stato applicato, *pur rimanendo lo stesso l'ordine di successione nel porre i due campi ortogonali* » [1]).

Questo risultato generale non è prevedile con la teoria della composizione dei campi ortogonali.

Essa non mostra perchè con campi deboli ($H_l = 4.5$), quando col valore di I si è ancora nella regione di suscettività magnetica crescente, l'applicazione dello stesso H_t produce ora cospicui aumenti di magnetizzazione longitudinale (1° Caso: *c*), ora diminuzioni minori, in valore assoluto, di quelli (1° Caso: *d*).

Non il valore differente assunto da I_l nella prima magnetizzazione o lungo il ciclo magnetico può invocarsi, giacchè si trova che quando I_l nei due casi ha circa gli stessi valori (1° Caso: *a*, $H_l = 7{,}5$, $I_l = 280$ e 1° Caso: *d*, $H_l = 1.05$,

[1]) Se si ciclizza la corrente che percorre il filo (2° Caso: *b* e *d*), si ha che, quando si applicano i diversi campi H_l, le deviazioni del magnetometro risultano un po' più piccole di quelle che si ottengono senza ciclizzazione.

$I_l = 300$) per l'applicazione dello stesso H_t essa va soggetta nell'uno ad *aumento* e nell'altro a *diminuzione*.

Pure con H_l uguali, che destano magnetizzazioni uguali in valore assoluto, all'applicazione di H_t i risultati che si hanno variano molto di entità a seconda del punto del ciclo magnetico in cui vien fatto agire H_t. Infatti, con lo stesso $H_l = 1.05$ al di sopra e al di sotto dell'asse del campo — in N ed in M nella fig. 1 — i valori di I_l sono praticamente uguali (300 e 303); eppure si constatano nel primo caso diminuzioni di I_l sempre molto inferiori a quelle dell'altro.

Tutto questo ci dice che, per uno stesso valore del campo H_t, l'angolo che fanno fra loro i vettori I e H (fig. 2) dipende da varie condizioni. Non basta, cioè, considerare solo il ritardo di I_l su H_l e lo dimostra il caso ultimo esaminato di campi e magnetizzazioni uguali.

Esso ci rivela con chiarezza che i fenomeni che si ottengono nelle diverse circostanze dipendono dal trovarsi coi valori di H_l e I_l più o meno prossimi alla curva di magnetizzazione anisteretica.

Il campo H_t ha la spiccata tendenza ad avvicinare il valore della magnetizzazione longitudinale, a cui ci si arresta, al valore che essa prende lungo la curva di magnetizzazione anisteretica. Si spiegano allora assai facilmente la grandezza e il segno di molti dei risultati ottenuti.

7. — Nè è da credere che i fatti osservati siano da ritenersi come dovuti ad un primo effetto della corrente, e che possano sostanzialmente cambiare quando essa venga interrotta o invertita più volte.

Un filo di ferro, Fe_2, assoggettato inizialmente all'azione d'una corrente di 5 *a.* per 700^s, è, previa smagnetizzazione, sottoposto alle esperienze come l'altro Fc_1, nel 1° Caso: *c*; ma la corrente che lo magnetizza circolarmente è ora invertita più volte di seguito. Le differenze fra l'indicazione d_2 del magnetometro, dovuta al campo H_l a cui ci si arresta, e le prime 5 successive d'_2, che si hanno applicando la corrente, sono:

	H_l	1.05	4.5	5.9	7.5	10.1
1 a.	1	— 147	— 66	— 49	— 28	— 16
	2	— 165	— 74	— 50	— 32	— 19
	3	— 170	— 78	— 50	— 33	— 20
	4	— 173	— 79	— 51	— 34	— 21
	5	— 175	— 80	— 51	— 34	— 21
2 a.	1	— 181	— 62	— 36	— 20	— 8
	2	— 197	— 73	— 44	— 25	— 13
	3	— 203	— 75	— 45	— 27	— 14
	4	— 206	— 76	— 45	— 27	— 15
	5	— 209	— 77	— 46	— 28	— 15
4 a.	1	— 240	— 39	— 10	4	18
	2	— 264	— 50	— 14	2	16
	3	— 272	— 51	— 17	1	16
	4	— 277	— 52	— 17	0	15
	5	— 280	— 53	— 18	0	15

	H_l	4.2	5.85	8.15
5 a.	1	— 33	61	85
	2	— 45	55	84
	3	— 46	54	85
	4	— 46	54	84

H_l	d_2
1.05	— 307
4.5	174
5.9	257
7.5	301
10.1	353
4.2	85
5.85	228
8.15	310

Risulta che interrompendo la corrente gli accrescimenti di magnetizzazione longitudinale provocati dal suo ristabilirsi vanno sempre aumentando col crescere del numero d'interruzioni, rapidamente in principio, più con lentezza in seguito; le diminuzioni in campi H_l più intensi invece decrescono e quelle col campo $H_l = 1.05$ (punto M della fig. 1) aumentano.

Se la corrente viene invertita, si ottengono i seguenti valori per le differenze $d_2 - d'_2$, ove d'_2 è la deviazione del magnetometro ottenuta quando la corrente ha sempre lo stesso senso, che è quello che aveva nelle esperienze precedenti.

	H_t	1.05	4.5	5.9	7.5	10.1
2a.	1	— 187	— 69	— 42	— 18	— 8
	2	— 329	— 107	— 65	— 39	— 23
	3	— 358	— 110	— 67	— 41	— 24
	4	— 372	— 112	— 68	— 42	— 23
	5	— 381	— 112	— 69	— 42	— 24
4a.	1	— 245	— 38	— 5	8	15
	2	— 364	— 74	— 27	— 6	9
	3	— 386	— 75	— 27	— 7	8
	4	— 394	— 75	— 30	— 8	8
	5	— 399	— 76	— 31	— 9	7

Col procedere delle operazioni le differenze hanno un andamento simile a quello precedente, ma le variazioni successive sono ora assai più cospicue.

Risulta fin qui che le interruzioni e le inversioni reiterate di corrente non alterano qualitativamente i fenomeni che si osservano nel 1° Caso: c alla prima applicazione di essa.

8. — Assoggettato lo stesso filo Fe_2 ad esperienze simili a quelle del 1° Caso: d, quando la corrente viene interrotta, le differenze fra la deviazione magnetometrica d_3, ottenuta per l'applicazione di H_t, e le successive d'_3, dovute allo stabilirsi della corrente nel filo, sono:

H_l	1.05	4.5	5.9	7.5	10.1	4.2	5.85	8.15
1	79	29	18	10	— 5	194	157	122
2	84	30	19	10	— 7	194	156	119
3	86	30	19	10	— 8	195	155	118
4	86	31	19	9	— 9	195	155	118
5	87	31	18	9	— 9			
1	117	47	33	22	3			
2	126	48	32	21	— 1			
3	128	49	33	19	— 1			
4	129	49	32	19	— 2			
5	129	49	32	19	— 3			
1	186	101	79	58	33			
2	193	102	76	56	30			
3	200	102	76	56	29			
4	201	103	77	57	29			
5	202	103	78	57	29			

H_l	d_3
1.05	304
4.5	348
5.9	360
7.5	365
10.1	376
4.2	334
5.85	352
8,15	361

Le diminuzioni di magnetizzazione longitudinale dovute alla corrente crescono sensibilmente col numero delle interruzioni di essa quando H_l è debole, mentre per valori di questo più intensi decrescono lentamente.

Quando la corrente venga invertita le differenze $d_3 - d'_3$, ove d'_3 è la deviazione provocata dalla corrente che passa in Fe_2 nel senso che aveva precedentemente allorchè era solo interrotta, sono le seguenti:

	H_t	1.05	4.5	5.9	7.5	10.1
2*a*.	1	124	48	33	21	5
	2	140	49	29	15	— 7
	3	143	48	28	14	— 9
	4	144	49	28	14	— 9
	5	144	48	25	13	— 9
4*a*.	1	189	98	76	57	33
	2	200	96	72	50	26
	3	203	95	71	50	24
	4	200	95	73	50	24
	5	201	94	72	50	23

Per piccoli valori di H_t le diminuzioni di magnetizzazione prodotte dal campo H_t crescono sensibilmente, per valori più elevati di H_t esse invece decrescono; ma ora, come nel precedente caso, le variazioni sono rapide a principio e lente nelle ulteriori applicazioni di H_t.

Anche adesso i fenomeni dovuti al primo passaggio di corrente rimangono, in generale, qualitativamente gli stessi nelle successive interruzioni o inversioni di essa.

Possiamo dunque concludere che « interrompendo o invertendo più volte di seguito la corrente che genera il campo H_t, le variazioni che subisce la magnetizzazione longitudinale I_l finiscono per raggiungere un valore assai costante rispetto al quale i risultati che si ottengono nei differenti casi rimangono in generale, qualitativamente simili a quelli che, nelle stesse condizioni, si hanno con una sola applicazione di corrente ».

L' effetto d' un dato campo H_t dipende sempre, in entità o in senso, e, più spesso, in grandezza e segno, non tanto dal valore del campo H_t, quanto dal punto del ciclo magnetico in cui esso viene applicato.

9. — Dopo aver rilevata la complicazione degli effetti prodotti dal campo trasversale H_t quando interviene l'isteresi nei fenomeni di magnetizzazione longitudinale, è utile esaminare il caso in cui quell'isteresi è eliminata, e considerare i risultati che si hanno nel

1° Caso: *b* - Coll'azione del campo alternato decrescente si porta la magnetizzazione longitudinale I_l di Fe_1 al valore d_1 che assume lungo la curva di magnetizzazione reversibile, e poi si fa passare la corrente nel filo: la deviazione del magnetometro diventa d'_1. Le differenze $d_1 - d'_1$ sono:

H_l	d_1	$d_1 - d'_1$ 1 a.	2 a.	4 a.	H_l	d_1	$d_1 - d'_1$ 5 a.
1.05	156	— 1	— 16	— 47	4.2	372	— 202
4.5	337	— 2	— 17	— 63	5.85	421	— 195
5.9	370	— 1	— 15	— 60	8.15	465	— 179
7.5	400	— 1	— 13	— 55	10.03	490	— 163
10.1	439	1	— 11	— 49			
11.5	454	1	— 9	— 45			

L'applicazione della corrente produce un *aumento* di magnetizzazione longitudinale I_l maggiore quanto più grande è il valore di H_t ma che, quando H_t cresce, dopo aver ben per presto raggiunto un massimo, diminuisce.

Questi risultati, diversi da quelli avuti per gli stessi valori di H_l e H_t nel 1° Caso: *a*, s'interpretano assai facilmente colla teoria della composizione dei campi, o almeno ci si può render ragione dell'andamento dei valori delle differenze $d_1 - d'_1$ al crescer di H_t, e si può prevedere che, con campi H_t superiori a quelli che ho potuto usare, l'effetto di H_t sarebbe di diminuire la magnetizzazione I_l.

Però i valori che questa assume [illegible]

2° Caso: b - Dopo aver lanciata la corrente nel filo Fe_1, questo vien sottoposto al solito campo alternato decrescente: l'applicazione successiva di H_l provoca nel magnetometro la deviazione δ_1. Le differenze $d - \delta_1$, ove d è la deviazione ottenuta per effetto del campo H_l quando il filo è smagnetizzato, sono:

H_l	$d - \delta_1$ 1 a.	2 a.	4 a.	H_l	$d - \delta_1$ 5 a.
1.05	0	0	2	4.2	26
4.5	36	46	23	5.85	82
5.9	45	54	43	8.15	108
7.5	44	55	55	10.03	105
10.1	35	47	59		
11.5	28	42	55		

Queste differenze crescono coll'aumentare di H_l fino ad un massimo per poi diminuire.

L'azione del campo alternato decrescente su quello traverso H_t è tale che la magnetizzazione I_l suscitata dal campo longitudinale H_l risulta molto differente da quella che si genera non solo nel caso del filo smagnetizzato, ma anche quando questo è assoggettato al campo H_t non modificato, come si rileva dal confronto delle differenze precedenti con quelle $d - \delta$ del 2° Caso: a. All'applicazione di H_l scompaiono ora gli aumenti di magnetizzazione allora costatati.

Ad ogni modo possiamo dire che, almeno qualitativamente, la teoria della composizione dei campi rende conto a sufficienza dei fenomeni che uno di essi produce quando agisce sulla magnetizzazione anisteretica dell'altro.

10. — Altri fenomeni però, come abbiamo veduto, non trovano in questa teoria una spiegazione sufficiente e si mostrano molto simili a quelli che si producono nella magnetizzazione longitudinale quando, con azioni meccaniche, si agisce sul ferro in campo costante.

Considerando infatti la torsione, l'esperienza mostra che essa tende sempre ad avvicinare la magnetizzazione attuale al valore che questa prende lungo la curva di magnetizzazione reversibile. I fenomeni avuti nel 1° Caso: *c* e 1° Caso *d* mostrano chiaramente che il campo H_t presenta un'azione simile.

Una nuova conferma di questa rassomiglianza si ottiene quando si esamini l'effetto del campo che si mette per secondo sulla magnetizzazione creata dal primo, allorchè il ferro si trovi mantenuto in un intenso campo alternato.

In un solenoide interno a quello che produce il campo longitudinale, e di ugual lunghezza, si lancia una corrente alternata che crea un campo di 59.7 unità c. g. s. Applicando il campo H_l, il magnetometro dà la deviazione d_1; si manda la corrente nel filo Fe_1 e si ha la deviazione d'_1: le differenze $d_1 - d'_1$ risultano le seguenti:

		$d_1 - d'_1$			$d_1 - d'_1$
H_l	1 *a.*	2 *a.*	4 *a.*	H_t	5 *a.*
1.05	3	2	7	4.2	10
4.5	3	1	6	5.85	11
5.9	6	2	6	8.15	9
7.5	4	1	6	10.03	13
10.1	4	1	6		
11.5	5	2	7		

In tal caso la corrente genera sempre diminuzione di magnetizzazione longitudinale assai piccola, che si conserva all'incirca costante al mutare di H_l e che, in generale, cresce coll'aumentare della corrente nel filo.

In un altro caso, essendo sempre il ferro sotto l'azione del campo alternato e della corrente che lo traversa, si applica il campo H_t e si ottiene la deviazione [illegible] al magnetometro: le differenze [illegible] sono:

	$d_4 - d_5$				$d_4 - d_5$
H_l	1 *a.*	2 *a.*	4 *a.*	H_l	5 *a.*
1.05	— 2	— 2	— 5	4.2	— 7
4.5	— 2	— 1	— 4	5.85	— 8
5.9	— 2	— 1	— 4	8.15	— 8
7.5	— 2	— 1	— 3	10.03	— 8
10.1	— 4	— 2	— 4		
11.5	— 4	— 3	— 5		

L'effetto del campo H_l è ora quello di produrre delle magnetizzazioni lievemente superiori a quelle che genera quando il filo non è percorso da corrente. Le differenze precedenti si mantengono all'incirca costanti al variare di H_l e crescono, in generale, quando aumenta l' intensità della corrente nel filo.

Si ha dunque che l'azione del campo alternato è, in sostanza, quella di render molto piccole le differenze osservate nei primi due casi esaminati in principio e di farle quasi indipendenti, per ogni valore della corrente che passa nel ferro, dall'intensità del campo longitudinale.

Così pure quando il ferro, sottoposto ad un campo alternato e ad uno costante, è sollecitato dalla torsione, non subisce da questa che piccole alterazioni di magnetizzazione media longitudinale.

Ed anche le successive variazioni di magnetizzazione longitudinale che abbiamo veduto prodursi per effetto d'inversioni di correnti (§§ 7 e 8) presentano un andamento molto simile a quello che si ottiene con torsioni e detorsioni successive d' un filo di ferro magnetizzato in campo costante.

11. — I fenomeni che si producono lungo la curva di prima magnetizzazione e lungo il ciclo magnetico portano a far ritenere che il campo magnetico che si applica per secondo, pur componendosi coll'altro, produca sulla magnetizzazione creata da questo un' azione simile a quella che vi eserciterebbe la torsione. Tale azione risulta esser molto sensibile in campi deboli.

Si deduce allora che l'aumento di magnetizzazione longitudinale prodotto dal campo trasverso deve ascriversi più che altro all'azione riduttrice d'isteresi magnetica longitudinale da esso esercitata, senza però escludere che possa influirvi pure il trovarsi coi valori dei campi risultanti nella regione di suscettività magnetica crescente. Ad ogni modo le due cause di variazione sono concomitanti; e si può allora spiegare come la teoria della composizione dei campi non renda sempre conto quantitativamente delle variazioni di magnetizzazione che si osservano in vari casi, e come la magnetizzazione creata dal campo che si applica per secondo risulti diversa da quella che esso genera da solo.

Nel caso in cui i campi che si sovrappongono sono intensi, la riduzione d'isteresi operata da quello che è applicato per ultimo diventa meno sensibile, prevalgono cioè gli effetti dovuti alla composizione dei campi, ma quantitativamente i fenomeni dipendono ancora dal modo come si perviene ai valori dei campi.

L'imperfetta isotropia magnetica del ferro può, del resto, essere una causa di non trascurabili complicazioni.

Ma quando la magnetizzazione longitudinale percorre dei cicli rapidi di ampiezza assai grande, i fenomeni si semplicizzano: il campo trasverso non produce in ogni caso che diminuzioni di magnetizzazione media relativamente molto piccole.

12. — Tutto sommato può dirsi che in realtà nei fenomeni isteretici prodotti nel ferro da un campo magnetico che si aggiunge ad un altro ad esso ortogonale si sovrappongono tre effetti distinti:

uno che, come una perturbazione elastica per torsione, tende ad annullare o almeno a ridurre la isteresi magnetica nei fenomeni prodotti dal primo campo;

un secondo dovuto al fatto che il vettore magnetizzazione risultante I non segue che a distanza d'un certo angolo il vettore campo risultante H;

un terzo dovuto alla legge con cui la grandezza del primo vettore segue le variazioni di quella dell'altro.

In virtù di questi tre effetti coesistenti i fenomeni magnetici presentati dal ferro sottoposto all' azione di due campi ortogonali dipendono non soltanto e dall' ordine con cui questi si applicano e dalla regione di suscettività magnetica in cui si può essere col valore del campo risultante, ma anche e molto — in grandezza e senso — dal modo come i campi vengono stabiliti.

Finchè questi non hanno valori elevati, per un dato ordine nella loro successione la considerazione della curva di magnetizzazione reversibile permette, in generale, di prevederli e classificarli, almeno qualitativamente; nell' altro caso occorre tener presenti anche le altre condizioni. Ma quantitativamente i fenomeni dipendono sempre dall'insieme delle diverse circostanze.

Tuttociò, oltre che render ragione della grande varietà dei risultati ottenuti fin qui dai diversi sperimentatori, che operarono in condizioni le più varie e spesso mal definite, porta a concludere che l'azione del campo che agisce per ultimo non può esclusivamente considerarsi come un'azione indipendente da quella dell'altro campo e paragonabile ad una sollecitazione meccanica, ma non può neppure ammettersi che i fatti osservati siano esclusivamente dovuti ad effetti prevedibili, più o meno facilmente, mediante la composizione dei due campi ortogonali. I due ordini di cause coesistono e si sovrappongono in vario modo.

Solo quando l'isteresi negli effetti prodotti dal campo che si applica da prima sia annullata, l'azione del secondo campo è sufficientemente spiegabile con la composizione dei due campi che si sovrappongono.

Queste conclusioni generali valgono, almeno, entro i limiti delle esperienze eseguite e nel caso in cui uno dei campi sia prodotto da una corrente che passa in un filo di ferro. Ma non parrebbe si potesse negare a priori che esse valgono anche quando i campi son generati da correnti che percorrono due circuiti ortogonali.

Napoli, Marzo 1911.

Distribuzione del flusso d'induzione concatenato col secondario di un rocchetto.

Nota di M. LA ROSA.

Il giusto rilievo che l'egregio Prof. Stefanini (*N. Cim.* Aprile 1911, p. 236) rivolge a me ed al D.r Pasta, per omessa citazione di una Sua Nota: « Sulla distribuzione dell'induzione magnetica *attorno* a un nucleo di ferro » (*N. Cim.*, vol. 9, p. 417, 1899) nel lavoro da noi recentemente pubblicato sul medesimo argomento, mi procura sincero rincrescimento. In perfetta buona fede, mi sono reso anch'io colpevole di quella negligenza di cui non di rado gli Autori italiani hanno ragione di dolersi.

Credo, per mia giustificazione, che il titolo scelto dal Prof. Stefanini, non sia valso a farmi distinguere chiaramente l'oggetto speciale di questo studio fra i numerosi lavori « sulla distribuzione dell'induzione magnetica *lungo* nuclei di ferro » di cui abbonda la letteratura fisica.

Fortunatamente, però, le nostre misure si riferiscono a nuclei di dimensioni relative diverse da quelle adottate dal Prof. Stefanini, e veramente più vicine ai valori che la tecnica attuale preferisce nella costruzione del rocchetto; esse perciò sono da riguardare come un'estensione delle precedenti, non come ripetizione.

L'accordo perfetto fra i risultati è per noi motivo di compiacimento, per la maggior forza che acquistano le nostre misure, su cui si appoggia tutta la parte nuova del nostro lavoro: la discussione del problema di una scelta razionale delle dimensioni del rocchetto.

LIBRI NUOVI

Prof. E. CASTELLI. — **Elettricità pratica.** — (Bergamo, 1911).

Coi bei tipi della libreria dei fratelli Bolis di Bergamo è uscita la pubblicazione « *Elementi di Elettricità pratica* » del Dott. Enrico Castelli, professore di Fisica generale e applicata nel R. Istituto Tecnico di Bergamo. Intento dell' autore fu quello di « riuscire di qualche vantaggio tanto a chi voglia, mediante uno studio elementare, succinto ma completo, formarsi una conoscenza generale della più moderna e della più progressiva delle scienze, quanto a chi, possedendo già pratiche cognizioni sui meccanismi e sugli impianti elettrici, aspiri a rendersi conto del loro funzionamento e delle circostanze da cui può derivare il loro perfezionamento ».

Credo che il Prof. Castelli abbia raggiunto il suo intento, riempiendo una lacuna nella nostra letteratura elettrica: esistono infatti pregevoli libri di elettricità; ma alcuni sono di indole troppo pratica, altri, all'opposto, sono esclusivamente teorici, o troppo superiori alla comune istruzione e intelligenza, o troppo elementari; in altri ancora è data soverchia parte alle notizie storiche o statistiche.

Il Castelli in 646 pagine ornate di ben 319 incisioni ha saputo trattare i vari argomenti con sobrietà e chiarezza, mettendo il lettore al corrante delle più recenti applicazioni dell'elettricità e dei metodi principali di misure industriali, alcuni dei quali non sono stati peranco pubblicati; e quei pochi appunti che si potrebbero fare qua e là non scemano il merito generale dell' opera, il cui mite costo (L. 5) ne è anche un pregio.

Milano, Maggio 1911.

Prof. Ing. A. MAURI.

ATTILIO MARIOTTI, *gerente responsabile.*

Pubblicazione mensile

Anno LVII - Serie VI - Vol. I - 1° Sem. - Fasc. 6°

Giugno 1911
Pubblicato il 22 Luglio

IL NUOVO CIMENTO

FONDATO DA C. MATTEUCCI E R. PIRIA
E CONTINUATO DA E. BETTI E R. FELICI

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

INDICE:

PISA
STABILIMENTO TIPOGRAFICO TOSCANO
Ditte: Vannucchi-Galileiana-Pieraccini
1911

AZIONI ELETTROMAGNETICHE DOVUTE AGLI IONI DEI METALLI DEVIATI DALLA TRAIETTORIA NORMALE PER EFFETTO DI UN CAMPO.

O. M. CORBINO.

I. — Introduzione.

Nei fenomeni classici della distribuzione dei potenziali nei conduttori percorsi da corrente (legge di Ohm), dell'elettromagnetismo (azione di Oersted), dell'elettrodinamica (azioni di Ampère) e dell'induzione elettromagnetica (azione di Faraday) le due correnti opposte di ioni positivi e negativi, ammesse nella teoria elettronica della conducibilità metallica esercitano azioni inseparabili; gli effetti osservati possono considerarsi come somma di quelli che sarebbero separatamente prodotti dalle due specie di ioni, e, per una data corrente totale, sono indipendenti dai valori parziali delle correnti positiva e negativa e dalle loro velocità.

La supposta coesistenza delle due correnti distinte lascia però prevedere tutta una serie di fenomeni, correlativi a quelli sopra citati, nei quali esse intervengono in modo specifico con le quantità di elettricità trasportate e con la loro velocità.

Di questa serie di fenomeni elettrodinamici di *seconda specie* era noto finora uno solo, l'anomalia nella distribuzione delle linee equipotenziali in una lamina metallica percorsa da corrente e disposta in un campo magnetico; cioè il fenomeno di Hall. Questo infatti dimostra che la distribuzione dei potenziali nella lamina non segue più le leggi stabilite dal Kirchoff per i conduttori a tre dimensioni sulla base della legge di Ohm. Non è più vero, cioè, che le linee di ugual livello elettrico son normali alle linee di corrente, mentre queste conservano, nella lamina isolata, l'andamento normale che possiedono in assenza del campo.

La teoria elettronica rende ben conto di queste deviazioni dalla legge di Ohm, che sono un effetto *differenziale* delle quantità di moto disuguali delle due correnti, complicato dalla coesistenza di alcuni effetti termici anch'essi in pieno accordo colla teoria.

Era naturale quindi l'idea di passare dal capitolo della legge di Ohm agli altri capitoli della elettrologia: all'elettromagnetismo, alle forze elettrodinamiche, all'induzione elettromagnetica; ed esaminare quali nuovi effetti di seconda specie, la teoria permetta di prevedere e l'esperienza confermi. È questo lo scopo del presente lavoro nel quale mi son proposto di stabilire l'esistenza dei fenomeni fondamentali e la loro dipendenza da un unico parametro caratteristico del metallo, che chiamerò il suo momento ionico differenziale. Esso è legato alle costanti di Drude nel modo seguente:

Siano ev_1, ev_2 le velocità assolute acquistate dalle due specie di ioni sotto l'azione d'un campo elettrico 1; σ la conducibilità del metallo; $\frac{\sigma_1}{\sigma}$ e $\frac{\sigma_2}{\sigma}$ le frazioni della corrente totale trasportate dalle due correnti opposte; chiameremo momento degli ioni positivi l'espressione $\frac{ev_1\sigma_1}{\sigma}$, momento dei negativi l'espressione corrispondente, e momento ionico differenziale la quantità

$$E = \frac{e v_1 \sigma_1}{\sigma} - \frac{e v_2 \sigma_2}{\sigma}.$$

Se fossero poi, come negli elettroliti, eguali i numeri di ioni mobili positivi e negativi per cm^3, si avrebbe più semplicemente

$$E = e (v_1 - v_2)$$

cioè eguale alla differenza delle mobilità ev_1 ed ev_2 delle due specie di ioni.

Oggetto delle nostre considerazioni sarà un disco circolare metallico di cui il centro e la periferia possano in modo opportuno collegarsi a una sorgente di forza elettromotrice o a un galvanometro.

II. — Azione elettromagnetica del disco percorso da corrente radiale e disposto in un campo costante.

Secondo la teoria ordinaria un disco percorso da corrente radiale ha un autoflusso normale nullo, anche se disposto in un campo. La considerazione delle due correnti ioniche ci condurrà invece alla conclusione che per azione di un campo normale, il disco si trasforma in una speciale lamina magnetica producente un flusso di forza normale al disco. Questo sarà perciò capace d' eccitare una corrente indotta in una bobina che lo circonda, all'atto in cui s'invia la corrente radiale.

Siano r_1 ed r_2 i raggi, interno ed esterno, che limitano il disco, disposto nel campo normale H; e questo sia prodotto da una corrente che circola nel senso destrorso. Sotto l'azione della forza elettrica F, e dell'azione elettromagnetica, gli ioni positivi acquisteranno una velocità le cui componenti radiale e circolare, in coordinate polari, saranno rilegate dalle equazioni

$$(1)\qquad \begin{aligned} r\frac{d\vartheta}{dt} &= \mathrm{H}ev_1\frac{dr}{dt} \\ \frac{dr}{dt} &= ev_1\mathrm{F} - \mathrm{H}ev_1 r\frac{d\vartheta}{dt}\,. \end{aligned}$$

E invero il potenziale elettrico essendo una funzione monodroma, e tutte le azioni essendo simmetriche rispetto all'asse del disco e del campo, le linee equipotenziali continueranno ad avere la forma circolare posseduta in assenza del campo; e la forza elettrica sarà perciò sempre radiale.

Posto

$$(2)\qquad \mathrm{H}ev_1 = m_1$$

la prima ci dà

$$r\,d\vartheta = m_1\,dr$$

cioè

$$\vartheta = m_1 \log r + \mathrm{C}\,.$$

La costante C si determina ponendo $r = r_1$, per $\vartheta = 0$; si ha con ciò

(3) $$r = r_1 e^{\frac{\vartheta}{m_1}}$$

e analogamente per gli ioni negativi, ponendo

$$H e v_2 = m_2$$

si avrebbe

$$r = r_1 e^{-\frac{\vartheta}{m_2}}.$$

Adunque le traiettrie dei due ioni sono due spirali logaritmiche distinte, anzichè un raggio comune del cerchio come avviene in assenza del campo. Con una corrente centrifuga la spirale degli ioni positivi è percorsa in senso opposto alla corrente magnetizzante.

In generale si può dire perciò che mentre restano inalterate le linee equipotenziali nel disco, si separano le traiettorie delle due correnti, contrariamente a quanto ha luogo nell'esperienza di Hall, quando dalla lamina non vengano derivate correnti laterali.

E non occorre, in conseguenza, tener conto come nella teoria del fenomeno di Hall, della condensazione trasversale degli ioni e della loro conseguente retrodiffusione elettrica e termica.

3. — Non meno agevole è il computo teorico dell'azione elettromagnetica dovuta a queste correnti distorte.

Per ragioni evidenti di simmetria, nella valutazione del flusso totale attraverso al disco, o anche attraverso a una bobina indotta concentrica, potremo non tener alcun conto della componente radiale della corrente. D'altra parte, detta I_1, la corrente totale trasportata dagli ioni positivi, legata alla corrente complessiva I dalla relazione

$$I_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma} I$$

si ha

$$I_1 = 2\pi r \varepsilon N_1 e \frac{dr}{dt}$$

ove ε indica lo spessore del disco. E perciò

$$\frac{dr}{dt} = \frac{I_1}{2\pi r \varepsilon N_1 e}$$

cosicchè la densità della corrente circolare sarà

$$N_1 e r \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{m_1 I_1}{2\pi r \varepsilon}$$

mentre la totale corrente circolare che traversa mezzo piano diametrale del disco si potrà esprimere con

$$\frac{m_1 I_1}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1} .$$

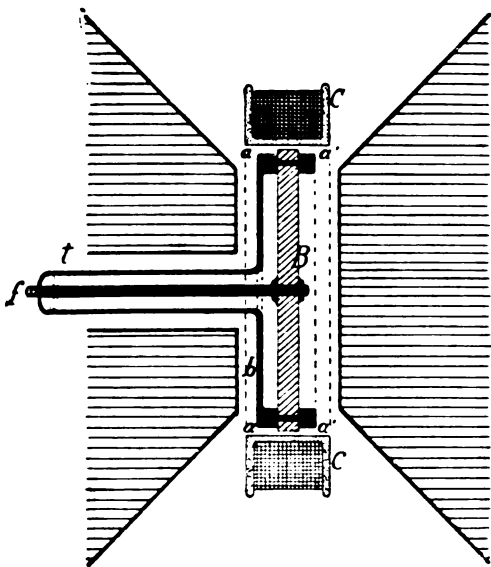
Risulta così dimostrato che l'*azione* degli ioni positivi e negativi del disco *è proporzionale rispettivamente, a* $m_1 I_1$ *e a* $m_2 I_2$, *e che perciò l'azione elettromagnetica totale del disco equivale a quella di un sistema di correnti circolari di densità lineare* $\frac{EIH}{2\pi r}$, ovvero è proporzionale al momento ionico differenziale E, alla corrente totale I e al campo esterno H.

La costante di proporzionalità dipenderà solo dalle dimensioni del disco, e anche della bobina indotta, se invece del flusso attraverso al primo si ricerca l'azione induttiva sulla seconda; essa sarà perciò comune a tutti i dischi di eguale contorno e di qualsiasi metallo, e potrebbe essere calcolata con considerazioni di natura puramente geometrica. Ma può anche determinarsi sperimentalmente; basta a tal fine misurare l'azione induttiva d'una lamina conduttrice forata al centro, spaccata lungo un raggio e nella quale sia applicata, con due conduttori di resistenza trascurabile disposti lungo gli orli del taglio, una forza elettromotrice costante; questa darà luogo appunto a correnti circolari di densità inversamente proporzionale a r.

Si misuri, sperimentalmente, con una o più spire che l'abbraccino tutto intorno, (o con una bobina indotta), il flusso

totale attraverso la lamina (o la sua azione induttiva sulla bobina) quando la corrente circolare integrale ha il valore $\frac{1}{2\pi}\log\frac{r_2}{r_1}$ e sia K il valore ottenuto, ad esempio, per l'effetto induttivo sulla bobina. È chiaro che l'azione induttiva di seconda specie constatata col disco, percorso dalla corrente radiale I, sarà data da $C = KEIH$.

4. — L'esperienza ha confermato la previsione teorica; essa fu eseguita nel modo seguente:

Un disco circolare di bismuto B può essere percorso radialmente da una corrente continua; la quale penetra dal

centro, per un filo f che lo traversa e vi è fissato con due piccoli dadi, e viene raccolta alla periferia da due anellini di rame a, a' applicati all'orlo delle due facce del disco. Da uno degli anelli la corrente ritorna radialmente lungo una piastrina forata di rame parallela al disco, fino ad un tubo t che s'innesta nel foro e circonda il filo centrale. Una bobina piatta

CC, con le spire parallele al disco, lo circonda tutto in giro ed è rilegata ad un galvanometro.

Disco e bobina sono disposti tra i poli d'un elettro-magnete Weiss, normalmente alle linee di forza. A tal fine il tubo circondante il filo centrale passa pel canale del nucleo dell'elettro-magnete e pel foro d'una delle masse polari, l'altra massa polare è cieca; entrambe hanno le facce piane d'estensione quasi eguale alla parte scoperta del disco di bismuto. Quando l'elettro-magnete non è eccitato, il passaggio della corrente radiale non crea alcuna azione magnetica nella bobina che circonda il disco; e perciò il galvanometro non dà alcuna deviazione qualora si stabilisca e s'interrompa la corrente radiale medesima. Se però si eccita il campo (interrompendo durante la manovra il circuito della bobina e del galvanometro) e si stabilisce, a campo eccitato, la corrente nel disco, si nota al galvanometro una deviazione brusca, come per una corrente indotta. Tornato il galvanometro a zero e interrompendo la corrente nel disco, si ha una deviazione eguale ed opposta. Il senso delle deviazioni ottenute s'inverte col senso della corrente nel disco, come anche col senso della corrente nell'elettro-magnete; e la corrente indotta si annulla quando si sostituisce al disco di bismuto un disco di rame.

È perciò escluso che si tratti di azioni dovute a induzioni di prima specie, o a lievi correnti derivate; naturalmente occorre provvedere a che le due correnti che circolano nell'elettro-magnete e nel disco siano completamente indipendenti.

In queste esperienze la parte attiva del disco aveva il diametro di 65 mm. e lo spessore di 2,8 mm. L'azione elettromagnetica risultò proporzionale alla corrente che traversava il disco; e crescente con l'intensità del campo medesimo.

Con un campo di circa 3700 unità e una corrente nel disco di 15 Ampere, le deviazioni ottenute corrispondevano all'azione induttiva esercitata sulla stessa bobina, da una spira, dello stesso contorno del disco, situata intorno ad esso, nell'interferro, e percorsa dalla corrente di 0,26 Ampère. Il senso delle deviazioni fu sempre conforme alla regola seguente:

Il passaggio d'una corrente centrifuga nel disco, sotto l'azione del campo, lo trasforma in una lamina magnetica col medesimo senso di circuitazione della corrente magnetizzante; se la corrente è centripeta, il senso di circuitazione della lamina maguetica equivalente al disco è opposto a quello della corrente magnetizzante.

L'esperienza conferma perciò la proporzionalità a I e c'insegna inoltre che nel bismuto E è negativo; prevale cioè il momento degli ioni negativi.

Quanto alla legge di dipendenza da H essa sarà meno semplice di quel che appare dalla formola, qualora il campo sia creato con un elettromagnete in ferro. E invero il flusso che traversa il disco e la bobina si chiude, in parte, attraverso alla carcassa di ferro, penetrando e uscendo per le facce polari. Viene con ciò accresciuta l'intensità delle azioni osservate; ma all'aumentare del campo, e quindi dell'induzione nel ferro, diminuisce la sua permeabilità differenziale, cioè la sua attitudine a dare facile passaggio alla nuove linee di forza create dal disco. È perciò che l'azione induttiva cresce, secondo l'esperienza, più lentamente del campo; ed è perciò che, a campo eguale, l'azione aumenta avvicinando al disco le facce polari. Si può, però, correggere questa influenza del ferro confrontando l'azione osservata con quella d'una spira circolare percorsa da corrente, e situata nell'intraferro, intorno al disco.

Così facendo ho avuto agio di osservare che anche l'azione corretta cresce più lentamente del campo, come avviene dello stesso bismuto pel fenomeno di Hall. Ciò è dimostrato dalla seguente tabella; in cui la seconda colonna contiene le correnti che era necessario mandare nella spira per ottenere la stessa deviazione galvanometrica osservata col disco, percorso da 15 Ampère:

Campo H =	Corrente equivalente nella spira, C =	C/H × 10⁴
3700	0,26 A	7
5700	0,31 »	5,6
7000	0,34 »	4,9
8200	0,35 »	4,3
9000	0,37 »	4

5. — L' effetto osservato dipende adunque, secondo la teoria, da σ_1, σ_2, v_1 e v_2; mentre l'effetto Hall dipende inoltre da

$$x_1 = \frac{d \log N_1}{d T} \quad , \quad x_2 = \frac{d \log N_2}{d T} ;$$

cioè dalle variazioni relative dei numeri di ioni con la temperatura, secondo la formola

$$R = \frac{e}{\sigma} \frac{v_1 x_2 - v_2 x_1}{x_1 + x_2} .$$

Si riconosce da ciò che l'azione elettromagnetica constatata non è una semplice variante dell'effetto Hall, ma fornisce un' altra relazione *indipendente* tra le costanti caratteristiche del metallo.

Che se, allo scopo di formarci un' idea dell' *ordine di grandezza relativo*, pei diversi metalli, dell' effetto Hall e dell' effetto elettromagnetico, ammettiamo che sia per essi, all'incirca,

$$N_1 = N_2 = N$$

e

$$x_1 = x_2$$

si avrà, ritenendo solo i fattori variabili da metallo a metallo, per l'effetto elettromagnetico:

$$C = \frac{N}{\sigma} (v_1^2 - v_2^2) = v_1 - v_2$$

e per l'effetto di Hall:

$$R = \frac{v_1 - v_2}{\sigma}$$

e perciò

$$C = R\sigma$$

Or, com'è noto, mentre R varia moltissimo da metallo a metallo, il prodotto di R per la conducibilità σ varia molto meno. Così mentre il tellurio dà luogo ad un effetto Hall circa 650.000 volte superiore a quello dell'argento [1]), l'effetto elettromagnetico sarà solo 5 volte maggiore! E per la stessa ragione tra bismuto e argento il rapporto dei due coefficienti Hall è circa 11 mila, mentre quello tra le azioni elettromagnetiche sarebbe solo 150. Tutto ciò, beninteso, con le necessarie riserve per la supposta eguaglianza di N_1 e N_2, x_1 e x_2 [2]).

III. — Energia del disco nel campo. — Forze elettromagnetiche.

6. — Il risultato ottenuto sugli effetti elettromagnetici del disco percorso da corrente radiale nel campo ci pone in grado di valutare la loro energia mutua.

Abbiamo visto che il disco equivale ad un sistema piano di correnti circolari di densità $\frac{EIH}{2\pi r}$. Un anellino di raggio r e larghezza dr, è quindi percorso dalla corrente $\frac{EIH}{2\pi r} dr$ e la sua energia nel campo H, poichè la corrente dipende dal campo, sarà

$$dW = -\frac{EIH}{4\pi r} dr \times \pi r^2 H .$$

[1]) Drude. *Ann. d. Phys. 3*, p. 392; 1900.

[2]) Sarà mostrato in una prossima Nota che l'ultima relazione è rigorosamente soddisfatta quando si consideri il coefficiente R dell'effetto Hall isotermico.

Cosicchè l'energia complessiva del disco nel campo sarà data da

$$W = -\frac{1}{8\pi} E I H^2 S$$

ove S indica la superficie *attiva* del disco, sottraendo cioè dalla superficie totale del disco il cerchietto centrale di raggio r_1.

Se invece il campo forma con la normale al disco un angolo α, la energia W' sarà data da

$$W' = W \cos^2 \alpha$$

e perciò il disco sarà sollecitato da una coppia di momento

$$M = -\frac{dW'}{d\alpha} = W \operatorname{sen} 2\alpha = -\frac{1}{8\pi} E I S H^2 \operatorname{sen} 2\alpha$$

che sarà massima per $\alpha = 45°$. Or W, come vedremo, ha un valore notevole; doveva quindi essere possibile mettere in evidenza queste speciali azioni elettrodinamiche di seconda specie.

E per quanto sulla effettiva esistenza dell' azione prevista non possa aversi alcun dubbio, il suo valore notevole dà un particolare interesse alla realizzazione dell' esperienza, poichè se ne può dedurre un metodo sensibile di misura della costante E del metallo, cioè del suo momento ionico differenziale.

Ma nella esecuzione si sono incontrate difficoltà non lievi. Occorreva invero rendere mobile tra le masse polari un sistema di due dischi di bismuto e d'un altro metallo (destinato a raccogliere la corrente periferica inviata nel centro del primo) e fare in modo che per i fili adduttori della corrente, meccanicamente solidali col sistema dei dischi, fossero trascurabili le azioni elettromagnetiche di prima specie o amperiane. Inoltre dovendo disporre il sistema dei dischi a 45° dalle linee di forza, il loro movimento viene fortemente ostacolato dalle correnti di Foucault che esercitano proprio in quella posizione la massima azione di freno.

Infine il sistema mobile tra le masse polari subisce da parte del campo un' azione orientatrice dovuta alle proprietà magnetiche del materiale impiegato; e perciò la forza antagonista che si oppone alla cercata coppia elettromagnetica non è solo la torsione del filo cui il sistema è sospeso. Non potendosi facilmente realizzare un sistema astatico per queste azioni magnetiche, ed essendo queste molto variabili nelle diverse posizioni del disco, le rotazioni elettromagnetiche vengono di molto ridotte, e il valore esatto della coppia non è facile a misurare.

7. — Per rimuovere tutte queste difficoltà ho proceduto nel modo seguente.

L'apparecchio della fig. 1 già descritto venne modificato sostituendo alla scatoletta di rame su cui è fissato il disco di bismuto una scatola di zinco di spessore più piccolo; e inoltre il fondo posteriore della scatola e l'anello periferico furono tagliati lungo un raggio e una generatrice, per attenuare le correnti di Foucault, che costituiscono come si è detto un grave ostacolo al movimento del sistema nel campo. Il tubo *t*, col filo interno connesso al centro del disco, venne piegato fino a ricondurlo nel piano della scatola lungo una direzione passante pel centro di quella. Così tutta la scatola poteva esser sospesa tra le masse polari; mentre in basso, e a notevole distanza da queste, i capi del tubo e del filo centrale costituiti da due fili di platino pescavano in due bicchierini contenenti mercurio pei quali si poteva mandare la corrente.

Le masse polari, del diametro di 10 cm., eran disposte a circa 5 cm. di distanza, cosicchè la scatola del diametro di 7 cm. poteva essere orientata fino a circa 40° dalle linee di forza.

In queste condizioni il campo nel grande spazio tra le masse polari non poteva rendersi superiore a 3000 unità.

Malgrado le cure impiegate nella costruzione della scatola, non si riuscì a ottenere che fossero assolutamente nulle le azioni elettromagnetiche di tipo amperiano; le quali si rivelavano col fatto che la rotazione del disco prodotta dalla corrente non restava assolutamente invariata invertendo il senso del campo. Ho trovato utile per facilitare la compensa-

zione dell'effetto di prima specie saldare un filo di rame tra due punti del tubo *t* ripiegato, nella parte in cui esso è disposto nel campo; il filo era così percorso da una piccola derivazione della corrente totale, ed era quindi soggetto a una forza amperiana da parte del campo, cosicchè dandogli per via di tentativi una forma opportuna si poteva ottenere che la deviazione restasse sensibilmente invariata in direzione e in valore invertendo il senso del campo; prendendo la media degli effetti osservati col campo diretto nei due sensi, la residua azione di prima specie poteva eliminarsi del tutto.

La forza orientatrice dovuta alle proprietà magnetiche del materiale impiegato, la quale era diversa nelle diverse posizioni della scatola, superava quella dovuta al filo di sospensione, anche quando questo, era costituito da un filo di ottone di 0,13 mm. di diametro e circa 5 cm. di lunghezza, che dava luogo a un momento di torsione di 4,3 dine-centimetro per grado. In questo caso le due coppie orientatrici erano però molto prossime.

Per valutare la coppia dovuta alla corrente fu quindi necessario confrontare la deviazione osservata con quella prodotta da una misurabile rotazione dell' estremo superiore del filo. Questo fu tarato determinando la durata di oscillazione di un corpo a esso sospeso e di cui era noto il momento d'inerzia.

8. Dal valore della coppia si passa facilmente a quello della costante E del metallo. Si ha infatti.

$$M = W \operatorname{sen} 2\alpha = \frac{1}{8\pi} E\, I\, S\, H^2 \operatorname{sen} 2\alpha$$

in cui I è l' intensità della corrente S la superficie del disco, H l' intensità del campo e α l' angolo formato dalla normale al disco con le linee di forza.

Nelle condizioni dell' esperienza si ebbe $M = 7{,}8$ dine-centimetro per $I = 0{,}02$ (unità elettromagnetiche),

$$S = 38 \text{ cm}^2.;\ H = 2400 \text{ e } \alpha = 18^\circ.$$

Se ne deduce

$$E = 7{,}2 \times 10^{-5}.$$

Si riconobbe inoltre che mentre il metodo della coppia richiede grandi precauzioni, esso è sempre molto vantaggioso poichè l' effetto osservabile è d' un ordine di grandezza assai rilevante. Cosicchè non appare improbabile che si riesca a constatare e misurare la coppia anche con altri metalli, come il rame e l'argento, pei quali il valore di E dovrebbe essere da 100 a 200 volte minore.

IV. — Forza elettromotrice radiale creata in un disco metallico da un campo variabile.

9. — Come abbiamo visto un disco metallico, percorso da corrente radiale, si trasforma per azione del campo in una speciale lamina magnetica, normale al campo medesimo. Il disco, percorso da corrente radiale produce cioè una lieve alterazione del campo preesistente; si può allora prevedere che reciprocamente la creazione del campo deve far nascere nel disco una f. e. m. radiale qualora si rileghino metallicamente il centro e la periferia.

Effettivamente, disponendo tra i poli dell' elettromagnete il disco di bismuto, come nella fig. 1, e rilegando il centro f e il tubo periferico t a un galvanometro, si constata la produzione d' una corrente indotta alla eccitazione del campo, e d' una corrente inversa alla sua diseccitazione. La corrente indotta ha il *medesimo* senso alla chiusura del campo, qualunque sia la direzione di questo; si ha in ciò una differenza caratteristica coi fenomeni ordinari d' induzione.

Questo fenomeno può essere interpretato come un vero effetto di Hall subito dalle correnti di Foucault circolari che si generano nel disco per la variazione del campo; vi deve corrispondere in vero, per l' effetto Hall, una f. e. m. normale alle linee di corrente, e perciò diretta radialmente. La forma delle correnti resterà la primitiva, cioè la circolare, finchè per mezzo del circuito esterno non sia stabilita la comunicazione tra il centro e la periferia del disco.

La previsione teorica delle leggi del fenomeno riesce però molto complicata, qualora esse si vogliano dedurre dall'integrazione, lungo il raggio, delle diverse f. e. m. di Hall,

poichè già il calcolo delle correnti di Foucault presenta notevoli difficoltà quando si tenga conto del loro ritardo sulle variazioni del flusso *esterno*. Si aggiunga che il coefficiente di Hall si suol prevedere e misurare pel regime permanente, quando cioè si son rese stabili le differenze di temperatura tra i bordi della lamina dovute alla condensazione degli ioni (effetto trasversale termico per corrente longitudinale elettrica); mentre nel caso attuale è da ritenere che il processo si svolga a temperatura sensibilmente costante.

10. Ci converrà invece connettere le deviazioni osservate a quelle proprie dell'effetto elettromagnetico, partendo dall'espressione della energia W posseduta dal disco percorso da una corrente radiale nel campo esterno, e applicando i procedimenti comunemente usati per dedurre le leggi dell'induzione dall'elettromagnetismo. Converrà tener presente che, come nel caso del bismuto, E può anche essere dipendente da H.

Durante il periodo variabile di chiusura del campo, entro un tempo dt, sia I la corrente indotta, e la f. e. m. relativa e dW la variazione dell'energia W.

Sarà

$$dW = e\,I\,dt = -\frac{1}{8\pi}\,S\,I\,d(E\,H^2)$$

e perciò

$$e = -\frac{1}{8\pi}\,S\,\frac{d(E\,H^2)}{dt}.$$

Detta ρ la resistenza del circuito totale che rilega il centro alla periferia del disco, la quantità di elettricità Q raccolta, tra i valori estremi O e H del campo, nell'eccitazione di questo, sarà dunque

$$Q = \frac{1}{8\pi\rho}\,S\,E_H\,H^2 \tag{5}$$

nella quale E_H indica il valore finale di E, quando il campo è H.

L'effetto induttivo sarà, perciò indipendente dal segno di H, e il galvanometro darà deviazioni eguali e nel medesimo senso alla chiusura del campo, qualunque sia la dire-

zione di questo. L'esperienza conferma, come si è visto, questa previsione.

Se il disco fosse sottoposto ad un campo alternativo, l'espressione $E_H H^2$ della (5) riprenderebbe periodicamente gli stessi valori, e al passaggio per zero si avrebbe sempre $Q = 0$; il circuito esterno sarebbe percorso perciò da correnti alternate, con trasporto di quantità d'elettricità eguali nei due sensi.

La formola (5) si presta a una determinazione immediata del momento ionico differenziale E. Basta allo scopo tarare il galvanometro per quantità di elettricità, e misurare il campo e la superficie della lamina. Ho ottenuto in tal modo per la lamina di bismuto che mi è servita nelle esperienze del § 2 :

H	3700	6100	7250	8100	8650
$E \times 10^5$	15,4	9,8	9,1	8,8	8,6

Si ritrova così la stessa diminuzione di E al crescere del campo già osservata con l'azione elettromagnetica.

L'ordine di grandezza relativo ai diversi metalli del fenomeno induttivo è proporzionale al momento ionico differenziale, come per l'effetto elettromagnetico, e perciò, in prima approssimazione, dipende dal prodotto $R\sigma$ del coefficiente di Hall per la conducibilità del metallo; prodotto che varia pei diversi metalli molto meno di R.

Malgrado ciò, poichè l'azione costatata nel bismuto è piuttosto piccola, (un galvanometro Hartmann e Braun a telaio mobile, di 4 ohm di resistenza, subiva alla chiusura del campo una deviazione massima di circa 100 divisioni della scala), si può prevedere che l'effetto sarà constatabile nettamente, senza cure speciali, solo per pochi altri metalli, quali l'antimonio, il tellurio e forse anche il ferro. Finora son riuscito a metterlo in evidenza con l'antimonio e col ferro.

11. Dell'effetto induttivo osservato può darsi ancora una interpretazione più sintetica e suggestiva. Gli ioni del disco metallico moventisi in tutti i sensi come le molecole d'un gas, si trovan sottoposti per effetto del campo magnetico supposto *crescente*, a una forza elettrica, dovuta alla variazione del campo, che tende a trascinarli *prevalentemente* lungo un

cerchio concentrico al disco, e a una forza elettromagnetica, dovuta al valore attuale del campo, perpendicolare al moto, e perciò agente *con prevalenza* nel senso radiale; quest' ultimo moto sarà, centripeto, com' è facile riconoscere, per entrambi gli ioni, se il campo è crescente, centrifugo nel caso opposto. A causa della loro ineguale mobilità questa forza radiale è diversa per le due specie di ioni; essi si accumuleranno perciò in diversa misura al centro o alla periferia opponendosi al nuovo arrivo di altri dello stesso segno qualora il circuito esterno sia aperto e non ne permetta l' uscita. L' esperienza descritta può quindi considerarsi come una vera centrifugazione magnetica degli ioni.

V. — Rotazione nel campo magnetico di un disco di bismuto percorso radialmente da un flusso di calore.

12. — Un disco di bismuto è sospeso tra le facce polari d'un elettromagnete, a 45° dalle linee di forza, per mezzo di un filo che compensa con la sua torsione la tendenza orientatrice dovuta al diamagnetismo del disco.

Inviando *nel centro* di questo un sottile fascio di luce, che lo riscaldi anche lievemente, si constata l'esistenza d'una energica coppia che tende ad annullare l' orientazione diamagnetica, e a disporlo perciò parallelamente alle linee di forza. L' azione non s' inverte invertendo il senso del campo; cambia invece di segno se del disco si scalda con un fascio di luce anulare, o altrimenti, la periferia. La coppia è massima a 45° dalle linee di forza, e può allora raggiungere un valore rilevante, così da annullare la forte tendenza orientatrice dovuta al diamagnetismo, specialmente se il disco è un poco affumicato.

13. — La teoria elettronica dei metalli ci rende conto facilmente dell' effetto osservato.

Secondo il Drude la conduzione del calore nei metalli avviene con un doppio meccanismo. Da un canto si produce nel metallo tra le parti calde e le fredde uno scambio continuo di ioni, che ha per effetto di eguagliare le temperature convettivamente come nei gas, in modo cioè che un numero

eguale di ioni traversa un piano qualsiasi nei due sensi. A questo trasporto di calore non è connessa perciò alcuna manifestazione elettrica.

Contemporaneamente avrebbe origine una differenza nella concentrazione degli ioni tra i punti in cui la temperatura è differente, poichè in quasi tutti i metalli il numero di ioni per centimetro cubo è funzione della temperatura. Ne segue una vera migrazione di ioni in un senso determinato, e se il corpo è isolato, nascono in esso delle forze elettriche capaci di arrestare un'ulteriore diffusione degli ioni. A questa migrazione sarebbero dovute le deviazioni dalla legge di Wiedemann e Franz e l'effetto Thomson; ad essa pure è dovuta la rotazione sopra riferita del disco di bismuto nel campo.

14. — Supponiamo che il disco sia percorso, in un campo ad esso normale, da un flusso di calore centrifugo radiale. Dimostreremo che il disco deve equivalere a una particolare lamina magnetica con senso di circuitazione opposto a quello della corrente magnetizzante. Notiamo anzitutto che la distribuzione delle temperature ed eventualmente del campo elettrico nel disco continuerà per ragioni di simmetria, a essere circolare. E perciò il gradiente di temperatura e la forza elettrica saranno in ogni punto radiali.

Al gradiente termico nel senso $d\,r$ eguale a $\frac{d\,\mathrm{T}}{d\,r}$, negativo, corrisponde per la teoria di Drude, un flusso di ioni positivi con la velocità $-t_1 \frac{d\,\mathrm{T}}{d\,r}$, essendo

$$t_1 = p\, y_1\, x_1 \tag{6}$$

nella quale p è una costante universale, $y_1 = e\, v_1$ il prodotto della carica e dell'ione per la velocità ch'esso acquista sotto la forza 1, e x_1 la variazione relativa con la temperatura del numero N_1 di ioni per centimetro cubo:

$$x_1 = \frac{1}{\mathrm{N}_1} \frac{d\,\mathrm{N}_1}{d\,\mathrm{T}} = \frac{d \log \mathrm{N}_1}{d\,\mathrm{T}}.$$

Consideriamo, in un punto del disco, alla distanza r dal centro, la componente radiale $\frac{dr}{dt}$ e la componente circolare $r\frac{d\vartheta}{dt}$ della velocità, e supponiamo che la corrente magnetizzante circoli nel senso di ϑ crescente. Ponendo $Hev_1 = m_1$ avremo

$$r\frac{d\vartheta}{dt} = -m_1\frac{dr}{dt}. \tag{7}$$

Detta E la forza elettrica radiale che prende origine per l'accumulo disuguale di ioni, e computandola positivamente nel senso centrifugo, sarà inoltre

$$\frac{dr}{dt} = y_1 E - t_1\frac{dT}{dr} + m_1 r\frac{d\vartheta}{dt}. \tag{8}$$

La (7) ci dice che la traiettoria degli ioni è la stessa spirale

$$r = r_1 e^{-\frac{\vartheta}{m_1}}$$

già trovata per un flusso radiale *elettrico*. La differenza di segno nell'esponente, rispetto alla formola (3), è dovuta a ciò che la corrente magnetizzante si è supposta adesso nel senso di ϑ crescente.

La (8), combinata con la (7) ci dà poi

$$(1 + m_1^2)\frac{dr}{dt} = y_1 E - t_1\frac{dT}{dr}.$$

Trascurando, in prima approssimazione, m_1^2 di fronte all'unità, la densità della corrente radiale trasportata dagli ioni positivi sarà perciò

$$I_{1,r} = N_1 e\frac{dr}{dt} = N_1 e\left(y_1 E - t_1\frac{dT}{dr}\right).$$

Per gli ioni negativi si trova egualmente

$$I_{2,r} = -N_2 e \frac{dr}{dt} = -N_2 e \left(-y_2 E - t_2 \frac{dT}{dr}\right).$$

Ma essendo il disco isolato, dev' essere

$$I_{1,r} + I_{2,r} = 0$$

e perciò

$$N_1 \left(y_1 E - t_1 \frac{dT}{dr}\right) = -N_2 \left(y_2 E + t_2 \frac{dT}{dr}\right) \tag{9}$$

dalla quale si ricava il valore della forza elettrica:

$$E = \frac{N_1 t_1 - N_2 t_2}{N_1 y_1 + N_2 y_2} \frac{dT}{dr}. \tag{10}$$

Analogamente, ponendo per gli ioni negativi $m_2 = e v_2 H$ si ottiene per la densità delle correnti *circolari* trasportate dagli ioni positivi e negativi

$$I_{1,c} = N_1 e r \frac{d\vartheta}{dt} = -m_1 I_{1,r}$$

$$I_{2,c} = -N_2 e r \frac{d\vartheta}{dt} = m_2 I_{2,r}.$$

A questo flusso circolare di cariche corrisponderà un' azione magnetica equivalente a quella prodotta da una corrente complessiva i; e questa, per la (9) sarà data da

$$i = I_{1,c} + I_{2,c} = -e(m_1 + m_2) N_1 \left(y_1 E - t_1 \frac{dT}{dr}\right).$$

Tenendo presente la (10), e la (6) questa diviene

$$i = p e N_1 y_1 N_2 y_2 \frac{x_1 + x_2}{N_1 y_1 + N_2 y_2} (y_1 + y_2) \frac{dT}{dr} H$$

o anche essendo

$$\sigma_1 = e\, N_1\, y_1$$

e

$$\sigma_2 = e\, N_2\, y_2$$

i contributi delle due specie di ioni alla conducibilità elettrica totale

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

si potrà scrivere

$$(11) \qquad i = p\, \frac{\sigma_1\, \sigma_2}{\sigma} (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) \frac{d\mathrm{T}}{dr} \mathrm{H}.$$

Ma se si indica con Q la quantità totale di calore che fluisce nel disco, si avrà, computandola positivamente nel senso centrifugo,

$$\mathrm{Q} = -k \,.\, 2\,\pi\, r\, \frac{d\mathrm{T}}{dr}$$

ove con k è indicata la conducibilità termica della sostanza.

Sarà perciò

$$-\frac{d\mathrm{T}}{dr} = \frac{1}{k} \frac{\mathrm{Q}}{2\,\pi\, r}\,.$$

Sostituendo nella (11) avremo dunque

$$i = -p\, \frac{1}{2\,\pi\, r} \frac{\sigma_1\, \sigma_2}{k\, \sigma} (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)\, \mathrm{Q}\, \mathrm{H}$$

e perciò, ponendo

$$(12) \qquad \mathrm{U} = p\, \frac{\sigma_1\, \sigma_2}{k\, \sigma} (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$$

il disco eserciterà un' azione elettromagnetica equivalente a quella d' un sistema di correnti circolari di densità

$$(13) \qquad i = -\frac{1}{2\,\pi\, r} \mathrm{U}\, \mathrm{Q}\, \mathrm{H}$$

e l' azione stessa sarà, per date dimensioni del disco, proporzionale al coefficiente U caratteristico della sostanza, al flusso di calore Q e al campo H. Poichè $x_1 + x_2$, secondo la teoria, è una funzione della temperatura che ha lo stesso valore per tutti i metalli, e da quanto è noto essa ha un valore positivo, e poichè le altre grandezze che compariscono nella espressione di U sono essenzialmente positive, ne risulta che i ha un senso opposto a quello di circuitazione della corrente magnetizzante.

15. — Il disco per le sue proprietà elettromagnetiche, possiederà un' energia di posizione nel campo; per un anellino $2\pi r \times dr$ essa è data da

$$d\,W = \frac{1}{4\pi r}\,U\,Q\,H\,dr \times \pi r^2 H\,.$$

L' energia totale sarà

$$W = \frac{1}{8\pi}\,U\,Q\,S\,H^2$$

ove S indica la superficie totale attiva del disco.

Ma se la normale al disco fra un angolo α con le linee di forza, l' energia sarà

$$W' = W \cos^2 \alpha\,.$$

Si eserciterà perciò sul disco una coppia di momento

$$M = -\frac{d\,W'}{d\,\alpha} = W \operatorname{sen} 2\,\alpha$$

e per $\alpha = 45^0$

$$M = \frac{1}{8\pi}\,U\,Q\,S\,H^2\,.$$

La coppia sarà perciò proporzionale al quadrato del campo H, al flusso calorifico Q, alla superficie del disco S, e dipenderà dal coefficiente U caratteristico del metallo.

Deducendo dall'esperienza il valore di U si viene così a possedere una nuova relazione indipendente dalle altre già

note per la determinazione delle costanti caratteristiche di Drude. E come si vede dalla (12) il coefficiente non ha niente da fare col coefficiente

$$Q = -\frac{p}{\sigma}(\sigma_1 x_1 y_2 + \sigma_2 x_2 y_1)$$

del fenomeno trasversale termomagnetico (effetto elettrico) di Ettingshausen e Nernst, come potrebbe sembrare a prima vista.

Osserveremo invece che si può porre la (12) sotto la forma:

$$U = p\,\frac{\sigma}{k} \times \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma^2}(x_1 + x_2) \times \frac{y_1 + y_2}{\sigma} \times \sigma$$

or il primo fattore varia di poco per i diversi metalli; il secondo fattore è proporzionale a queste variazioni, cioè alle deviazioni dalla legge di Wiedemann e Franz e il terzo al coefficiente P del fenomeno galvanomagnetico (effetto termico) di Ettingshausen, cioè alla differenza di temperatura trasversale che acquista una lamina percorsa nel campo da una corrente elettrica.

Cosicchè la coppia constatata nelle presenti esperienze dipende dal prodotto dello scarto dalla legge di Wiedemann e Franz, del coefficiente P e della conducibilità σ del metallo.

Purtroppo questi tre elementi si conoscono solo per pochi metalli, e anche in modo poco sicuro; essi sono riferiti nella seguente tabella, nella quale la prima colonna dà i valori delle deviazioni D dalla legge di Wiedemann e Franz, la seconda il coefficiente P, la terza la conducibilità σ riferita all' argento, la quarta il loro prodotto Π in unità arbitrarie da cui dovrebbe dipendere U.

	D. 10³	P. 10⁶	σ	Π
Ag	0	—	60	0
Cu	22	—	56	0
Costant.	468	—		0
Ni	16	0,2	7,4	2,4
Fe	140	0,06	8	67
Carbone	?	5		?
Sh	300	2	1,5	900
Bi	308	50	0,8	12300

Come si vede la coppia si potrebbe manifestare solo col bismuto e con l' antimonio, e forse anche col carbone.

In realtà, servendomi della semplice disposizione indicata, non ho ottenuto alcun risultato con dischi di alluminio, di argento e di rame; mentre l' azione è ancora rilevantissima con l' antimonio.

Roma, Istituto Fisico della R. Università.

SUL PROBLEMA DELL'INDUZIONE MAGNETICA DI UN ELLISSOIDE A TRE ASSI.

NOTA DI E. DANIELE.

È noto come un ellissoide di ferro dolce, portato in un campo magnetico costante, si magnetizzi uniformemente; e come la funzione potenziale Q del magnetismo indotto sia esprimibile mediante il potenziale Ω di una massa, che riempia l'ellissoide colla densità *uno*, colla formola

$$Q = -\left(\alpha \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \beta \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \Omega}{\partial z}\right),$$

dove α β γ indicano i momenti magnetici (costanti).

Questa formola si può fare rientrare come caso particolare in un'altra che risolve il problema dell'induzione magnetica per l'ellissoide, nell'ipotesi che la funzione potenziale del campo inducente assuma in superficie i valori di un polinomio assegnato nelle coordinate di grado qualunque. La soluzione del problema si ottiene ricorrendo alle *ellissoidali armoniche* studiate dal Morera [1]), fra le quali sono da annoverarsi appunto le derivate prime di Ω. In poche parole, si può dire che la funzione Q, nel caso più generale accennato, si trova costruendo, coll'aiuto delle funzioni di Morera, la funzione armonica nell'interno ed all'esterno dell'ellissoide, che su di esso si riduce ad un polinomio dello stesso grado

[1]) Veggasi più specialmente la Memoria « Sulla attrazione degli ellissoidi e sulle armoniche ellissoidali di 2ª specie »; *Acc. d. Sc. di Torino*, 1904-05. In una Nota recente [« Sulle funzioni armoniche ellissoidali »; *Rend. Circ. Mat. Pal.*, t. 31 (1911)] il Prof. Somigliana espone succintamente le proprietà fondamentali delle ellissoidali armoniche con metodo più semplice e diretto di quanto abbia fatto il Morera.

di quello assegnato. La forma della Q cercata è quindi espressa dalla nostra formola (7), cioè dall'insieme delle formole (IX) e (X) della memoria citata di Morera, ove i coefficienti α s'intendano legati dalle relazioni che assicurano l'armonicità di Q all'interno: queste relazioni sono compendiate nella formola in fondo a pag. 24 della memoria di Morera.

Riguardo alla Q si può dire, fra l'altro, che si riduce, entro l'ellissoide, ad un polinomio dello stesso grado di quello col quale coincide, in superficie, la funzione potenziale del magnetismo inducente.

Ho mostrato nei primi sei numeri di questa Nota come le condizioni, a cui risulta sottoposta la funzione potenziale del magnetismo indotto, conducano alla determinazione completa dei coefficienti β nella (7); per riprova ho poi esposto in dettaglio nel n. 7 come si svolgano i calcoli nel caso particolare che la funzione data in superficie sia del 2° grado ed omogenea.

Una soluzione del problema attuale si trova già, in sostanza, in una Nota di G. Giuliani [« Sopra un problema di induzione magnetica; *N. Cimento*, 1882]. Colle funzioni di Morera la soluzione acquista però una forma notevolmente più semplice ed elegante.

1. Sia φ la funzione potenziale del magnetismo inducente, e supponiamo che per tutti i punti della superficie

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{1}$$

che chiameremo Σ, coincida coi valori che ivi assume un polinomio P nelle x y z, di un certo grado m. Poichè φ dev'essere armonica in tutto l'interno di Σ, dovrà ridursi, entro Σ, ad un polinomio, dello stesso grado m, i cui coefficienti è facile calcolare. Noi porremo, in un punto qualunque interno a Σ:

$$\varphi_i = P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_m,$$

ove $P_0 P_1 \dots P_m$ indicano dei polinomii omogenei di grado $0,1,\dots, m$ risp.; ed i coefficienti di $P_2 \dots P_m$ soddisferanno

a quelle relazioni per cui riesce armonico ciascuno di questi polinomii.

Chiamando n la normale interna a Σ, si vede facilmente qual'è la forma di $\frac{d\varphi_i}{dn}$. Se p indica la distanza (in valore assoluto) del centro dell'ellissoide dal pian tangente nel punto $(x\ y\ z)$, si ha:

$$\frac{dx}{dn} = -\frac{p\,x}{a^2}, \quad \frac{dy}{dn} = -\frac{p\,y}{b^2}, \quad \frac{dz}{dn} = -\frac{p\,z}{c^2};$$

per modo che se $\lambda\ \mu\ \nu$ sono tre interi qualunque, si ha:

$$\frac{d}{dn}(x^\lambda\, y^\mu\, z^\nu) = -p\left(\frac{\lambda}{a^2} + \frac{\mu}{b^2} + \frac{\nu}{c^2}\right) x^\lambda\, y^\mu\, z^\nu,$$

e quindi $\frac{d\varphi_i}{dn}$ è della forma (essendo $\frac{dP_0}{dn} = 0$):

$$\frac{d\varphi_i}{dn} = (P'_1 + P'_2 + \ldots. + P'_m)\,p,$$

dove $P'_1 \ldots. P'_m$ sono ancora dei polimonii omogenei dei gradi indicati dagli indici.

2. Si consideri ora la funzione

$$u_m = \sum_{\lambda\mu\nu} \alpha_{\lambda\mu\nu} \frac{\partial^m U_m}{\partial x^\lambda\, \partial y^\mu\, \partial z^\nu} \tag{2}$$

$$(\lambda + \mu + \nu = m),$$

ove le α siano delle costanti, e si ponga:

$$U_m = \int_0^\infty (N-1)^m \frac{ds}{R(s)} \tag{2'}$$

$$N = \frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s} + \frac{z^2}{c^2+s}$$

$$R(s) = \sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}.$$

U_m è un polinomio di grado $2m$ nelle $x\ y\ z$, quindi u_m è di grado m, ed allora, per ciò che s' è visto nel n.° precedente, $\frac{d u_m}{d n}$ sarà il prodotto di un polinomio di grado m per p.

Se adunque poniamo

$$(3)\quad Q_i = u_1 + u_2 + \dots + u_m + (N_0 - 1)(\Pi_0 + \Pi_1 + \dots + \Pi_{m-2}),$$

dove $\Pi_0 \dots \Pi_{m-2}$ stanno ad indicare dei polinomii omogenei, e $N_0 = N\,(s = 0)$; possiamo concludere che $\frac{d Q_i}{d n}$ è un polinomio di grado m nelle $x\ y\ z$ moltiplicato per p.

Contiamo quante sono le costanti α ed i coefficienti dei polimonii Π che entrano complessivamente in Q_i. Poichè una forma ternaria di grado r contiene $\frac{(r+1)(r+2)}{2}$ termini, il numero totale di quelle costanti è

$$C = 1 + 2\left(3 + 6 + \dots + \frac{m(m-1)}{2}\right) + \\ + \frac{m(m+1)}{2} + \frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

3. Facciamo la posizione

$$(4')\qquad V_m = \int_\sigma^\infty (N-1)^m \frac{ds}{R(s)},$$

dove s' intenda per σ la maggior radice dell' equazione in s

$$N - 1 = 0;$$

e indichiamo con v_m la funzione

$$(4)\qquad v_m = \sum_{\lambda\mu\nu} \alpha_{\lambda\mu\nu} \frac{\partial^m V_m}{\partial x^\lambda\, \partial y^\mu\, \partial z^\nu}$$

$$(\lambda + \mu + \nu = m),$$

nella quale le α siano gli stessi coefficienti con cui si è formata la funzione u_m del n.° precedente: V_m e v_m non sono più polinomii com'erano U_m e u_m. Vogliamo calcolare, in un

punto di Σ, la derivata, rispetto alla normale *esterna* n', di v_m. Osserveremo perciò che è

$$\frac{d\sigma}{dn'} = 2p\,,$$

ed allora si trova: [1])

$$\frac{d v_m}{d n'} = -\frac{d u_m}{d n} - \frac{2p}{abc} \Sigma\, \alpha_{\lambda\mu\nu} \frac{\partial^m (N_0 - 1)^m}{\partial x^\lambda\, \partial y^\mu\, \partial z^\nu}$$

$$(\lambda + \mu + \nu = m)\,.$$

Mediante le v si formi la funzione

$$Q_e = v_1 + v_2 + \ldots + v_m\,; \tag{5}$$

la sua derivata rispetto a n', calcolata in un punto di Σ, sarà

$$\frac{d Q_e}{d n'} = \sum_r \frac{d v_r}{d n'} = -\sum_r \frac{d u_r}{d n} - \frac{2p}{abc} \sum_{\lambda\mu\nu} \alpha_{\lambda\mu\nu} \frac{\partial^r (N_0 - 1)r}{\partial x^\lambda\, \partial y^\mu\, \partial z^\nu}$$

$$(\lambda + \mu + \nu = r\,; \qquad r = 1,2,\ldots,m)\,.$$

Ne segue che anche $\frac{d Q_e}{d n'}$ è il prodotto di p per un polinomio di grado m nelle $x\,y\,z$.

4. Consideriamo la funzione $Q(x\,y\,z)$ che è rappresentata, in tutto l'interno di Σ, dalla Q_i, ed all'esterno da Q_e. La Q è continua attraverso Σ, poichè ivi s'annullano $N_0 - 1$ e σ; inoltre all'esterno è armonica ed all'infinito si annulla dell'ordine di $\frac{1}{\rho^2}$ almeno (essendo ρ la distanza di un punto generico dello spazio da un punto fisso [2]), mentre nell'interno di Σ si riduce ad un polinomio. Noi faremo in modo che risulti armonica anche nell'interno di Σ; basterà perciò imaginare Q_i come somma di $m+1$ polinomii omogenei dei gradi risp. $0, 1, 2, \ldots, m$, e ad ognuno di questi polinomii

[1]) Cfr. Morera: Mem. cit., § 7.

[2]) Basta pensare che V_m si annulla all'infinito come $\frac{1}{\rho}$.

imporre le condizioni occorrenti affinchè riesca armonico: ne risultano così, fra le α ed i coefficienti che entrano in $\Pi_0\, \Pi_1 \ldots \Pi_{m-2}$,

$$C' = 1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{m(m-1)}{2}$$

condizioni.

5. Supponiamo ora che l'ellissoide Σ di equazione (1), sia riempito di una materia magnetizzabile, omogenea ed isotropa, e si trovi sotto l'influenza di un campo magnetico noto, la cui funzione potenziale sia la φ del n.° 1.

Sia ψ la funzione potenziale del magnetismo indotto su Σ, e sia k il coefficiente di magnetizzazione. La funzione ψ dev'essere: armonica entro Σ e fuori di Σ, — nulla all'infinito come una funzione potenziale, — continua attraverso Σ; — inoltre deve soddisfare su Σ alla nota condizione:

$$(6) \qquad (1 + 4\pi k)\frac{d\psi_i}{dn} + \frac{d\psi_e}{dn} = -4\pi k \frac{d\varphi_i}{dn}\,.$$

Di queste quattro condizioni le prime tre sono soddisfatte senz'altro quando si assuma per ψ la funzione Q che abbiamo costruito dianzi: s'intende, coi coefficienti legati dalle C' relazioni che la rendono armonica entro Σ. Vogliamo far vedere che l'ultima condizione, cioè la (6), fornisce inoltre fra i C coefficienti di Q tante relazioni quante occorrono per determinarli completamente.

Se difatti ricordiamo quanto s'è detto nei n.ⁱ 1, 2, 3 circa la forma di $\frac{d\varphi_i}{dn}$, $\frac{dQ_i}{dn}$, $\frac{dQ_e}{dn}$, riconosciamo subito che la (6), quando si sopprima il fattore p comune ai due membri, diventa una eguaglianza fra due polinomii in $x\ y\ z$ di grado m. I coefficienti del secondo membro son tutti noti; quelli del primo sono formati linearmente mediante le α ed i coefficienti dei polinomii Π, che sono appunto le nostre C incognite. Poichè la (6) dev'essere soddisfatta identicamente, queste ultime vengono legate da un sistema di equazioni lineari non omogenee, che sono tante quanti sono i termini di

un polinomio in $x\ y\ z$ di grado m, cioè, notando che nei due membri della (6) non vi è termine noto:

$$3 + 6 + 10 + \ldots . + \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

Se accanto a queste equazioni si scrivono le C' del n. 4, che sono lineari ed omogenee, il sistema complessivo che ne risulta comprende precisamente C equazioni, tante quante sono le incognite.

Resta da dimostrare che questo sistema ha il determinante dei coefficienti diverso da zero.

6. Chiamando (S) questo sistema di equazioni, e Δ il determinante dei suoi coefficienti, supponiamo $\Delta = 0$. Da questa ipotesi segue che se nelle equazioni del sistema (S) leggiamo zero in luogo dei termini noti, il sistema (S_0) che ne risulta fornisce per le incognite dei valori non tutti nulli. Ciò significa che se noi supponiamo nella (6) φ_i identicamente nulla, è ugualmente possibile verificare quella condizione (e tutte le precedenti) con una funzione ψ non identicamente nulla. Il che, per essere $1 + 4\pi k > 0$, è notoriamente assurdo; è dunque assurdo supporre $\Delta = 0$.

Si conclude che la funzione Q da noi definita è determinata completamente ed in modo unico dalle condizioni che le vengono imposte. Essa ci dà per conseguenza la soluzione del problema dell' induzione magnetica dell' ellissoide limitato dalla superficie Σ, quando la funzione potenziale del magnetismo inducente si riduca, su Σ, ad un polinomio di grado m. Dal modo di formazione di Q_i, come appare dal n°. 2, si vede poi che la Q è, in tutto l'interno di Σ, un polinomio di grado m.

La Q conserverà pure questa forma nei punti di Σ; ma allora, essendo funzione armonica all' esterno ed all' interno di Σ, deve potersi esprimere coll' unica formola

$$(7) \qquad Q = \sum_{\lambda\mu\nu} \rho_{\lambda\mu\nu} \frac{\partial^r}{\partial x^\lambda \ \partial y^\mu \ \partial z_\nu} \int_\sigma^\infty (N-1)^r \frac{ds}{R(s)},$$

$$(\lambda + \mu + \nu = r; \qquad r = 0, 1, 2, \ldots, m),$$

nella quale σ va posto eguale a zero quando Q si riferisce ad un punto interno a Σ. La cosa è dimostrata diffusamente nella memoria di Morera: i coefficienti β si compongono linearmente mediante le α con cui abbiamo costruito le Q_i e Q_e, e mediante i coefficienti che entrano nei polinomii Π; il calcolo delle β si riduce a risolvere un sistema di equazioni di 1° grado.

La (7) comprende come caso particolare la formola notissima che risolve il problema della magnetizzazione uniforme dell' ellissoide sotto l' influenza di un campo costante.

7. Mostreremo in quest' ultimo n.° come si svolga il calcolo nel caso particolare in cui φ coincida su Σ con un polinomio omogeneo di 2° grado.

Posto che si abbia su Σ

$$\varphi = \xi_{11}\, x^2 + \xi_{22}\, y^2 + , \dots + 2\, \xi_{23}\, y\, z\,,$$

si comincierà col costruire φ_i scrivendo:

$$\varphi_i = \xi_{11}\, x^2 + \dots + 2\, \xi_{23}\, y\, z + \xi\, (N_0 - 1)\,,$$

e determinando la costante ξ colla condizione

$$\Delta^2 \varphi_i = 2\, (\xi_{11} + \xi_{22} + \xi_{33}) + 2\, \xi \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = 0\,.$$

Allora φ_i prende la forma

$$\varphi_i = \eta_{11}\, x^2 + \dots + 2\, \eta_{23}\, y\, z + \eta_0\,, \tag{8}$$

dove le η sono costanti, e son legate dalla relazione identica

$$\eta_{11} + \eta_{22} + \eta_{33} = 0\,. \tag{9}$$

Dalla (8) si ricava:

$$\frac{d\, \varphi_i}{d\, n} = -2\, p \left[\frac{\eta_{11}\, x^2}{a^2} + \frac{\eta_{22}\, y^2}{b^2} + \frac{\eta_{33}\, z^2}{c^2} + \right. \tag{10}$$

$$\left. + 2\, \eta_{12} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) x\, y + 2\, \eta_{13} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right) x\, z + 2\, \eta_{23} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) y\, z \right].$$

Per trovare la Q nella sua forma definitiva (7) possiamo anche fare a meno di passare attraverso alla forma (3) di Q_i. Poniamo addirittura:

$$Q = \alpha_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \alpha_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \dots + \alpha_{23} \frac{\partial^2 W}{\partial y \, \partial z},$$

dove W rappresenti U_2 oppure V_2 [v. le formole (2') e (4')] secondochè Q sta ad indicare Q_i oppure Q_e.

Si ha allora, p. es.:

$$\frac{d}{dn} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -8p\left(3 A_{11} \frac{x^2}{a^2} + A_{12} \frac{y^2}{b^2} + A_{13} \frac{z^2}{c^2}\right)$$

$$\frac{d}{dn} \frac{\partial^2 W}{\partial x \, \partial y} = -8p A_{12} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) x y,$$

indicando con A_{ij} sei integrali di cui due sono

$$A_{11} = \int_0^\infty \frac{1}{(a^2+s)^2} \frac{ds}{R}, \qquad A_{12} = \int_0^\infty \frac{1}{(a^2+s)(b^2+s)} \frac{ds}{R};$$

e d'altra parte:

$$\frac{d}{dn'} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -\frac{d}{dn} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - 16p \frac{x^2}{a^5 b c}$$

$$\frac{d}{dn'} \frac{\partial^2 W}{\partial x \, \partial y} = -\frac{d}{dn} \frac{\partial^2 W}{\partial x \, \partial y} - 16p \frac{x y}{a^3 b^3 c}.$$

Sostituendo nella (6), si ottengono per le α le seguenti sei equazioni:

$$(11) \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{1}{a^3 b c} + 6\pi k A_{11}\right)\alpha_{11} + 2\pi k A_{12} \alpha_{22} + 2\pi k A_{13} \alpha_{33} = -\frac{\pi k}{2} \eta_{11} \\ &2\pi k A_{12} \alpha_{11} + \left(\frac{1}{a b^3 c} + 6\pi k A_{22}\right)\alpha_{22} + 2\pi k A_{23} \alpha_{33} = -\frac{\pi k}{2} \eta_{22} \\ &2\pi k A_{13} \alpha_{11} + 2\pi k A_{23} \alpha_{22} + \left(\frac{1}{a b c^3} + 6\pi k A_{33}\right)\alpha_{33} = -\frac{\pi k}{2} \eta_{33} \end{aligned} \right.$$

$$(11') \quad \left\{\frac{1}{a^3 b^3 c} + 2\pi k \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\right\} \alpha_{12} = -\pi k \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \eta_{12}$$

con due analoghe.

Le ultime tre danno senz' altro $\alpha_{12}\ \alpha_{13}\ \alpha_{23}$. Quanto ad $\alpha_{11}\ \alpha_{22}\ \alpha_{33}$, si ottengono risolvendo le (11); ed è evidente che il determinante dei coefficienti è diverso da zero, perchè è un polinomio di 3° grado in k, e siccome k non ha alcuna relazione coi semiassi dell' ellissoide, così quel polinomio non può annullarsi se non a condizione che s' annullino separatamente i suoi coefficienti: ora basta osservare che il termine noto è $\frac{1}{a^5\, b^5\, c^5}$, e quindi indubbiamente diverso da zero.

Oltre che alle (11) e (11') le α debbono ancora soddisfare alla relazione [1]):

$$\frac{\alpha_{11}}{a^2} + \frac{\alpha_{22}}{b^2} + \frac{\alpha_{33}}{c^2} = 0\,, \tag{12}$$

la quale esprime che la Q è armonica anche nell' interno di Σ. Ora si vede subito che la (12) è una conseguenza dalle (11). Difatti sommando le (11) membro a membro, col tener presente la (9), si trova:

$$\begin{aligned}(13)\qquad \frac{1}{a\,b\,c}\left(\frac{\alpha_{11}}{a_2} + \frac{\alpha_{22}}{b^2} + \frac{\alpha_{33}}{c^2}\right) + 2\pi k\,\{(3A_{11} + A_{12} + A_{13})\,\alpha_{11} + \\ + (A_{12} + 3A_{22} + A_{23})\,\alpha_{22} + (A_{13} + A_{23} + 2\,A_{33})\,\alpha_{33}\} = 0\,.\end{aligned}$$

Ma si hanno pure le identità:

$$3\,A_{11} + A_{12} + A_{13} = \frac{2}{a^3\,b\,c}$$

$$A_{12} + 3\,A_{22} + A_{23} = \frac{2}{a\,b^3\,c}$$

$$A_{13} + A_{23} + 3\,A_{33} = \frac{2}{a\,b\,c^3}\,,$$

che si dimostrano, p. es., applicando ad $A_{11}\ A_{22}\ A_{33}$ l' integrazione per parti: dopo ciò, la (13) si riduce alla (12).

Le (11) e (11') forniscono dunque la soluzione del problema.

---

[1]) È l' unica a cui ora si riducono le C' del n. 4, che sono compendiate nella formola in fondo a pag. 24 della Memoria di Morera.

SU UN PROBLEMA E SU ALCUNE ESPERIENZE DI DIFFUSIONE

NOTA DI O. SCARPA.

(Risposta ai Proff. L. Vanzetti e Ugo Grassi)

Nel fascicolo di Dicembre 1910, il Prof. L. Vanzetti pubblicò una nota [1]) in difesa delle sue esperienze e delle sue conclusioni, e in quello del Febbraio 1911 il Prof. Ugo Grassi [2]) una critica alla mia nota del Settembre u. s.

Trattandosi perciò di argomenti simili, ho pensato di rispondere contemporaneamente ad ambedue, anche perchè ho dovuto attendere che fossero pubblicate su questa rivista due mie note [3]) susseguenti alla prima, e di cui i manoscritti furono però consegnati alla redazione fino dai primi giorni di Gennaio u. s.

Incominciando per ordine devo quindi far notare quanto segue:

1. Il Vanzetti afferma (alinea 8 pag. 442) che sostituendo il mio metodo al suo « *non si dà ragione delle differenze fra i valori calcolati e gli sperimentali* ».

Ma ciò non è vero, poichè la equazione 6) della mia nota, a differenza di quella da lui usata, dà il valore di x pur in funzione della concentrazione necessaria per ottenere il precipitato; e quindi permette di dedurre l' influenza quantitativa degli stati di falso equilibrio che può assumere il

[1]) *Nuovo Cimento,* V, XX, pag. 442 (pubblicato il 28 Febbraio 1911).
[2]) Id., VI, 1, pag. 120 (pubblicato il 5 Maggio 1911).
[3]) « Su alcune esperienze di diffusione ». Nota 2ª e 3ª. (*Gazzetta Chimica,* XLI, Gennaio 1911). Comunicate al Congresso della Soc. It. per il progresso delle Scienze. Dicembre 1910.

prodotto della reazione prima di precipitare nel tubo di diffusione [1]).

E, in quanto (alinea 9) al non poter « *dimostrare infondata la spiegazione da lui proposta* » (idrolisi dei cloruri, bromuri e ioduri alcalini), dirò che tale spiegazione appare insussistente non solo dopo i miei risultati, ma pur discutendo correttamente quelli ottenuti con il suo stesso metodo di calcolo; e ciò per le medesime ragioni che ho indicate a pag. 14 alinea 11 e 21 della prima nota pubblicata in questa rivista.

2. La affermazione del Vanzetti (alinea 16 pag. 442) « *che non sono previste nelle formule di Fick e di Stefan la influenza delle concentrazioni iniziali delle soluzioni saline* » è contraria alla realtà, e le successive riguardanti ad esempio: « *la limitazione della colonna liquida* » ecc., non hanno alcun valore reale [2]); e così pure la affermazione (pag. 443 alinea 10) che « *l'esistenza dei falsi equilibri non dà ragione del comportamento dei sali di litio e di sodio* » è errata, poichè il suo ragionamento [3]) relativo alla posizione dei *setti* non è valido non tenendo egli conto delle concentrazioni iniziali delle soluzioni, cosa esplicitamente richiesta dalla teoria della diffusione.

3. E infine, riguardo la difesa che egli fa della sua ipotesi *idrolitica* ricordo che il fenomeno di separazione, per diffusione, della coppia acida da quella basica, fenomeno che forse avviene nella seconda serie delle sue esperienze [4]) sui cloruri di sodio e di potassio, *non è certamente dovuto alla loro idrolisi*, come io stesso ho dimostrato [5]) sperimentando con le loro soluzioni rese artificialmente alcaline; e che in ogni modo esso non potrebbe mai chiamarsi *idrolisi*, essendo questo nome riservato a un fenomeno del tutto diverso e che, per di più, come ho pur dimostrato [6]), dovrebbe essere (per

[1]) Vedi la mia nota 2ª ora citata.

[2]) Confronta: Stefan. *Sitzungsberichte Wien*. LXXVIII, 1878, pag. 963.

[3]) *Rendiconti Lincei*, XVI, 1907, pag. 700 e XVIII, 1909, pag. 232.

[4]) *Rendiconti Istituto Lombardo*, XLII, 1909.

[5]) *Rendiconti Società Chimica Italiana*, II, II, 1910, pag. 169.

[6]) « Sul calcolo della idrolisi dei sali di acido e di base egualmente forte ». *Rendiconti Società Chimica Italiana*, 2, II, 1910, pag. 293.

le soluzioni in parola) sensibilmente indipendente dalla diluizione.

E in quanto alle esperienze dello Skraup, da lui ora citate, dirò che egli stesso ne toglie ogni valore asserendo « *che esse furono condotte con una tecnica ben maggiormente esposta della sua a cause di errore* » mentre dovrebbero servire a dimostrare (per il cloruro di sodio ad esempio) l'esistenza di uno dei più delicati e importanti fenomeni della chimica fisica.

Cosicchè ancora una volta confermo le mie primitive conclusioni.

Ed ora risponderò, per quanto mi riguarda, agli appunti del Grassi.

1. Il Grassi afferma anzitutto (alinea 14 pag. 120) che « *i Sigg. Morse e Pierce hanno trattato nel 1903, in modo teoricamente corretto, il medesimo problema da me studiato* ».

Ma pur riservandomi di discutere in una mia prossima nota il lavoro di Morse e Pierce, e ciò nell'occasione in cui esporrò le ricerche sul fenomeno di Liesegang che da parecchi mesi proseguo [1]), devo subito dichiarare che la affermazione del Grassi non corrisponde alla verità.

E ciò perchè Morse e Pierce studiarono non già la diffusione contemporanea di due soluzioni procedenti in senso inverso in un tubo nel quale inizialmente è nulla la loro concentrazione (problema da me trattato), ma bensì (e con altro scopo) *la diffusione di una soluzione in un tubo che inizialmente è pieno di una seconda soluzione di concentrazione uniforme; e nella quale* (per quanto essi ammettono onde risolvere il loro problema) *si mantiene praticamente costante tale distribuzione in ogni tempo* [2]).

[1]) Ne ho accennato anche al Congresso della Società per il progresso delle scienze, tenuto in Napoli nel Dicembre 1910 (Vedi gli atti relativi a pag. 770).

[2]) Morse e Pierce. « Diffusion und übersattigung in gelatine ». *Zeit. Phys. Chem.* XLV, 1903, pag. 589.

La condizione sopracitata è esposta a pag. 602, alinea 7 e seguenti di tale nota.

E tanta è, nella realtà, la differenza dei due problemi, che, contrariamente a quanto induce a credere la nota del Grassi, non si possono applicare in alcun modo (direttamente o indirettamente) i risultati teorici o sperimentali di Morse e Pierce alla soluzione del problema da me studiato [1]).

2. Il Grassi opina (alinea 6 pag. 121) che, per la risoluzione del mio problema, la condizione di saturazione avrebbe dovuto essere espressa in base al principio del prodotto di solubilità; ma io devo subito far notare che pur facendo astrazione dalle numerose eccezioni (non sempre spiegabili) a cui va soggetto, esso non poteva servire al mio scopo perchè, come ho accennato fin dal Settembre 1909 e come poi ho dimostrato [2]), la precipitazione nel tubo di diffusione, avviene (in generale) non già nelle vere condizioni di saturazione (per le quali soltanto può valere il detto principio) ma in condizioni con le quali esso non ha alcun rapporto ben definito [3]).

[1]) Come risulta da una mia precedente dimostrazione (O. Scarpa, « Su un problema di diffusione ». *Rendiconti Società Chimica Italiana*, Aprile, 1911) soltanto una delle equazioni fondamentali che si devono impostare *nel caso in cui si adotta come base il principio del prodotto di solubilità* è analoga alla equazione fondamentale usata da Morse e Pierce nella trattazione del loro problema!

E, inoltre, essendo diversi gli scopi e le condizioni, le due trattazioni non hanno, *neppure in questa ipotesi*, nessun altro punto in comune.

[2]) « Su alcune esperienze di diffusione ». Nota 2ª e 3ª. *Gazzetta Chimica*, Gennaio 1911.

[3]) Che il principio del prodotto di solubilità non abbia nessun rapposto definito (almeno fino ad oggidì) con la precipitazione dei colloidi è cosa notissima; ma, nel caso della soprasaturazione, Morse e Pierce (loco citato) vollero dimostrare l'esistenza di un principio analogo, che si potrebbe chiamare del *prodotto di metastabilità*.

Ma a tale nuovo principio, *che ha per sola base teorica una ipotesi non necessaria*, manca tuttora ogni conferma sperimentale all'infuori di quella che credettero dare Morse e Pierce.

La quale, è da ricordare, *è fondata sui dati ottenuti con pochissime esperienze indirette, condotte su una sola sostanza, e con metodi assai criticabili.* Mentre poi al fenomeno di Liesegang, che condusse Morse e Pierce alla deduzione del loro principio (applicando la spiegazione di Ostwald), sono attribuibili delle origini indipendenti dalla soprasaturazione, e, per esso, sono dimostrabili delle modalità in aperto contrasto con la teoria di Ostwald.

E infatti che il principio del prodotto di solubilità non possa servire di base alla interpretazione delle esperienze del Vanzetti (e neppure alla maggior parte di quelle di Buscaglioni e Purgotti) è dimostrato pur dalla seguente osservazione:

Calcolando, con le equazioni di Stefan, la concentrazione raggiunta dalle due soluzioni reagenti al tempo in cui si inizia il precipitato (per es. di Ag Cl) in quella regione del tubo ove esso compare, si ottengono in generale dei valori dell' ordine di 10^{-2}n.; il cui prodotto è perciò dell' ordine: 10^{-4}; mentre il valore del prodotto di solubilità per gli joni Ag^{+} e Cl^{-} che, nella ipotesi sostenuta dal Grassi, dovrebbe coincidere con tal numero, è eguale a $1,1.10^{-10}$; cioè circa *un milione di volte minore!* [1]).

3. E finalmente risponderò all' ultima osservazione del Grassi.

Egli dice (pag. 122 alinea 6): « *Del resto anche la semplice osservazione che l' equilibrio fra le due fasi solido e soluzione verrebbe espresso con il sistema* (3') *dello Scarpa, non da una sola eguaglianza ma da due, mostra come la sua interpretazione teorica non possa essere esatta* ».

Ma pur questa affermazione del Grassi è fondata su un' errore di fatto, poichè il sistema (3') della mia nota *non indica due condizioni differenti di equilibrio fra le fasi, ma dà invece, ed appunto, le condizioni per le quali si ricavano i valori di x e di t che corrispondono all' unico valore di* γ

Come già dissi mi riserbo di ritornare fra breve su questo argomento, pur esponendo alcuni miei risultati sperimentali; ma già l'osservazione della nota susseguente, dimostra che neppur questo principio è applicabile alle esperienze del Vanzetti.

[1]) L' ordine di grandezza di questa differenza mostra che pur ammettendo valido il principio accennato nella nota 3ª di pag. 3 (del prodotto di metastabilità), sarebbe assurdo applicarlo a priori in tal caso; poichè le maggiori sopra saturazioni che fin' ora si sono ottenute sperimentalmente non sorpassano mai due o tre volte la concentrazione della saturazione normale, mentre si dovrebbero ammettere in tal caso (e senza nessun fondamento teorico o sperimentale) delle soprasaturazioni con concentrazioni dell' ordine *cento* a *mille* volte quelle della saturazione normale!

da me posto come condizione limite (di equilibrio o di falso equilibrio [1]) *fra le fasi solida e soluzione.*

Prima di conchiudere devo inoltre avvertire che fin dal mese di febbraio u. s. ho data la risoluzione del problema di diffusione da me trattato [2]), *corrispondente all' ipotesi che il precipitato avvenga nelle vere condizioni di saturazione, assumendo appunto come base il principio del prodotto di solubilità,* e che in tale occasione ho anche dimostrato *quantitativamente* che le differenze fra i valori di x così calcolati, e quelli ottenuti, nella stessa ipotesi, in base al principio generale di solubilità, sono (contrariamente a quanto induce a credere la nota del Grassi) in generale molto minori, e talvolta di un ordine di grandezza assolutamente differente, di quelle fra essi e i valori sperimentali del Vanzetti; confermando così ancora una volta ciò che sopra ho esposto, nonchè le conclusioni dei miei precedenti lavori.

Napoli, Laboratorio di elettrochimica del R. Politecnico,
Maggio 1911.

---

[1]) Naturalmente le condizioni limiti dei falsi equilibri da me considerate, sono quelle desunte da ricerche sperimentali. Vedi a tal proposito la Nota 2ª già citata.

[2]) *Rendiconti Società Chimica Italiana.* Aprile 1911. La trattazione completa sarà pubblicata pur su questa rivista.

SU LA TEORIA DEI FLUIDI ROTANTI.

UMBERTO CRUDELI.

I. — La teoria dei fluidi rotanti ha trovato e trova, come è noto, applicazioni notevoli nello studio dell'universo. Già, fino dall'epoca in cui Laplace [1]) imaginava la sua ipotesi cosmogonica (per non parlare delle ipotesi antecedenti, come sarebbe quella di Emanuele Kant [2]), una delle più ammirate quantunque non libera da errori diversi e non lievi) i fluidi rotanti trovavano, nell'idea della nebulosa progressivamente condensantesi, un vasto campo di applicazione. Ma, pur limitandoci all'oggi, notevoli sono gl'insegnamenti che fornisce la teoria dei fluidi rotanti nello studio dei pianeti e dei satelliti. Così si espresse, a un certo punto di una sua conferenza, il sig. G. H. Darwin [3]):

« Noi incominceremo con un pianeta liquido rotante simile alla Terra, che è la prima specie stabile della nostra famiglia, e se attribuiremo coll'immaginazione una maggior rotazione a questo pianeta, noi troveremo per mezzo del calcolo che la sua resistenza ad ogni sorta di perturbazione è minore di quello che fu. In altre parole, la sua stabilità diminuisce col crescere della rotazione e si arriva, a lungo andare, ad uno stadio, in cui la stabilità svanisce affatto. A questo punto si avrebbe una figura di transizione, perchè questo sarebbe il principio di una nuova specie con caratteristiche differenti dalla prima e con un debolissimo grado di

[1]) « Exposition du système du monde ».

[2]) « Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels ».

[3]) Vedasi il discorso letto dal prof. Di Legge per l'inaugurazione dell'anno scolastico 1905-906 (R. Università di Roma).

stabilità. Per tal modo si passa da specie a specie per mezzo di sempre crescente aumento di rotazione.

La prima specie, ossia la planetaria, ha un equatore circolare, la seconda specie ha un equatore ovale, così che essa è qualche cosa che rassomiglia ad un uovo rotolante di fianco su di un tavolo; nella terza specie trovasi che una delle due estremità dell'uovo comincia ad allungarsi ed il progressivo allungamento diventa una ben marcata escrescenza o filamento. Finalmente la escrescenza filiforme diviene bulbiforme ed è congiunta alla massa principale soltanto per mezzo di un' attaccatura o collo gradatamente assottigliantesi. Questo collo alla fine si spezza e noi ci troviamo così con due masse separate che possono chiamarsi pianeta e satellite. È ovvio vedere che lo scindersi effettivamente in due corpi è fino ad un certo punto speculativo, perchè i matematici hanno tralasciato fin qui di seguire sino alla fine l'intero processo.

In questo problema ideale le successive trasformazioni della specie si effettuano per progressivi incrementi dati al valore della rotazione, di cui la massa liquida è dotata. Potrebbe sembrare che questo continuo aumento del valore della rotazione fosse puramente arbitrario e non avesse alcun riscontro in natura. Ma i corpi reali si raffreddano e nel raffreddarsi si contraggono. Ora, poichè la scala di grandezza, in cui il nostro pianeta è supposto formato, è indeterminata, possiamo imaginare che la contrazione produca esattamente nella sua figura lo stesso effetto che un aumento di rotazione. Io devo quindi chiedervi soltanto di ammettere che gli effetti di un incremento di rotazione possano essere prodotti dal raffreddamento ».

Queste chiare parole del sig. Darwin possono servire a dare un' idea dell'importanza che ha, nella meccanica celeste, lo studio dei fluidi rotanti. Una gran parte di tale studio riguarda le figure di equilibrio relative a fluidi, di cui le particelle si attraggono mutuamente secondo la formula Newtoniana e non siano soggette ad azioni esterne [1]).

[1]) Ricordiamo in proposito le seguenti opere d'indole generale: Poincaré: « Figures d'équilibre d'une masse fluide ».

Noi, qui, vogliamo fare alcune considerazioni sulle velocità angolari compatibili con dette figure di equilibrio relativo [1]).

Supporremo che la superficie σ che limita il fluido occupante lo spazio finito S sia convessa come ho già inteso nelle ricerche accennate.

E, ponendo [2])

$$U = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

distingueremo qui i due casi seguenti:

Darwin: « Figures of equilibrium of rotating liquid (*Scientific Papers*, vol. III).

Tisserand: « Traité de Mécanique céleste », tomo II.

Pizzetti; « Lezioni sulla teoria meccanica della figura dei pianeti ». (Università di Pisa).

In particolare, poi, per le figure di equilibrio derivate dalle ellissoidiche (delle quali ho già avuto occasione di occuparmi in questo periodico (1908) tomo XVI, pag. 271, e nel *Giornale di Matematiche di Battaglini* (1909) pag. 109, vedasi:

Liapounoff: « Sur les figures d'équilibre, peu différentes des ellipsoïdes, d'une masse liquide omogène donée d'un mouvement de rotation ». (Opera pubblicata dall'Acc. Imp. delle Scienze di Saint-Pétersbourg).

Liapannoff: « Sur une classe de figures d'équilibre d'un liquide en rotation (*Ann. de l'École Normale Superieure*, 1909, pag. 473).

[1]) Di tali velocità angolari mi sono già occupato nelle seguenti pubblicazioni:

« Contributo alla teoria delle figure di equilibrio di un corpo fluido dotato di moto rotatorio ». (*Nuovo Cimento*, 1909, tomo XVII, p. 168).

« Velocità angolare di un fluido omogeneo rotante, limitato da figura di equilibrio ». (*Giornale di Matematiche di Battaglini*, 1909, p. 374).

« Nuovo limite superiore delle velocità angolari dei fluidi omogenei rotanti limitati da figura di equilibrio ». (*Rend. R. Acc. dei Lincei*, 1910, 1° sem., p. 666).

« Su la velocità angolare dei fluidi eterogenei rotanti limitati da figura di equilibrio ». *Rend. R. Acc. dei Lincei*, 1910, 2° sem., p. 43).

[2]) Con V indichiamo la funzione potenziale $k\varsigma\int_S \frac{dS}{r}$, dove ς sia la densità e k la costante della gravitazione universale.

1) Si ricerca se esistano, corrispondentemente alla velocità ω, contorni di equilibrio, senza porre la condizione $\frac{dU}{dn} > 0$ [1]), supponendo l'esistenza di una pressione esterna.

2) Posta la condizione $\frac{dU}{dn} > 0$, si ricerca se esistano, corrispondentemente alla velocità ω, contorni di equilibrio.

Intenderemo (a meno che esplicitamente non venga detto il contrario) che il fluido sia omogeneo.

Intanto, non solamente nel secondo caso, ma anche nel primo, come ho avuto occasione di mostrare altrove [2]) è da scartarsi la velocità $\omega = \sqrt{2\pi k \varsigma}$. Inoltre, nel primo caso, supposto il contorno σ convesso, non potremo intendere $\frac{dU}{dn} \leq 0$ in ogni punto del contorno σ. Infatti, dovrebbe essere allora in ogni punto

$$\frac{dV}{dn} + \frac{\omega^2}{2}\frac{d}{dn}(x^2 + y^2) = k\varsigma \int_S \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS + \frac{\omega^2}{2}\frac{d(x^2 + y^2)}{dn} =$$

$$= k\varsigma \int_S \frac{\cos\varphi}{r^2} dS + \frac{\omega^2}{2}\frac{d}{dn}(x^2 + y^2) \overline{<} 0 .$$

Talchè, considerando un punto in cui il piano tangente a σ è normale all'asse di rotazione, dove, cioè, $\frac{d}{dn}(x^2+y^2)=0$, sarebbe ivi $k\varsigma \int_S \frac{\cos\varphi}{r^2} dS \overline{<} 0$, e ciò è assurdo, intendendo il contorno convesso.

Nel secondo caso, poi, ho mostrato (*Rend. R. Acc. dei Lincei,* 1910, 1° sem. pag. 666) che sono da scartarsi le velocità angolari superiori od eguali a $\sqrt{\pi k \varsigma}$, che, cioè, è necessario porre la diseguaglianza $\omega < \sqrt{\pi k \varsigma}$.

[1]) n indica la normale interna.

[2]) *Nuovo Cimento,* 1909, tomo XVII, p. 170.

La diseguaglianza $\omega < \sqrt{\pi k \varsigma}$ è stata (*Rend. R. Acc. dei Lincei*, 1910, 2° sem., pag. 43) da me estesa al caso dei fluidi eterogenei, intendendo, allora, che ς rappresenti la densità massima del fluido. Osserviamo, però, che sussiste anche la diseguaglianza $\omega < \sqrt{2 \pi k \varsigma_m}$, ove s'intenda che ς_m rappresenti la densità media [1]).

Si presenta, poi, spontanea la domanda se, nel secondo caso, supposto sempre, ben inteso, *finito* lo spazio S, sia possibile avere configurazioni di equilibrio corrispondentemente a velocità angolari tanto prossime quanto ci piace a $\sqrt{\pi k \varsigma}$. Non sappiamo dare di ciò una risposta. Soltanto osserviamo che, *corrispondentemente a velocità angolari tanto prossime quanto ci piace a* $\sqrt{\pi k \varsigma}$, *l'equilibrio è possibile*, come è noto [2]), *con un cilindro ellittico indefinito* (del quale la sezione abbia gli assi legati fra loro da una certa relazione). *Ma*, lo ripeto, *noi abbiamo supposto lo spazio* S *finito*.

II. — Ciò premesso, intendendo sempre la densità costante, ed indicando con $\omega = \frac{2\pi}{T}$ la velocità angolare di rotazione di un corpo celeste generico, poniamo

$$\frac{\omega^2}{\pi k \varsigma} = \frac{4\pi}{k \varsigma T^2} = \mu .$$

Come è noto [3]) si assume per la Terra (indicando con μ_0 il corrispondente valore di μ)

$$\mu_0 = \frac{4\pi}{k \varsigma_0 T_0^2} = 0{,}0046 ,$$

talchè

$$\mu = 0{,}0046 \frac{\varsigma_0}{\varsigma} \left(\frac{T_0}{T}\right)^2 .$$

[1]) Poincaré: « Figures d'équilibre », p. 11.
[2]) Tisserand: « Mécanique céleste », tomo II, p. 108.
[3]) Tisserand: « Mécanique céleste », tomo II, p. 92.

E quindi, la diseguaglianza $\mu < 1$ si traduce nell'altra

$$T > T_0 \sqrt{0{,}0046 \left(\frac{\varsigma_0}{\varsigma}\right)}$$

ovvero circa

$$T > 0{,}0678\, T_0 \sqrt{\frac{\varsigma_0}{\varsigma}}\,.$$

Ovvero anche

$$\varsigma > 0{,}0046\, \varsigma_0 \left(\frac{T_0}{T}\right)^2.$$

Roma, Aprile 1911.

SULLA VELOCITÀ DI GRUPPO IN UN MEZZO DISPERSIVO.

NOTA DEL PROF. MAX ABRAHAM [1]).

Sia ω la velocità di un' onda periodica di lunghezza λ; allora per la cosidetta velocità di gruppo vale l' espressione analitica [2]):

$$\upsilon = \omega - \lambda \frac{d\omega}{d\lambda}. \tag{1}$$

Essa prende una forma più opportuna, introducendo, invece della lunghezza d' onda λ, la frequenza di vibrazione:

$$\nu = \frac{2\pi\omega}{\lambda} \tag{1a}$$

come variabile indipendente. Scrivendo la (1):

$$\upsilon = -\lambda^2 \frac{d\left(\frac{\omega}{\lambda}\right)}{d\lambda} = \frac{d\left(\frac{\omega}{\lambda}\right)}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)}.$$

ossia

$$\frac{1}{\upsilon} = \frac{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{d\left(\frac{\omega}{\lambda}\right)} = \frac{d\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)}{d\left(\frac{2\pi\omega}{\lambda}\right)}.$$

[1]) *Rend. del R. Ist. Lomb. di scien. e lett.*, Ser. II, vol. XLIV, 1911.
[2]) H. Lamb. *Hydrodynamics*. Cambridge 1906, art. 234, p. 361.

e tenendo conto della (1a), si ottiene:

$$\frac{1}{\upsilon} = \frac{d\left(\frac{\nu}{\omega}\right)}{d\nu} = \frac{1}{\omega} + \nu \frac{d\left(\frac{1}{\omega}\right)}{d\nu}. \tag{2}$$

Questa equazione collega i valori reciproci delle velocità di onda (ω) e di gruppo (υ); essi sono differenti ogni volta, quando la prima dipende dalla frequenza.

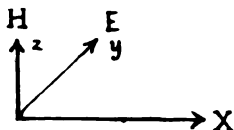
Questo accade per le onde del mare. Ora per esse — e precisamente per il caso speciale di un mare di profondità infinita — il O. Reynolds [1]) ha enunciato il teorema seguente: La velocità di gruppo è eguale al rapporto dei valori medi della corrente d'energia e dell'energia riferita all'unità di lunghezza. Questa teorema interessante attribuisce alla velocità di gruppo, oltre il significato cinematico, una importanza energetica. Fu osservato da Rayleigh, che il teorema di Reynolds non è limitato al caso di profondità infinita; anzi il Rayleigh ne ha dato una dimostrazione generale [2]); però questa dimostrazione ricorre ad uno smorzamento ausiliare, mentre che il detto teorema vale appunto per smorzamento nullo; perciò il Rayleigh stesso se ne mostrò poco soddisfatto.

Nel seguito proveremo il teorema di Reynolds per onde elettromagnetiche piane propagantisi in un mezzo dispersivo. Evidentemente questo problema è più semplice che quello idrodinamico; perchè tutti i punti di un piano d'onda si trovano in ogni istante nello stesso stato, e perchè l'energia si propaga sempre normalmente al piano d'onda. Il teorema, che dimostreremo, collega la velocità di gruppo colle densità medie dell'energia e della corrente d'energia, e permette di interpretarla come velocità media di propagazione della radiazione in un mezzo dispersivo.

Consideriamo un mezzo omogeneo, isotropo, nel quale le onde si propaghino nella direzione delle x. Le forze elettrica

[1]) O. Reynolds. *Scientifics Papers*. I, p. 198.
[2]) Lord Rayleigh. *Papers*. I, p. 322.

(E) e magnetica (H), giacenti nel piano d'onda, siano rispettivamente parallele agli assi delle y e delle z; essendo indi-

pendenti dalle y e x esse dipendano da x e t nel modo indicato dal fattore trigonometrico

$$\cos\left(\nu t - \frac{\nu x}{\omega} + \gamma\right).$$

I vettori « spostamento elettrico » D, e « induzione magnetica » B, pure paralleli agli assi delle y e delle z, sono collegati coi vettori H ed E mediante le equazioni fondamentali di Maxwell, che dànno

$$(3) \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial x}$$

(adoperiamo unità razionali, indicando con c la velocità della luce nel vuoto). Queste equazioni differenziali vengono risolute, attribuendo ai vettori D e B il suddetto fattore trigonometrico, e ponendo:

$$(4) \qquad \omega . D = c . H , \quad \omega . B = c . E .$$

Dalle (4) segue:

$$c . E H = \omega . E D = \omega . H B$$

e quindi, ponendo:

$$(5) \qquad \varphi = \frac{1}{2} E D + \frac{1}{2} H B ,$$

$$(6) \qquad S = c . E H ,$$

si ottiene:

$$(7) \qquad S = \omega . \varphi .$$

Per giungere a queste relazioni, non occorreva conoscere i rapporti tra le ampiezze dei vettori E e D, H e B. Nel caso comune, nel quale questi rapporti non dipendono dalla frequenza — cioè nel caso di un mezzo non dispersivo — la φ indica l' energia, contenuta nell' unità di volume, e la S è nient' altro che la corrente di energia, che attraversa nell' unità di tempo l' unità di superficie. Allora la (7) ci dice, che l' energia si propaga colla velocità di onda (ω), la quale in questo caso è eguale alla velocità di gruppo (υ).

Passiamo al caso generale, dove le ampiezze di D ed E, B ed H stanno in rapporti dipendenti dalla frequenza. In questo caso pure la corrente di energia S viene definita dalla (6), mentre che la φ dell'equazione (5) perde il significato di densità dell' energia. Infatti dalle (3) segue l' equazione

$$\mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial t}+\mathrm{H}\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}(c\,.\,\mathrm{E\,H}) \tag{8}$$

che formula la legge della conservazione dell' energia; interpretandone il secondo membro come energia, introdotta nell' unità di volume dalla corrente di energia parallela all' asse delle x, questa corrente S deve essere definita appunto dalla (6). Questa energia introdotta — essendo escluso assorbimento — dà luogo ad un incremento della densità di energia (ψ):

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}=-\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x}\,. \tag{9}$$

Affinchè la (8) prenda questa forma, la espressione della densità di energia (ψ) deve soddisfare alla condizione:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}=\mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial t}+\mathrm{H}\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial t}\,. \tag{10}$$

Come vedremo, nel caso di un mezzo dispersivo la ψ differisce dalla φ, definita dalla (5); perciò la (7) non formula più la legge di propagazione dell'energia; è nostro scopo appunto di trovare la relazione, che in sua vece esprime la legge di propagazione dell' energia radiante.

Ammettiamo, per ottenere una dipendenza della propagazione della frequenza, che D, lo spostamento elettrico, dipenda non solamente dal valore istantaneo della forza elettrica E, ma inoltre delle derivate pari di E rispetto al tempo:

$$D = \alpha_0 E + \alpha_2 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \ldots + \alpha_{2s} \frac{\partial^{2s} E}{\partial t^{2s}} + \ldots$$

ossia

$$D = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_{2s} \frac{\partial^{2s} E}{\partial t^{2s}} . \tag{11}$$

Abbiamo escluso le derivate impari, le quali darebbero luogo ad un assorbimento. Analogamente poniamo:

$$B = \sum_{s=0}^{\infty} \rho_{2s} \frac{\partial^{2s} H}{\partial t^{2s}} . \tag{12}$$

Le (11) e (12) rappresentano una posizione assai generale, la quale corrisponde ad una propagazione senza assorbimento, e indipendente dall' ampiezza.

Per vibrazioni della frequenza ν la (11) dà

$$D = \varepsilon . E , \tag{13}$$

dove ε, costante dielettrica, è la funzione seguente della frequenza ν:

$$\varepsilon = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha^{2s} (-1)^s \nu^{2s} . \tag{13a}$$

Analogamente la (12) dà

$$B = \mu . H , \tag{14}$$

μ, permeabilità magnetica, essendo rappresentata da

$$\mu = \sum_{s=0}^{\infty} \rho_{2s} (-1)^s \nu^{2s} . \tag{14a}$$

Ammettiamo che, per i valori di ν considerati, le serie (13a), (14a) convergano, e che siano derivabili almeno una volta. Dalla (4) segue

$$\frac{c}{\omega}=\sqrt{\frac{D.B}{E.H}}=\sqrt{\varepsilon.\mu}\,, \tag{15}$$

equazione che, insieme colle (13a, 14a), indica la velocità di onda ω, — e più precisamente l'indice di refrazione c/ω — come funzione della frequenza ν; la (15) quindi è la formola di dispersione [1]).

Ora, fondandoci sulla (10), ci proponiamo di trovare l'espressione della densità dell' energia elettromagnetica.

Dividiamola in due parti, elettrica e magnetica:

$$\psi=\psi^e+\psi^m\,, \tag{16}$$

dove

$$\frac{\partial\psi_e}{\partial t}=E\frac{\partial D}{\partial t}\,, \tag{16a}$$

e

$$\frac{\partial\psi_m}{\partial t}=H\frac{\partial B}{\partial t} \tag{16b}$$

determinano le densità di energia elettrica e magnetica, salvo costanti d' integrazione. Scriviamo inoltre la (5):

$$\varphi=\varphi_e+\varphi_m\,, \tag{17}$$

$$\varphi_e=\frac{1}{2}ED\,, \tag{17a}$$

$$\varphi_m=\frac{1}{2}HB\,. \tag{17b}$$

Allora le (16a, b) prendono la forma:

$$\frac{\partial\psi_e}{\partial t}=\frac{\partial\varphi_e}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(E\frac{\partial D}{\partial t}-D\frac{\partial E}{\partial t}\right), \tag{18}$$

[1]) Le posizioni suddette valgono per il caso della dispersione normale. Per la dispersione non normale, esse non sono ammissibili per tutte le frequenze. Questo caso fu considerato dal M. Laue. *Ann. der Physik*, 18 (1905), p. 523; basandosi sulla teoria di dispersione di Planck, egli confermò il teorema di Reynolds; inoltre questo lavoro contiene uno studio dettagliato della propagazione dell' energia radiante in un mezzo dispersivo dal punto di vista termodinamico.

(19) $$\frac{\partial \psi_m}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_m}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(H \frac{\partial B}{\partial t} - B \frac{\partial H}{\partial t}\right).$$

Dalla (11) si ottiene

(20) $$\frac{1}{2}\left(E \frac{\partial D}{\partial t} - D \frac{\partial E}{\partial t}\right) = \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_{2s} P_{2s},$$

con

(20a) $$P_{2s} = \frac{1}{2}\left(E \frac{\partial^{2s+1} E}{\partial t^{2s+1}} - \frac{\partial E}{\partial t} \frac{\partial^{2s} E}{\partial t_{2s}}\right),$$

espressione, che può scriversi come derivata rispetto al tempo

(21) $$P_{2s} = \frac{\partial p_{2s}}{\partial t}$$

di

(21a) $$p_{2s} = \frac{1}{2} E \frac{\partial^{2s} E}{\partial t^{2s}} + \sum_{\sigma=1}^{s-1} (-1)^{\sigma} \frac{\partial^{\sigma} E}{\partial t^{\sigma}} \frac{\partial^{2s-\sigma} E}{\partial t^{2s-\sigma}} + \frac{1}{2}(-1)^{s} \left(\frac{\partial^{s} E}{\partial t^{s}}\right)^{2}.$$

Fondandoci sulle (18), (20) e (21) e determinando la costante di integrazione in modo che ψ_e scompaia collo scomparire di E e delle sue derivate, otteniamo:

(22) $$\phi_e = \varphi_e + \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_{2s} p_{2s},$$

come espressione della *densità dell' energia elettrica*.

Ad essa corrisponde l' espressione della *densità dell' energia magnetica*, da ricavarsi dalle (12) e (13)

(23) $$\psi_m = \varphi_m + \sum_{s=1}^{\infty} \beta_{2s} q_{2s},$$

con

(23a) $$q_{2s} = \frac{1}{2} H \frac{\partial^{2s} H}{\partial t^{2s}} + \sum_{\sigma=1}^{s=1} (-1)^{\sigma} \frac{\partial^{\sigma} H}{\partial t^{\sigma}} \frac{\partial^{2s-\sigma} H}{\partial t^{2s-\sigma}} + \frac{1}{2}(-1)^{s} \left(\frac{\partial^{s} H}{\partial t^{s}}\right)^{2}.$$

Poi, dalle (16) e (17) otteniamo, sommando le (22) e (23), la *densità totale dell' energia elettromagnetica*:

$$\psi = \varphi + \sum_{s=1}^{\infty} (\alpha_{2s}\, p_{2s} + \beta_{2s}\, q_{2s})\,. \tag{24}$$

Ritorniamo al caso di vibrazioni armoniche, ponendo

$$E = a \cos\left(\nu t - \frac{\nu x}{\omega} + \gamma\right). \tag{25}$$

troviamo

$$\frac{\partial^{2s} E}{\partial t^{2s}} = (-1)^s\, \nu^{2s}\,.\, E\,, \tag{25a}$$

$$\frac{\partial^{2s-\sigma} E}{\partial t^{2s-\sigma}} = \frac{\partial^{2(s-\sigma)}}{\partial t^{2s-\sigma}}\left(\frac{\partial^\sigma E}{\partial t^\sigma}\right) = (-1)^{s-\sigma}\, \nu^{2(s-\sigma)}\, \frac{\partial^\sigma E}{\partial t^\sigma}\,. \tag{25b}$$

Quindi la (21a) diventa

$$\left\{ \begin{aligned} p^{2s} = \frac{1}{2} (-1)^s \nu^{2s} E^2 + \sum_{\sigma=1}^{s=1} (-1)^s \nu^{2(s-\sigma)} \left(\frac{\partial^\sigma E}{\partial t}\right)^2 + \\ + \frac{1}{2} (-1)^s \left(\frac{\partial^s E}{\partial t^s}\right). \end{aligned} \right. \tag{26}$$

Consideriamo ora i valori medi per il tempo di una vibrazione completa, che indicheremo con striscie sovrapposte. Abbiamo:

$$\overline{E^2} = \frac{1}{2} a^2\,, \overline{\left(\frac{\partial^\sigma E}{\partial t^\sigma}\right)^2} = \frac{1}{2} a^2\, \nu^{2\sigma}.$$

Perciò la (26) dà, come valore medio di p_{2s}

$$\overline{p^{2s}} = \frac{1}{2} a^2 \left\{ \frac{1}{2} (-1)^s \nu^{2s} + \sum_{\sigma=1}^{s-1} (-1)^s \nu^{2s} + \frac{1}{2} (-1)^s \nu^{2s} \right\}$$

ossia

$$\overline{p_{2s}} = \frac{1}{2}\, a^2\,.\,(-1)^s\, s\, \nu^{2s}\,. \tag{26a}$$

Ora dalla (22) otteniamo il valore medio di ψ_e.

$$\overline{\psi_e} = \overline{\varphi_e} + \frac{1}{2} a^2 \sum_{s=1}^{\infty} a_{2s} (-1)^s s \nu^{2s} . \tag{27}$$

dove, tenendo conto delle (17*a*), (13), (13*a*), vale

$$\overline{\varphi_e} = \frac{1}{2} \varepsilon . \overline{E^2} = \frac{1}{4} \varepsilon a^2 , \tag{27a}$$

con

$$\varepsilon = \sum_{s=0}^{\infty} a_{2s} (-1)^s \nu^{2s} .$$

Deriviamo questa ultima formola rispetto a ν:

$$\frac{d \varepsilon}{d \nu} = 2 \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_{2s} (-1)^s s \nu^{2s-1} ,$$

quindi

$$\frac{\nu}{2} \frac{d \varepsilon}{d \nu} = \sum_{s=1}^{\infty} \alpha^{2s} (-1)^s s \nu^{2s} . \tag{27b}$$

Introducendo le (27*a*, *b*) nella (27), questa diventa

$$\overline{\psi_e} = \frac{1}{4} a^2 \left(\varepsilon + \nu \frac{d \varepsilon}{d \nu} \right) = \frac{1}{4} a^2 \frac{d (\nu \varepsilon)}{d \nu} . \tag{28}$$

Questa relazione determina, per vibrazioni armoniche della frequenza ν, *la densità media* $\overline{\psi_e}$ *dell' energia elettrica in un mezzo, la cui costante dielettrica* ε *dipende dalla frequenza; per trovare* $\overline{\psi_e}$ *basta conoscere l' ampiezza* a *della forza elettrica, ed i valori di* ε *e della sua prima derivata, per la data frequenza.*

Analogamente, ponendo

$$H = b \cos \left(\nu t - \frac{\nu x}{\omega} + \gamma \right) \tag{29}$$

e passando a valori medi, si ricava

(29a) $$\overline{\psi_m} = \frac{1}{4} b^2 \left(\mu + \nu \frac{d\mu}{d\nu}\right) = \frac{1}{4} b^2 \frac{d(\nu\mu)}{d\nu}$$

come *densità media dell' energia magnetica.*

Poi, sommando, troviamo il valore medio della *densità totale dell' energia elettromagnetica :*

(30) $$\overline{\psi} = \frac{1}{4} a^2 \left(\varepsilon + \nu \frac{d\varepsilon}{d\nu}\right) + \frac{1}{4} b^2 \left(\mu + \nu \frac{d\mu}{d\nu}\right),$$

che vale per un' *onda periodica di frequenza* ν *nel mezzo dispersivo.*

Ora, per tale onda, le ampiezze a e b delle forze elettrica e magnetica non sono indipendenti.

Abbiamo posto (25 e 29):

$$\mathrm{E} = a \cos\left(\nu t - \frac{\nu x}{\omega} + \gamma\right), \quad \mathrm{H} = b \cos\left(\nu t - \frac{\nu x}{\omega} + \gamma\right)$$

inoltre le (13) e (14) dànno

$$\mathrm{D} = \varepsilon a \cos\left(\nu t - \frac{\nu x}{\omega} + \gamma\right), \quad \mathrm{B} = \mu b \cos\left(\nu t - \frac{\nu x}{\omega} + \gamma\right).$$

Quindi dalla (4) risulta

(31) $$\frac{c}{\omega} = \frac{\varepsilon a}{b} = \frac{\mu b}{a},$$

vale a dire

$$\varepsilon a^2 = \mu b^2$$

ossia

(31a) $$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$$

e questa formola collega le ampiezze delle forze elettrica e magnetica.

Dalla (31) si ritrova inoltre la formola di dispersione (15):

(31b) $$\frac{c}{\omega} = \sqrt{\varepsilon \cdot \mu}\,.$$

Per giungere al teorema di Reynolds, paragoniamo colla densità media (30) dell' energia, la corrente media dell' energia; il suo valore è:

$$\overline{S} = c\,\overline{E\,H} = \frac{1}{2}\,c\,.\,a\,b\,. \tag{32}$$

Dividendo la (30) per la (32), otteniamo:

$$\frac{\overline{\psi}}{\overline{S}} = \frac{1}{2c}\left\{\frac{a}{b}\left(\varepsilon + \nu\frac{d\,\varepsilon}{d\,\nu}\right) + \frac{b}{a}\left(\mu + \nu\frac{d\,\mu}{d\,\nu}\right)\right\} \tag{33}$$

e tenendo conto della (31 a):

$$\frac{\overline{\psi}}{\overline{S}} = \frac{1}{c}\left\{\sqrt{\varepsilon\,\mu} + \frac{\nu}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,.\,\frac{d\,\varepsilon}{d\,\nu} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,.\,\frac{d\,\mu}{d\,\nu}\right\}$$

ossia:

$$\frac{\overline{\psi}}{\overline{S}} = \frac{1}{c}\left\{\sqrt{\varepsilon\,\mu} + \nu\,\frac{d}{d\,\nu}\,(\sqrt{\varepsilon\,\mu})\right\}. \tag{33a}$$

Finalmente, introducendo la (31 b):

$$\frac{\overline{\psi}}{\overline{S}} = \frac{1}{\omega} + \nu\,\frac{d\left(\frac{1}{\omega}\right)}{d\,\nu} = \frac{d\left(\frac{\nu}{\omega}\right)}{d\,\nu}. \tag{33b}$$

Il secondo membro rappresenta appunto il valore reciproco della velocità di gruppo (cf. 2). Quindi si ha

$$\overline{S} = \upsilon\,.\,\overline{\psi}\,. \tag{34}$$

Vale a dire: *Per onde piane, propagantisi in un mezzo isotrodo, omogeneo, dispersivo senza assorbimento, la corrente media della energia è eguale al prodotto della velocità di gruppo per la densità media dell' energia.* In questo senso, in un mezzo dispersivo, la velocità di gruppo rappresenta la velocità media di propagazione dell' energia radiante. Per la

teoria della radiazione nei mezzi dispersivi la velocità di gruppo, non quella di onda, ha importanza principale.

Forse, invece di prendere le mosse dalla formola (2), stabilita con considerazioni cinematiche, sarebbe più conveniente di definire la velocità di gruppo mediante la formola (34), che esprime il teorema di Reynolds, e di dedurre da essa, paragonandola colla (33*b*), l' espressione analitica della velocità di gruppo:

$$\frac{1}{\mathfrak{v}} = \frac{d\left(\frac{\nu}{\omega}\right)}{d\,\nu}\,. \tag{35}$$

Milano, 6 Gennaio 1911.

Sulla Radioattività dei gas emananti dalle sorgenti termali di S. Saturnino (Benetutti - Sardegna).

ARCIERO BERNINI.

1). La presente comunicazione ha per iscopo di rendere noti i risultati delle ricerche sulla radioattività dei gas emananti dalle sorgenti termali dette di S. Saturnino, che si trovano nella valle del Tirso fra Bultei e Benetutti.

Il terreno circostante è di natura granitica. Le sorgenti sono parecchie, discoste fino qualche centinaio di metri l'una dall'altra, ed a temperature diverse. Le due che sono protette da capanna, oltre al dare maggiore abbondanza di acqua sono anche le più calde [1]) e forniscono pure una maggiore quantità di gas.

I risultati che espongo riguardano precisamente i prodotti della sorgente principale alla destra del Rio Mannu detta « della tigna », dalla quale sgorgano all'incirca 200 litri di acqua e 14 di gas all'ora; e sono stati ottenuti sperimentando con un elettroscopio tipo Exner della capacità di 28.10^{-4} Microfaraday.

Nella tabella I sono raccolti i valori della dispersione calcolata in Volta per ora, prodotta da un decimetro cubo di gas appena raccolto, raffreddato e convenientemente essicato.

[1]) L'acqua della sorgente detta « della tigna » fu trovata in diverse epoche dell'anno costantemente a 42°,1, quella della capanna alla sinistra del Rio Mannu, detta « dei nervi » a 42°,9, e quelle delle sorgenti più prossime dette « dei denti » e « degli occhi » rispettivamente alle temperature di 36°,5 e 28°,1

TAB. III.

Soggiornamento nel gasometro in ore	0	24	48	72	92	120	144	168	192
Dispersione in Volta per ora	588	501	410	360	301	255	210	170	143

La curva A della figura 2 costruita con questi dati ci dice che l'attività si riduce a metà in circa 4 giorni; ciò che sta ad indicare trattarsi molto probabilmente di emanazione di Radio. Calcolando coi minimi quadrati il valore della costante λ nella nota formola $I_t = I_0 e^{-\lambda t}$, si ricava infatti il valore $2{,}24.10^{-6}$, assai prossimo a quello determinato dal Rutherford per l'emanazione del radio.

3). La radioattività indotta fu studiata sia sulla campana, dopo che vi aveva soggiornato per due ore il gas appena raccolto, sia sopra conduttori mantenuti ad alto potenziale in presenza del gas.

Nella tabella IV sono raccolti i risultati di una serie di esperienze eseguite nel primo caso:

TAB. IV.

Tempo in minuti primi	0	5	10	15	20	25	30	35
Dispersione in Volta per ora	102	91	80	72	64	59	54	50

Da questi dati e dalla curva B della fig. 2 con essi costruita si può dedurre che l'attività indotta si riduce a metà in circa 35', e che quindi, come dicemmo sopra, si ha a fare indubbiamente con emanazione di Radio.

Altre serie di esperienze mi diedero risultati con questi molto concordanti e che perciò risparmio. Riporto invece i risultati ottenuti con 1 dm^3 di gas appena raccolto, quando, durante le due ore in cui l'ho lasciato soggiornare nella cam-

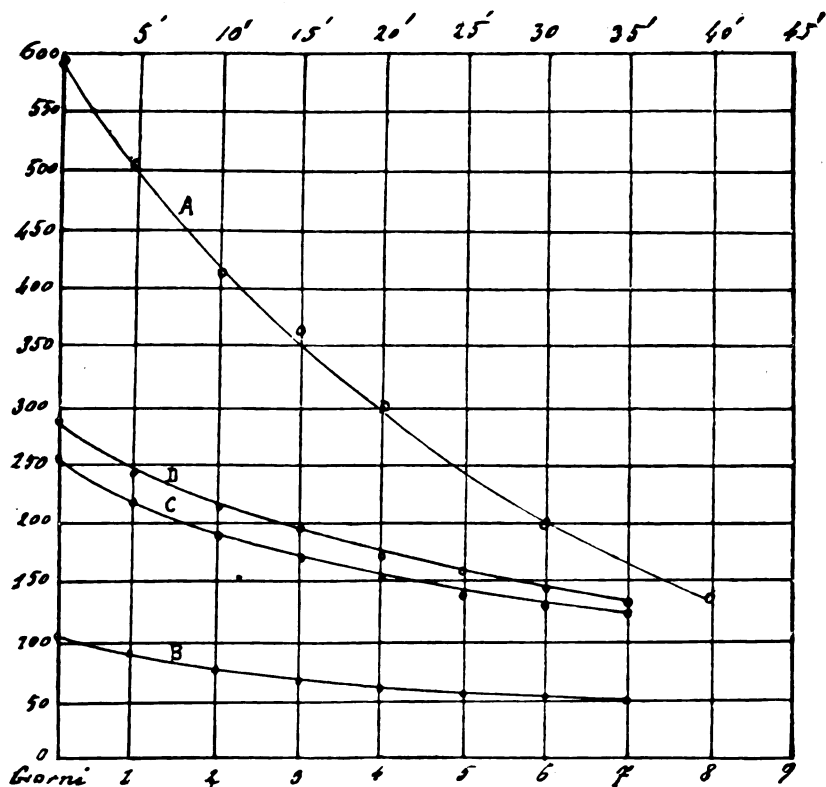



Fig. 2.

pana, ho mantenuto carico il dispersore positivamente a 105 Volta.

TAB. V.

Tempo in minuti primi	0	5	10	15	20	25	30	35
Dispersione in Volta per ora	252	222	193	170	154	141	132	128

Da questi dati, come pure da quelli della curva C della fig. 2 ad essi relativa, l'attività della campana appare alquanto più grande che non nel caso della tab. 4.

A spiegazione di ciò è forse sufficiente ricordare che l'attività indotta si manifesta maggiormente sui corpi carichi ne-

gativamente, e che, per essere nel nostro caso il dispersore mantenuto carico positivamente, la campana si trovava appunto nell'interno carica per induzione negativamente.

4). Per lo studio dell'attività indotta sopra conduttori mantenuti ad alto potenziale in presenza del gas mi servii di due lastre, l'una di legno e l'altra di Alluminio, di tali dimensioni da poter essere contenute nel fondo della campana dell'elettroscopio. Dopo che erano rimaste immerse nel gas per due ore e contemporaneamente sempre in comunicazione col polo negativo d'una macchina idroelettrica del Thomson ad un potenziale di circa 3500 Volta, venivano collocate nella campana; e dopo 10 minuti primi si cominciavano le osservazioni.

I risultati ottenuti colla lastra di legno non furono a dir vero soddisfacenti, e forse la causa delle loro sconcordanze va attribuita alla porosità della sostanza. Riporto perciò nella tab. VI soltanto i risultati di una serie di esperienze ottenute colla lastra di Alluminio.

Tab. VI.

Tempo in minuti primi	0	5	10	15	20	25	30	35
Dispersione in Volta per ora	285	246	220	197	172	165	145	132

La curva D della fig. 2 con essi costruita mostra un andamento del tutto analogo alle altre, e conferma quindi la ipotesi sopra enunciata che si tratti di emanazione di Radio.

5). A stabilire se la radioattività fosse una proprietà esclusiva del gas, ovvero se l'acqua contenesse la sostanza radioattiva atta a produrre l'emanazione, ho eseguito a Benetutti (cioè a circa 10 km. dalle terme) delle esperienze con aria fatta gorgogliare attraverso ad un litro d'acqua.

Il primo dm^3 d'aria passato attraverso all'acqua quattro ore dopo che fu raccolta provocò un abbassamento corrispondente a 15 Volta per ora. Invece il trentunesimo litro pas-

sato attraverso alla stessa acqua provocò una dispersione corrispondente soltanto a 6 Volta per ora.

Inoltre un altro dm^3 d'aria (il trentaduesimo), fatto passare attraverso alla stessa acqua dopo 11 ore da che fu raccolta, provocò un abbassamento corrispondente a 4 Volta per ora, mentre 1 dm^3 d'aria, fatta gorgogliare attraverso ad 1 litro d'acqua raccolto insieme al primo ed attraverso al quale non si era ancora fatta gorgogliare dell'aria, provocò una caduta di potenziale corrispondente ad 11 Volta per ora.

Dopo questo ho creduto di potere asserire come l'acqua sia radioattiva solo in quanto contiene sciolto del gas radioattivo.

È mia intenzione procedere ad un esame chimico e spettroscopico del gas non appena mi sarà possibile ottenere il necessario all'uopo.

Ringrazio il Prof. A. Pochettino per l'aiuto di consigli e di mezzi.

Dall'Istituto tecnico di Sassari.

RICERCHE SULLA TENSIONE SUPERFICIALE DI ALCUNI LIQUIDI.

DEL DOTT. R. MAGINI [1]).

1. Nel presente lavoro mi propongo di studiare la validità di un metodo assoluto di misura della tensione superficiale, di determinare con esso la tensione di alcuni liquidi a temperatura ordinaria ed a bassa temperatura, e di valutare l' influenza esercitata dall' aria in qualcuna delle misure medesime.

2. Negli studî di fisico-chimica si sente di continuo la necessità di fare misure precise e sollecite di tensioni superficiali; ma a tale necessità non risponde la maggior parte dei metodi comunemente in uso. Alcuni che avrebbero il pregio di esser semplici e rapidi, non dànno che valori relativi, e servono perciò bene solo in quei casi in cui interessa seguire le variazioni della tensione, più che conoscere il suo vero valore. Altri metodi adatti a fornire misure assolute presentano, anche in ottime condizioni sperimentali, una grande incertezza nei risultati; primo fra essi quello delle ascensioni capillari, che è certamente il più usato, e nel quale la divergenza fra le misure può raggiungere anche $^1/_{30}$ del valore della costante capillare. E troppo spesso tali metodi si sono usati e si usano come relativi, affidandosi sistematicamente a lavori classici e tarando gli apparecchi con liquidi di cui si crede di conoscere con sicurezza la tensione, senza pensare che i dati forniti ed accettati per le tensioni superficiali sono ben lontani dal rivestire il significato di costanti fisiche, a-

[1]) Lavoro eseguito nell'Istituto di fisica della R. Università di Pisa, diretto dal Prof. A. Battelli.

vendosi quasi sempre tanti valori per quanti furono i metodi e gli osservatori.

Fra tutti i metodi assoluti, il più sicuro ed il più rigoroso è indubbiamente quello delle onde capillari, suggerito da lord Kelvin e realizzato poi da lord Rayleigh; ma esso non è di facile uso, per la sua laboriosità e per la difficoltà che si riscontra nella misura delle lunghezze d'onda. Sarà quindi utile vedere se possa venire vantaggiosamente sostituito da un altro metodo che pur presentando un grande rigore teorico, fornisca gli stessi risultati di quello e si presti a più semplici e rapide determinazioni sperimentali.

3. *Metodo della massima pressione delle piccole bolle.* — Tralasciando di parlare dei metodi notissimi di Simon [1]) e di Jäeger [2]) e della modificazione di Brioukhanoff [3]), dirò solo che anche Whatmough [4]) aveva proposto di dedurre il valore della tensione superficiale di un liquido dalla pressione con cui vi entra una corrente gassosa; ma la formola da lui suggerita non rappresenta una cosa bene definita, dal momento che in essa figurano valori non esattamente individuati fra i tanti assunti dalla pressione durante la formazione delle bolle.

Cantor [5]) invece, studiando teoricamente il caso di un anello adagiato sulla superficie di un liquido, dimostrò che la tensione può essere determinata con facilità e senza bisogno di alcuna premessa sull'angolo di raccordamento se l'anello si riduce ad un tubo circolare con orlo tagliente, perchè in tal caso la superficie della bolla che si forma all'estremità del tubetto può liberamente assumere tutte le forme necessarie al suo completo sviluppo.

Siano: r il raggio del tubo ad orlo tagliente, p la pressione nella bolla, H quella data dal manometro, d e h la densità del liquido e l'affondamento del tubetto; ρ, ρ_1, y i raggi

[1]) Simon. C. R. 12, p. 892; 1841.
[2]) Jäeger. *Wien. Ber.* 100, II, p. 258, 1891.
[3]) Brioukhanoff. Com. d. Soc. fis-mat. Univ. Kazan (2), 7, 203; 1898.
[4]) Whatmough. *Zeit. f. Phys. Ch.*, 39, p. 129; 1902.
[5]) Cantor. *Wied. Ann.* 47, p. 399, 422, 1892.

di curvatura e l' ordinata di un punto della superficie della bolla, e α infine la tensione del liquido. Si ha:

$$p = H - d\,h \quad \text{e} \quad p = d\,y + \alpha\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1}\right).$$

In seguito ad una serie di stati di equilibrio, p raggiunge il suo valore massimo $\overline{p}$. Da questa condizione di massimo ed in seguito ad opportune trasformazioni sugli elementi geometrici della bolla, si ricava:

$$\overline{p} = \frac{2\,\alpha}{r} + \frac{d\,r}{3}\left(2 + \frac{3\,d\,r}{\overline{p} - \frac{2\,d\,r}{3}}\right),$$

da cui, trascurando le potenze superiori di $\frac{d\,r}{\overline{p}}$ si ha:

$$\alpha = \frac{r\,\overline{p}}{2}\left(1 - \frac{2}{3}\,m - m^2\right), \text{ dove: } m = \frac{d\,r}{\overline{p}}.$$

Il terzo termine non influisce in generale sul risultato numerico.

Cantor fece alcune misure, a titolo di saggio, servendosi di tubi i cui orli erano ben lontani dall' essere taglienti. Il suo metodo fu invece reso più delicato da Feustel [1]), che se ne valse in una importante e recente ricerca sulle relazioni intercedenti fra le tensioni superficiali ed altre costanti fisiche. Ma questo lavoro, per quanto condotto con grande cura, ha una grave lacuna; perchè l'autore non si è occupato della validità del metodo usato che in via puramente incidentale, ed essa non può dirsi dimostrata. Il Feustel infatti si limita a studiare il benzolo ed il nitrobenzolo con tre tubi di platino forniti da Heraeus, e dall' accordo dei risultati ottenuti con due tubetti per ciascuno dei liquidi ricava la prova dell' opportunità e precisione del metodo. Il valore dato per il benzolo ($\alpha_{18^\circ} = 3{,}12$) è però troppo diverso da quelli avuti da

[1]) Feustel. *Ann. d. Phys.*, p. 61, 1905.

altri sperimentatori [Schiff [1]): $\alpha_{18} = 2,83$; Timberg [2]): 2,88 ; Ramsay e Aston [3]): 2,83 ; Renard e Guye [4]): 2,86] per convincere a tutta prima della idoneità del metodo medesimo, la cui riprova può solo risultare da un suo studio sistematico, dall'uso di tubi diversi e dal confronto dei risultati cosi ottenuti con quelli cui conduce il metodo delle onde.

4. *Disposizione degli apparecchi e modo di far le misure.* — Ecco in qual modo ho disposto gli apparecchi e condotto le esperienze. Mia prima cura fu di produrre una tenuissima corrente d'aria *pura* per mezzo di un gasometro a caduta d'acido solforico concentrato. Questo, uscendo da una provetta, scendeva per un sottile imbutino lungo un tubo fissato ad una bottiglia a due colli, contenente anch'essa una certa quantità dello stesso acido e riempita di aria pura, dopo filtrature e lavaggi, per spostamento d'acido solforico purissimo. Attraverso un lungo e fine capillare la corrente gasosa giungeva ad un rubinetto a tre vie, e quindi al tubetto e al manometro. Una pera con lana di vetro imbevuta d'acido solforico ed un tubo ad anidride fosforica erano intercalati fra il rubinetto ed il tubo di vetro unito al capillare con l'orlo tagliente. Questo tubo era portato, per mezzo di una squadra e di due piattaforme di ottone unite da viti e tiranti, da una grossa vite micrometrica col passo di 0,5 mm. e con la testa divisa in 200 parti. Il liquido da esaminare veniva posto al disotto in un bicchiere contenuto in altro più grande, chiusi da lastrine di vetro combacianti col capillare, col bicchiere e fra loro ; nell'intercapedine si poteva mettere anidride fosforica. In altri casi fu usato un vaso di Dewar ; in altri infine una provetta, attraverso il tappo della quale potevano passare a sfregamento il tubo col capillare ed il termometro ; l'aria circolava poi liberamente per mezzo di un tubo con lana di vetro ed anidride.

[1]) Schiff. *Lieb. Ann.* 223, 1884.
[2]) Timberg. *Wied. Ann.* 30, 545, 1887.
[3]) Ramsay e Aston. *Zeit. Phys. Chem.* 89, 1894.
[4]) Renard e Guye. *Jour. de Chem. Phys.*, p. 81, 1907

Il manometro ad acqua venne formato da canne di vetro lavorate, i cui diametri erano di cm. 10,40 e 0,48, e si fece la lettura della pressione col catetometro, disponendo prima il cannocchiale in una posizione prossima a quella necessaria per osservare la pressione massima, rendendo poi impercettibile la corrente gassosa allorchè il menisco compariva nel campo, e seguendolo col reticolo fino a cogliere l'istante in cui quello improvvisamente spariva. Nessuna precauzione fu bastevole a conservare perfettamente *bagnata* la parete del tubo manometrico; e più di ogni lavaggio chimico con acido cromico, con acido solforico e bicromato di potassio o con altri liquidi ritenuti come perfetti detergenti del vetro, giovò la frequente pulimentazione meccanica con tamponi di cotone e acqua saponata, seguita da abbondanti lavaggi con acqua distillata. Per maggiore garanzia, si osservò sempre la forma del menisco, e se ne misurò l'altezza.

5. Nel computo delle pressioni massime non si introdussero le correzioni per la densità dell'acqua e per la riduzione delle altezze manometriche ad un unico ramo, perchè esse prese assieme portavano una differenza di 77.10^{-5} cm, per ogni cm. di colonna liquida a 18^0 e a 24^0, e si compensavano a 21^0. Entro tali limiti rimase la temperatura dell'acqua del manometro.

Il catetometro dava con sicurezza il 50^esimo^ di millimetro, e ritengo, in base alle cautele prese per conservare netto il menisco, che questa sia anche l'approssimazione raggiunta nelle misure della pressione massima. E supponendo con Quincke che le misure dei diametri possano farsi con l'errore di $^1/_{1000}$, si avrebbe per una elevazione media di 5 cm. l'approssimazione complessiva di $^1/_{700}$, ossia la sicurezza per la seconda cifra decimale della costante dell'acqua.

6. *Costruzione dei capillari.* — Nelle esperienze usai due tubetti di platino e molti di vetro. I primi, come quelli di Feustel, erano di Heraeus, diritti e senza suture, con orlo piano, tagliente, alquanto sfrangiato, compreso fra 19 e 35 millesimi di millimetro. Vennero migliorati con fili conici di vetro debolmente smerigliati. Per la praticità del metodo volli costruirne di vetro. Già Cantor aveva fatti dei tentativi, ti-

rando delle canne, troncandole e facendo convergere alla fiamma i due margini in uno; ma in tal modo lo spessore non scese al disotto di 0,16 mm. Riuscii invece ad avere degli ottimi capillari tirando dei tubetti di piccolo diametro e rilevante spessore, scegliendo quelli che al microscopio presentavano un orlo pressochè piano ed una rotondità perfetta dei due margini, spianandoli sulla più fine carta smerigliata del commercio (precedentemente consumata contro una lastra di vetro) fino a renderne piano e lucente l' orlo, intaccandoli con acido fluoridrico per un solo istante e ripetendo parecchie volte tale operazione alternata con abbondati lavaggi per asportare i fluoruri.

Si ebbero così degli orli taglienti e piani di una rotondità e regolarità inaspettate, compresi fra 13 e 28 millesimi di millimetro. Oltre tal limite si manifestarono figure di corrosione.

Riporto qui le misure dei diametri dei due tubi di platino (I e II) e di tre qualunque di vetro, fatte al microscopio con scala oculare e micrometro, e dopo avere studiato con cura le condizioni del rischiaramento. Le ultime cifre esprimono in mm. i raggi, ricavati dalla media di tre serie di osservazioni.

I. 99,2 - 99 - 100,3 - 100 - 101,4 - 103 - 101,3 - 101 - 101,2 - mm. 0,32420
II. 75,2 - 76 - 75,4 - 76,6 - 76 - 77,2 - 77,2 - 76 - 75,7 - mm. 0,24525
III. 71,5 - 71,6 - 71,4 - 71,2 - 71,5 - 71,5 - 71,6 - 71,4 - 71,2 - mm. 0,46600
IV. 58,8 - 58,8 - 58,5 - 58,6 - 58,4 - 58,3 - 58,4 - 58,6 - 58,6 - mm. 0,38181
V. 52,7 - 52,8 - 52,7 - 52,9 - 52,3 - 52,4 - 52,7 - 52,9 - 52,8 - mm. 0,34395

Da tali misure risulta la notevole superiorità dei capillari di vetro.

7. *Benzolo e nitrobenzolo.* — Feci la prova sommaria del metodo col benzolo. Venne acquistato dalle ditte Kahlbaum ed Erba, e fu trovato esente da tiofene. Trattato con isatina ed acido solforico, non presentò la nota colorazione dell' indofenina. Ebbi per α_{18} dei valori compresi fra 2,89 e $3{,}13^{mgr}/_{mm}$, e non concordanti nemmeno per uno stesso tubo. Dalle medie si ricava 3,08, compreso fra i valori 3,06 e 3,12,

ottenuti per interpolazione dalle misure di Cantor e di Feustel. Il nitrobenzolo di Kahlbaum dette risultati analoghi, ma più concordanti.

Le divergenze notate fra tubetti diversi sono presso a poco dello stesso ordine di quelle avute da un medesimo tubo usando porzioni dello stesso liquido dopo decorsi tempi diversi dalla sua distillazione; ritengo perciò che esse non dipendono da differenze fra i singoli orli dei capillari, ma da qualcosa di attinente al metodo stesso. In altre parole mi sembra accertato che il benzolo non si presti affatto per misure all'aria libera, come generalmente si crede.

Riproduco qui appresso, a titolo di esempio, qualche osservazione compiuta intorno a 18°, coi capillari di vetro, su porzioni diverse di benzolo, poco dopo la distillazione.

r	h	$t°$	$H - H_0$	$\overline{p}$	α
cm. 0,046600	0,2	18,°1	24,182 - 22,736	1,268	2,890 mgr./mm.
» »	»	17,9	24,180 - 22,734	1,270	2,895 »
» »	»	18,1	24,186 - 22,746	1,264	2,881 »
cm. 0,038181	0,1	18°	24,092 - 22,442	1,562	2,939 »
	»	17,°9	24,170 - 22,512	1,570	2,954 »
	»	18	24,386 - 22,726	1,572	2,957 »
cm. 0,034395	0,1	18,1	24,380 - 22,548	1,744	2,964 »
		18	24,386 - 22,548	1,750	2,973 »
		17,9	24,388 - 22,550	1,750	2,973 »

$$\text{Benzolo}: \alpha_{18} = 2,93 \frac{\text{mgr.}}{\text{mm.}} = 28,75 \frac{\text{dine}}{\text{cm.}}.$$

8. *Aria liquida.* — Il gasometro fu riempito di idrogeno ricavato da prodotti puri. L'aria liquida preparata da qualche ora fu posta in un vaso di Dewar inargentato e con fi-

nestre laterali, insieme ad un termometro a pentano di Altmann. Aveva una temperatura di — 190°,5, una densità di 1,029 e conteneva circa il 65 °/₀ di ossigeno. Vennero fatte 12 letture con due capillari diversi e l' accordo fra i risultati fu buonissimo.

Nulla sembrò perturbare la tensione del liquido, e potetti persuadermi che le lievi divergenze notate per $\overline{p}$ derivavano solo dalla difficoltà di apprezzare l' affondamento dei tubetti, causa la rapida rinnovazione della superficie libera. Riporto in succinto i valori trovati con uno dei tubi:

r = cm. 0,023429	H — H' = cm. 24,348 — 21,676	cm. 24,348 — 21,680
$\overline{h}_{medio}$ = cm. 1,575	— 21,664	— 21,678
$\overline{p}_{medio}$ = cm. 1,053	— 21,670	— 21,672
t = — 190°,5	— 21,674	— 21,670
d = 1,029	— 21,676	— 21,670
	— 21,680	— 21,678

Si ha così:

r = cm. 0,023429 $\alpha = 1,214 = 11,91$ dine/cm.
$\overline{r}$ = cm. 0,024525 $\alpha = 1,229 = 12,14$ dine/cm.
$\alpha = 1,221$ mgr./mm. $= 12,02$ dine/cm.

I resultati sono concordanti fra loro e con quelli di Grunmach [1]), che col metodo delle onde ha trovato, fra 63,9 e 67,6 °/₀ di ossigeno, valori compresi fra 11,89 e 12,05 dine/cm. con una media di 11,94.

9. *Acqua distillata.* — L' acqua distillata freschissima fu tenuta in una bottiglia a due colli, dalla quale si faceva poi uscire mediante pressione d' aria filtrata, e venne continuamente cambiata. Riporto qui appresso i dati sperimentali ottenuti da un grandissimo numero di osservazioni — non meno di venti per tubo — fatte a temperature comprese fra 17° e 23°,3. Le ultime colonne contengono i valori medî della pressione massima per ogni serie di misure, le medie $\overline{p}_m$ di questi, i valori medî di α in mgr/mm. alla temperatura $t°$, i medesimi ricondotti a 18° mediante la nota relazione $\alpha_t = \alpha_0 - \beta t$, dove per β è stato preso il valore dato da Tim-

[1]) Grunmach. *Ann. d. Phys. 6*, 559, 1901.

berg (0,02052), ed infine i valori massimi trovati per α e ricondotti anch' essi a 18°.

r	t	p		$\overline{p}_m$	α_t	α_{18}	α_M
cm. 0,038181	22°	I Serie:	cm. 3,929				
	23°	II »	» 3,907	cm. 3,903	7,402	7,500	7,534
	23°,3	III »	» 3,872				
cm. 0,034395	17°	I Serie:	» 4,394				
	17,9	II »	» 4,378	cm. 4,383	7,498	7,496	7,500
	18,8	III »	» 4,376				
cm. 0,031977	19,6	I Serie:	» 4,678				
	19,9	II »	» 4,670	cm. 4,679	7,447	7,488	7,504
	20,3	III »	» 4,688				
cm. 0,023185	20°,6	I »	» 6,432				
	20,2		6,442	cm. 6,448	7,457	7,502	7,510
	19,8		6,470				

Media: $\alpha_{18} = 7,497$ mgr./mm.
» $\alpha_M = 7,512$.

Tra i due valori così ottenuti la differenza è molto lieve; quello ricavato dai massimi si deve forse considerare come più prossimo al valore vero della costante capillare dell' acqua per ragioni che saranno dette in seguito.

Ecco intanto i resultati avuti da varî osservatori col metodo delle onde:

Matthiessen [1]), 7,4 fra 15° e 20°; lord Rayleigh [2]), 7,533 a 18°; Dorsey [3]), 7,466 a 18°; Grunmach [4]), 7,50 a 20° circa e 7,7 a 17°; Kalähne [5]), 7,520 a 18°; Pederson [6]), 7,512 pure a 18°.

La media fra questi valori dà 7,52.

10. Le precedenti esperienze eseguite su due liquidi di piccolissima e di grande tensione superficiale sono indice del

[1]) Matthiessen. *Ann. d. Phys.* *38*, 118, 1889.
[2]) Lord Rayleigh. *Phil. Mag.* (5), *30*, 395, 1890.
[3]) Dorsey. Ibid. (5), *44*, 369, 1898.
[4]) Grunmach. *Ann. d. Phys.* *3*, 660, 1900; 9, 1261, 1902.
[5]) Kalähne. Ibid. 7, 440, 1902.
[6]) Pederson. *Proc. Roy. Soc.* *80*, 26, 1907.

buon accordo fra i resultati ottenuti col metodo delle bolle gassose e quelli ricavati col metodo delle onde capillari. Rimangono da spiegare le notevoli differenze riscontrate con uno stesso capillare, a parità di tutte le altre condizioni sperimentali, per il benzolo e per l' acqua; divergenze sistematiche che si notano con questo come con qualsiasi altro metodo, e troppo grandi perchè si possano imputare ad errori di osservazione. Ed una volta trovata la causa permanente di tali deviazioni, dovrà essere possibile realizzare un liquido di tensione superficiale praticamente *costante* e tale da permettere lo studio rigoroso di questo come di qualsiasi altro metodo.

11. *Influenza dell' aria sulla tensione superficiale dell' acqua.* — Nonostante le precauzioni usate per lo studio dell' acqua si ebbero con questo liquido delle rilevanti differenze fra le letture manometriche, corrispondenti poi a piccole variazioni della tensione a cagione dell'alto valore della costante capillare. Da una divergenza massima di 0,7°/₀ dal valor medio avuta per l' acqua distillata nelle migliori condizioni e più *fresca,* si giunse ad un minimo di 0,17 per quella preparata da qualche ora, con una media complessiva del 0,3 °/₀. È questo quanto di meglio possa forse aversi in misure di tensioni superficiali. Basta infatti dare uno sguardo ai lavori eseguiti sull'acqua per vedere che dalle prime determinazioni di Quincke e di Lenard le divergenze dal valor medio sono scese dal 6 e dal 5 °/₀ a 0,5 — 0,3 °/₀ nelle ricerche di Sentis, di Wolkmann e nelle ultime misure con le onde capillari; e ciò perchè sono stati abbandonati quei metodi che portavano i più rilevanti errori di osservazione e perchè si sono maggiormente temute e sapute evitare le impurità accidentali che tanto disturbano e rendono penose misure di questo genere. Ma anche al riparo da esse, le divergenze superano spesso l' ordine di grandezza degli errori di osservazione. Molti autori hanno notato questi spontanei cambiamenti della tensione superficiale di varî liquidi.

12. Nelle mie esperienze la massima tendenza a variare fu manifestata dall' acqua distillata subito dopo la sua preparazione anche quando, chiuso il vasetto, l' aria esterna non

poteva portare impurità e la superficie della bolla si rinnovava automaticamente in seno alla massa liquida. Col metodo delle bolle ci troviamo perciò in condizioni eccezionalmente favorevoli per indagare la causa di tali variazioni costanti; infatti non siamo più in presenza, come nelle ascensioni o con le onde capillari, di una superficie libera che si imbratta per effetto di impurità risalenti dalle pareti del vaso o cedute dall' aria-ambiente.

Remossa ogni causa di perturbazione da parte del vaso mediante arroventamento e lavaggi analoghi a quelli usati per il tubo manometrico, si potevano attribuire le variazioni osservate all' azione di impurità provenienti dal gasometro. Ma questo fu riempito, come è stato detto, di aria già replicatamente filtrata e lavata in acido solforico purissimo e in acqua distillata, e la lentissima corrente gasosa attraversava la lana di vetro inzuppata dello stesso acido prima di giungere al capillare affondato nel liquido. In identiche condizioni nè l' alcool assoluto, nè altri liquidi mostrarono, purchè al riparo dall'umidità, variazioni sensibili per il formarsi delle successive bolle. E nemmeno poteva qui invocarsi l' altra questione della maggiore o minore solubilità del vetro nell' acqua, già dibattuta per le elevazioni capillari, perchè nel caso presente i capillari di vetro si comportarono come quelli di platino, secondo risulta dalle misure più innanzi riportate.

Bisognava dunque far posto ad altre ipotesi e supporre che l' aria, anche se *pura*, sia capace di esercitare un' influenza sulla tensione dell'acqua e dei liquidi che si comportano come l' acqua.

13. Su questo punto non può dirsi certamente che manchino ricerche, ma esse non conducono a conclusioni sicure, perchè, se alcune porterebbero ad escludere in modo assoluto qualunque influenza dell' aria, altre, e sono moltissime, provano in modo non dubbio che il contatto dell' aria-ambiente con la superficie fresca di un liquido introduce in questa delle modificazioni notevoli. Però tali ricerche non ci dànno poi il modo di separare l'azione dell' aria da quella delle impurità che l' accompagnano.

Röntgen e Schneider [1]) hanno avuto gli stessi innalzamenti capillari con acqua aerata e con acqua priva di aria; se l' aria disciolta nell' acqua ne modificasse la tensione superficiale, a 1000 atmosfere di pressione si sarebbe dovuto, secondo gli autori, avere lo stesso effetto che con una soluzione di ammoniaca contenente 700 molecole per litro.

E Leduc e Sacerdote [2]) hanno osservato che, facendo il vuoto l' altezza di ascensione dell' acqua in sottilissimi capillari non è affatto modificata. Le esperienze di Pockels [3]) provano invece che l' acqua potabile conservata in recipienti aperti diminuisce di tensione dopo un tempo più o meno lungo, anche se protetti da lastre di vetro, e che l' acqua distillata presenta variazioni più forti di quella potabile.

Non meno contradittorie appaiono le esperienze fatte su altri liquidi. Schiff [4]) non trovò notevoli differenze per molti composti organici esaminati nell' aria e nel vuoto. Renard e Guye [5]) ebbero nei due casi una concordanza di $^1/_{200}$ circa, mentre Ramsay e Shields [6]) avevano avuto divergenze assai forti: 1 su 12 per il tetracloruro di carbonio, 1 su 21 per il benzolo). I maggiori valori corrispondevano alle misure nelria. Del comportamento di quest'ultimo liquido nell'aria si ha una conferma, senza bisogno di fare esperienze speciali, nei resultati della tabella ad esso relativa. I valori della tensione crescono col decorrere del tempo dalla distillazione e si allontanano sempre più dal valore 2,83 trovato nel vuoto.

Anche le osservazioni compiute sul mercurio provano le rapide variazioni della sua tensione superficiale, che può essere più grande in presenza di alcuni gas che nel vuoto, per diminuire col tempo fino a raggiungere il valore trovato in quest' ultimo. Il contatto con l'aria ne imbratta subito la superficie, e la tensione scende da 50 a $40^{mgr.}/_{mm}$ in meno di

[1]) Röntgen e Schneider. *Wied. Ann. 29*, 207, 1886.
[2]) Leduc e Sacerdote. *C. R. 134*, 589, 1902.
[3]) Pockels. *Drude Ann. 8*, 854, 1902.
[4]) Schiff. *Gazz Chim. Ital. 14*, 368, 1884.
[5]) Renard e Guye. *Jour. de Ch. Phys.* 81, 1907.
[6]) Ramsay e Shields. *Phil. Trans. 184*, 647, 1893.

30 minuti; dopo qualche giorno e al riparo completo dalle impurità la diminuzione arriva al 34 %.

Delle esperienze citate, solo quella di Röngtgen e Schneider appare in assoluto contrasto con l'ipotesi dell'influenza esercitata dall'aria. Non si può infatti considerare come probatoria l'altra di Leduc e Sacerdote, se non dimostrando in precedenza che col fare il vuoto l'acqua perde tutta l'aria in essa disciolta. È nota invece la grande difficoltà di preparare del ghiaccio privo di bolle anche da acqua praticamente ritenuta disaerata. Nelle misure di Schiff, in prevalenza eseguite al punto di ebollizione, i liquidi trovavansi in contatto col loro vapore saturo e gli effetti dell'aria dovevano essere assai piccoli. Renard e Guye poi, tarando il loro capillare col benzolo per confronto coi dati di Ramsay e Aston, hanno in realtà misurato le differenze fra il comportamento di ciascun liquido e quello del benzolo nell'aria e nel vuoto.

14. Feci una prima esperienza sommaria sull'acqua distillata, con tutte le cautele indicate e subito dopo la sua preparazione, fissando esattamente il reticolo del catetometro nel momento in cui si formava la prima bolla ed osservando, senza cambiare il liquido come nelle altre misure, la posizione del menisco durante la formazione delle successive bolle. Il menisco non tornava più all'altezza di prima e la pressione massima andava diminuendo lentamente dapprima, poi più rapidamente, per tendere infine con grande lentezza verso un valore limite.

Tale esperienza può considerarsi in ogni suo particolare come inversa a quella Leduc e Sacerdote; l'aerazione in luogo del vuoto, l'espulsione dell'acqua dal capillare al posto della elevazione nel medesimo.

Per cogliere quel valore limite ed evitare al tempo stesso gli errori dovuti agli inevitabili cambiamenti di temperatura (il raffreddamento provocato dalla formazione delle bolle producendo per suo conto un aumento della pressione massima) vennero fatte delle misure nel modo ordinario su acqua interamente aerata e preparata a parte col far passare, per un certo tempo e con le modalità tenute per il riempimento del gasometro, una corrente di aria purissima attraverso l'acqua

distillata contenuta in una grossa bottiglia in cui da anni si conserva il liquido stesso. Invertendo le comunicazioni, si poteva riempire il vasetto per le misure. Dopo un'aerazione sufficiente si ebbero risultati perfettamente costanti; la pressione massima non presentò più variazioni di sorta, a parità di temperatura. Riporto qui alcuni dati numerici.

r	h_0	t_0	$H - H_0$	$\bar{p}$	α_t	α_{18}
	cm. 0,2	17,2	cm. 23,970 — 19,140	4,630		
	»	17,7	23,972 — 19,148	4,624		
	»	18.2	— 19,152	4,620	7,455	7,455
cm. 0,032420	»	18.4	— 19,154	4,618		
	»	18,6	— 19,158	4,614		
	0,2	17,7	23,884 — 17,594	6,290		
	»	17,8	— 17,596	6,288		
	»	18	— 17,598	6,286	7,443	7,443
cm. 0,024525	»	18,2	— 17,600	6,284		
	»	18,3	— 17,602	6,282		
	0,2	18,4	24,036 — 19,906	3,930		
	»	18,9	— 19,914	3,922		
	»	19	— 19,916	3,920	7,435	7,456
cm. 0,038181	»	19,2	24,034 — 19,918	3,916		
	»	19,5	— 19,922	3,912		
	0,2	18,5	24,216 — 19,676	4,340		
	»	18,8	— 19,680	4,336		
	»	19	— 19,682	4,334	7,412	7,437
cm. 0,034395	»	19,5	— 19,688	4,328		
	»	19,7	— 19,690	4,326		
						m. 7,448

Sospendendo l'aerazione e lasciando il liquido della bottiglia in comunicazione con l'esterno a mezzo di un altro tubo con lana di vetro, la tensione superficiale andava lentamente aumentando per qualche ora, e riprendeva il valore

primitivo appena ristabilita la corrente gasosa. Dopo un' aerazione prolungata per otto giorni la tensione rimase immutata.

Se si confrontano i suesposti risultati con quelli ottenuti subito dopo la distillazione, si ha la conferma che l' aria, anche se pura, fa diminuire la tensione superficiale dell' acqua almeno dell' uno per cento.

Il valore ricavato dai massimi delle singole serie di osservazioni deve perció considerarsi come il più adatto a rappresentare la costante capillare del liquido. Mi sembra perciò che alla tensione superficiale dell'acqua si debbano assegnare i seguenti valori :

$\alpha_{18^\circ} = 7{,}512^{mgr}/_{mm.} = 73{,}692^{dine}/_{cm.}$, dopo un primo contatto con aria;
$\alpha_{18^\circ} = 7{,}448^{mgr.}/_{mm.} = 73{,}065_{dine}/_{cm.}$, dopo un' aerazione completa.

15. *Ulteriore verifica del metodo di misura.* — Ottenuto in tal modo un liquido a tensione superficiale costante, volli provare anche più ampiamente il metodo di misura operando con molti altri tubi. Potetti così persuadermi che il loro raggio ha ben poca influenza; i capillari di maggior raggio hanno una lieve tendenza a dare valori più grandi, ma non sempre. Sui valori osservati influisce invece moltissimo, ed è naturale, lo spessore dell' orlo, che abbassa sempre la pressione massima, specialmente coi tubi più piccoli. Quasi tutti i capillari che hanno un orlo regolare e tagliente rispondono bene alle previsioni teoriche e forniscono resultati assai concordanti; ma non è raro il caso che qualcuno di essi conduca — forse per impurità ribelli ad ogni lavaggio — a valori non accettabili con un certo liquido, sebbene vada d' accordo coi rimanenti per un liquido diverso. Ad esempio, un capillare (0,04660) dette costantemente per l' acqua $\alpha_{18} = 7{,}754$ e fu invece normale con ogni altro liquido; due altri tubetti dello stesso raggio e spessore, lavorati in identiche condizioni fornirono 7,495 e 7,391; il primo dava delle *piccole* bolle, il secondo delle grandi. Conviene dunque avere più capillari e saggiarli tutti con ogni liquido. Si acquista, del resto, con grande facilità la pratica necessaria a costruirne degli ottimi e rapidamente.

16. *Soluzioni equimolecolari di isomeri.* — Con gli acidi maleico e fumarico, legati dalla nota relazione di stereoisomeria, si fecero delle soluzioni 0,25-normale in alcool a 95°/₀. Ecco i resultati delle misure:

	r	t^0	$\overline{p}_m$	α	α_{15}
Alcool etilico a 95 °/₀ . . . cm.	0,038181	15,2-15,5	cm. 1,318	2,476	2,472
	0,015621	14,9	3,159	2,467	
Soluz. acido maleico 0,25 n. »	0,038181	15,2	1,333	2,504	2,502
	0,015621	15,1	3,208	2,499	
Soluz. acido fumarico 0,25 n. »	0,038181	15,3	1,332	2,503	2,501
	0,015621	15	3,208	2,499	

I due isomeri producono la stessa azione. Il tubo 0,015621 è il più piccolo fra tutti quelli adoperati nelle varie misure. A causa di tale piccolezza l'orlo non risultò tagliente quanto negli altri, e quindi i valori forniti furono costantemente più bassi. Adoprando capillari finissimi e contentandosi di misure relative, si possono constatare le più lievi differenze di tensione fra due soluzioni.

17. *Alcool etilico assoluto.* — L'alcool rettificato venne prima distillato sulla calce viva e poi sul sodio, e conservato in bottiglia comunicante con l'esterno attraverso tubi essicatori. Con un semplice dispositivo si poteva riempire di alcool il vasetto di misura, che era circondato da un altro più grande contenente anidride fosforica; entrambi venivano chiusi al solido modo mediante lastrine di vetro combacianti col capillare, fra loro e con gli orli dei vasi. Usando tali cautele si ebbero valori perfettamente costanti.

r	t^0	$\overline{p}_m$	α_t	α_{15^0}
cm. 0,046600	15	1,050	2,389	2,389
0,034395	16,3	2,258	2,360	2,371
0,023268	15	2,058	2,379	2,379
0,025169	18	1,860	2,348	2,374

$$\alpha_{15^0} = 2{,}378\ ^{\text{mgr.}}/_{\text{mm.}} = 23{,}33\ ^{\text{dine}}/_{\text{cm.}}$$

18. *Misure a basse temperature.* — È noto che la tensione superficiale aumenta con l'abbassare della temperatura e che la prima è legata alla seconda da una dipendenza lineare della forma $\alpha_t = \alpha_0 (1 - \varepsilon t)$. Per i composti della serie aromatica soprafusi alla temperatura ordinaria la relazione lineare è stata confermata da Feustel [1]), il quale ha anche dimostrato che il punto di fusione non presenta alcuna singolarità. Sul comportamento dei liquidi a temperature molto basse non esistono altre ricerche all' infuori di quelle di Ramsay e Shields [2]) su alcuni composti organici alla temperatura di ebollizione dell' ossido nitroso (— 89°,8).

Le misure sull' alcool etilico vennero perciò estese sino al disotto del suo punto di fusione. Il liquido veniva posto in un'ampia provetta di vetro a pareti sottili, insieme al tubo portante il capillare, ad un agitatore, al termometro a pentano e ad un tubo essicatore. Generalmente la provetta veniva prima adattata in altra contenente un agitatore ed etere di petrolio, e poi collocata con questa in un vaso cilindrico di Dewar con finestre laterali. Si versava in esso dell' aria liquida sino ad avere la solidificazione completa dell' alcool.

Il liquido può mantenersi colloso fino a temperature bassissime e passa gradualmente allo stato solido vetroso, raggiunto il quale si rompe con forte scricchiolio per un ulteriore raffreddamento.

In questo momento (— 150° circa), secondo Carrara e Coppadoro [3]), l' alcool assume la forma cristallina. Ciò non è esatto. La massa solida con tutte le sue fenditure ha l' apparenza presentata da un bastone di vetro, quando sia stato riscaldato e poi raffreddato rapidamente. Ogni frammento di alcool conserva la sua trasparenza e le fratture provengono solo dalla rapida contrazione della massa di piccolissima conducibilità.

Il passaggio allo stato cristallino avviene invece a temperatura più alta; le fenditure scompaiono ed il solido di-

[1]) L. c.

[2]) L. c.

[3]) Carrara e Coppadoro. *Atti R. Acc. Lincei*, vol. IV, ser. V, p. 331, 1904.

venta bianco opaco e finemente granuloso. La trasformazione non avviene però sempre con le stesse modalità. Con riscaldamento più rapido e in provette di maggiore lunghezza e minore sezione, la fusione che si inizia nella parte superiore del solido vetroso è anch' essa vetrosa; si ottiene così di nuovo un liquido molto vischioso, che passa allo stato cristallino man mano che raggiunge una temperatura più alta. La rimanente porzione del liquido continua a separare le due forme solide. E quando a sua volta anche la massa cristallina incomincia a fondere, si ha un liquido non vischioso o debolmente vischioso. Le quattro forme si rendono contemporaneamente e nettamente visibili adoprando una lunga provetta ed un vaso a doppia parete profondo, di diametro pressochè eguale a quello della provetta e con poca aria liquida.

Alcune misure vennero fatte sul liquido colloso; tutte le altre si fecero invece dopo la fusione cristallina (-112^0) usando capillari diversi, con aria e con idrogeno, per temperature ascendenti e discendenti.

I risultati delle varie serie di letture furono assai concordanti; differenze notevoli si ebbero solo al disotto di -100^0 e intorno al punto di fusione, per le continue e rapide variazioni di temperatura nelle singole porzioni della sostanza. Si assegnarono i valori di t, $\overline{p}$ ed α facendo le medie di numerose osservazioni. In fine ad ogni serie si tornò a misurare alla temperatura ambiente la tensione superficiale dell' alcool adoprato, per accertarsi che non fossero intervenute variazioni.

Ecco i resultati ottenuti coi capillari 0,023429, 0,024525 e 0,025050. Nella colonna $\overline{p_m}$ sono contenute le medie dei valori osservati direttamente col primo capillare e di quelli ottenuti con gli altri, ma al primo riportati mediante la $r\,\overline{p} = r'\,\overline{p'}$, che si ricava dalla relazione fondamentale

$$\alpha = \frac{r\overline{p}}{2}\left(1 - \frac{2}{3}\,m - m^2\right),$$

quando i capillari vanno d' accordo ed hanno all' incirca le stesse dimensioni.

simi di millimetro, e scegliere fra essi quelli che formano delle piccole bolle e vanno d'accordo fra loro.

La questione relativa all'angolo di raccordamento, da un lato evitata da Cantor mediante l'uso dei capillari ad orlo tagliente, si ripresenta con tutta la sua incertezza nell'apprezzamento della pressione massima; e per l'attendibilità delle misure occorre rivolgere al manometro la più grande attenzione. L'altezza manometrica corrisponde alla pressione solo quando la parete del tubo sia perfettamente bagnata, e questa condizione non si raggiunge se non mediante la pulimentazione meccanica con tamponi di cotone ed acqua saponata; i soli lavaggi chimici appaiono insufficienti allo scopo. E poichè una tale pulimentazione è impossibile nei tubi sottili, se ne conclude che le misure fatte per mezzo delle ascensioni capillari debbono fornire quasi sempre dei valori diversi e generalmente più bassi che negli altri metodi. La condizione teorica assegnata da Ramsay e Shields per la nullità dell'angolo di raccordamento, cioè che il liquido debba trovarsi soltanto in presenza del suo vapore, difficilmente ha una rispondenza nella pratica a causa dello stato delle pareti. Nel loro classico lavoro Ramsay, Shields e Aston trovarono per l'acqua valori tali dai quali si ricava per interpolazione $\alpha_{18} = 70,87\ ^{\text{dine}}/_{\text{cm.}}$, cioè $7,22\ ^{\text{mgr.}}/_{\text{mm.}}$ che difficilmente potrebbe accettarsi come valore normale della tensione dell'acqua.

Nel metodo delle bolle si fa però sentire l'influenza dell'aria pura proveniente dal gasometro; per effetto della medesima la tensione di alcuni liquidi cresce (benzolo); quella di altri diminuisce (acqua), mentre su certi liquidi non si produce azione alcuna (alcool). Ma questo svantaggio si presenta anche nelle ascensioni capillari, a meno che non si operi nel vuoto; ad esso si aggiunge poi l'effetto delle impurità risalenti dalle pareti e cedute al menisco in modo permanente, per cui, mentre l'altezza di ascensione si stabilisce subito e rimane costante nei piccoli tubi, diminuisce nei grandi, nei quali, per la maggiore superficie in rapporto al perimetro, si richiede un tempo più grande affinchè si produca la stessa perturbazione.

L' aria pura produce sulla tensione dell' acqua una diminuzione di almeno 1 °/₀, e le maggiori deviazioni si hanno per l'acqua più fresca; si comprende allora come l'aria ambiente debba produrre effetti assai più notevoli e come possa provocare anche un aumento della tensione. Le forti divergenze avute per l' acqua da molti osservatori debbono perciò essere attribuite alle impurità accidentali.

Le misure sull' alcool etilico si possono eseguire anche all' aria purchè il liquido sia posto al riparo dall' azione dell' umidità. Le soluzioni equimolecolari di due composti stereoisomeri hanno la stessa tensione superficiale.

Le misure eseguite a basse temperature, sempre sull' alcool etilico e dopo la fusione cristallina, dimostrano che la tensione superficiale è una funzione lineare della temperatura, che il punto di fusione non presenta singolarità, che l' associazione del liquido aumenta col decrescere della temperatura. Il liquido soprafuso e vischioso presenta continue e forti variazioni di temperatura e di tensione, in dipendenza dei cambiamenti di costituzione. Su questo punto occorrono altre misure che formeranno argomento di una prossima Nota.

	t°	$\overline{p}_m$	α_t	t°	$\overline{p}_m$	α_t
$r =$ cm. 0,023429	— 112	cm. 3,035	3,539	— 30,4	2,358	2,747
	— 103	2,942	3,430	— 25	2,319	2,701
	— 97	2,910	3,392	— 19,6	2,286	2,662
	— 89	2,828	3,297	— 13	2,234	2,602
	— 80	2,776	3,230	— 8,4	2,192	2,553
	— 75,4	2,722	3,172	— 6,5	2,174	2,532
	— 69,7	2,680	3,123	— 3	2,150	2,503
	— 62	2,608	3,039	0	2,134	2,485
	— 57	2,576	3,002	5	2,098	2,443
	— 52	2,535	2,954	11	2,062	2,401
	— 40	2,435	2,837	16	2,022	2,354
	— 36	2,399	2,795	18	2,012	2,342

Calcolando ε fra temperature diverse si hanno valori assai vicini fra loro ed al valore $\varepsilon = 0,0026018$ che si ottiene per l'intero intervallo. Esso rappresenta il coefficiente di temperatura della tensione superficiale dell'alcool etilico fra 18 e — 112; la tensione è dunque legata alla temperatura da una dipendenza lineare. La rappresentazione grafica dei suesposti resultati dà infatti un diagramma perfettamente rettilineo. Anche i valori trovati per il liquido vischioso al disotto del punto di fusione, specialmente intorno alle temperature di — 128 e — 139 sembrano soddisfare a tale legge; verso — 145 si ebbero invece valori altissimi.

Facendo il rapporto fra il suddetto coefficiente di temperatura e quello di dilatazione dell'alcool ($\gamma = 0,000\ 04139$) si ottiene $\frac{\varepsilon}{\gamma} = 2,49$, numero assai prossimo al valore teorico di tale rapporto (2,33), ricavato in generale da Cantor partendo dalla espressione della tensione superficiale data da Laplace.

19. *Costituzione molecolare dell'alcool.* — Dalla costanza rispetto alla temperatura della derivata dell' energia superficiale αs, dove s è la superficie sulla quale sono distribuite un numero eguale di molecole per ogni liquido, Eötwös e Ramsay e Shields ricavarono le note espressioni che permet-

tono di calcolare il peso molecolare M della sostanza in funzione di α.

Dalla equazione

$$\alpha (M v)^{\frac{2}{3}} = K (\theta - t),$$

dove α è misurato, in $^{\text{dine}}/_{\text{cm.}}$, v è il volume specifico della sostanza in cm.^{3}, θ la temperatura critica, t quella di osservazione, e K è la nota costante di Eötwös, si ricava indicando con $d = \frac{1}{v}$ la densità del liquido:

$$(1) \qquad M = d \left\{ \frac{2,227 (\theta - t)}{\alpha} \right\}^{\frac{3}{2}}.$$

Prendendo $\theta = 243^\circ,1$ e chiamando x il fattore di associazione, si trova per l'alcool etilico, coi valori osservati per α:

$t = 16^\circ$	$M = 80,34$	$x = 1,74$
-112°	$98,06$	$2,13$

Anche la espressione

$$x = \left\{ \frac{2,121}{k} (1 + \mu(\theta - t)) \right\}^{\frac{3}{2}}$$

suggerita da Ramsay e Aston [1]) come quella che meglio rappresenta per l'alcool etilico lo stato delle cose, e dove k e μ sono delle costanti, conduce per la temperatura di fusione ai valori $M = 97,25$ e $x = 2,11$.

Per l'acqua, col valore $\alpha = 73,692$ $^{\text{dine}}/_{\text{cm.}}$, la (1) fornisce a 18°: $M = 33,81$; $x = 1,88$.

20. *Conclusione.* — Il metodo della massima pressione delle piccole bolle si presta vantaggiosamente alla determinazione rapida ed esatta della tensione superficiale, ed i resultati da esso ottenuti sono indipendenti dal diametro dei capillari e concordano con quelli ricavati dal metodo delle onde capillari. Con facilità si possono costruire degli ottimi capillari di vetro con orlo tagliente compreso fra uno e tre cente-

[1]) Ramsay e Aston. *Proc. Roy. Soc.* 1894, 162.

simi di millimetro, e scegliere fra essi quelli che formano delle piccole bolle e vanno d'accordo fra loro.

La questione relativa all'angolo di raccordamento, da un lato evitata da Cantor mediante l'uso dei capillari ad orlo tagliente, si ripresenta con tutta la sua incertezza nell'apprezzamento della pressione massima; e per l'attendibilità delle misure occorre rivolgere al manometro la più grande attenzione. L'altezza manometrica corrisponde alla pressione solo quando la parete del tubo sia perfettamente bagnata, e questa condizione non si raggiunge se non mediante la pulimentazione meccanica con tamponi di cotone ed acqua saponata; i soli lavaggi chimici appaiono insufficienti allo scopo. E poichè una tale pulimentazione è impossibile nei tubi sottili, se ne conclude che le misure fatte per mezzo delle ascensioni capillari debbono fornire quasi sempre dei valori diversi e generalmente più bassi che negli altri metodi. La condizione teorica assegnata da Ramsay e Shields per la nullità dell'angolo di raccordamento, cioè che il liquido debba trovarsi soltanto in presenza del suo vapore, difficilmente ha una rispondenza nella pratica a causa dello stato delle pareti. Nel loro classico lavoro Ramsay, Shields e Aston trovarono per l'acqua valori tali dai quali si ricava per interpolazione $\alpha_{18} = 70{,}87\ ^{\text{dine}}/_{\text{cm.}}$, cioè $7{,}22\ ^{\text{mgr.}}/_{\text{mm.}}$ che difficilmente potrebbe accettarsi come valore normale della tensione dell'acqua.

Nel metodo delle bolle si fa però sentire l'influenza dell'aria pura proveniente dal gasometro; per effetto della medesima la tensione di alcuni liquidi cresce (benzolo); quella di altri diminuisce (acqua), mentre su certi liquidi non si produce azione alcuna (alcool). Ma questo svantaggio si presenta anche nelle ascensioni capillari, a meno che non si operi nel vuoto; ad esso si aggiunge poi l'effetto delle impurità risalenti dalle pareti e cedute al menisco in modo permanente, per cui, mentre l'altezza di ascensione si stabilisce subito e rimane costante nei piccoli tubi, diminuisce nei grandi, nei quali, per la maggiore superficie in rapporto al perimetro, si richiede un tempo più grande affinchè si produca la stessa perturbazione.

L' aria pura produce sulla tensione dell' acqua una diminuzione di almeno 1 °/₀₀ e le maggiori deviazioni si hanno per l'acqua più fresca; si comprende allora come l'aria ambiente debba produrre effetti assai più notevoli e come possa provocare anche un aumento della tensione. Le forti divergenze avute per l' acqua da molti osservatori debbono perciò essere attribuite alle impurità accidentali.

Le misure sull' alcool etilico si possono eseguire anche all' aria purchè il liquido sia posto al riparo dall' azione dell' umidità. Le soluzioni equimolecolari di due composti stereoisomeri hanno la stessa tensione superficiale.

Le misure eseguite a basse temperature, sempre sull' alcool etilico e dopo la fusione cristallina, dimostrano che la tensione superficiale è una funzione lineare della temperatura, che il punto di fusione non presenta singolarità, che l' associazione del liquido aumenta col decrescere della temperatura. Il liquido soprafuso e vischioso presenta continue e forti variazioni di temperatura e di tensione, in dipendenza dei cambiamenti di costituzione. Su questo punto occorrono altre misure che formeranno argomento di una prossima Nota.

LIBRI NUOVI

Elektrochemische Umformer (Galvanische Elemente) von JOHANNES ZACHARIAS, Ingenieur. — A. Hartleben's Verlag in Wien und Leipzig. (4 Mk., rileg. 5 Mk).

Negli ultimi dieci anni l'Elettrotecnica si è estesa in un modo incredibile e si è sviluppata molto più rapidamente che negli anni precedenti. Con questo progresso anche le correnti delle pile han trovato maggiore impiego, e perciò i generatori elettrochimici sono stati grandemente migliorati, in modo che la letteratura poteva a stento seguire tali progressi.

Mentre nei tempi passati gli elementi galvanici trovavano applicazione soltanto per le sonerie, i telegrafi, i telefoni e gli usi di laboratorio, più tardi coll'invenzione delle pile a secco sono entrati nell'uso comune, per es. come batterie tascabili, ed hanno ricevuto di anno in anno applicazione sempre più vasta. Così si è in breve creato un largo campo per l'impiego di generatori elettrochimici. D'altra parte si è ottenuta anche la possibilità di produrre con trasformazioni elettrochimiche, in modo razionale, correnti di qualunque intensità.

Orbene, in questo libro si trovano esposti i progressi nella fabbricazione e nell'impiego dei generatori galvanici. È stata posta una cura speciale nel presentare i processi pratici, e nel rappresentare l'energia dei varî elettrogeneratori con tabelle e curve il più possibile molteplici e comprensive. In quest'opera poi viene esposto per la prima volta in qual modo sia possibile una razionale produzione della corrente, e come questi processi siano utilizzati nella pratica.

La divisione della materia e la massima parte del contenuto tecnico e teorico sono completamente nuovi e originali.

L'autore deduce infine dalla sua esposizione conseguenze affatto nuove di notevole importanza, così che il libro anche oltre la cerchia dei tecnici, pei quali è specialmente indicato, susciterà in ogni caso un alto interesse.

V° CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI

Cambridge, 1912

Cambridge, Giugno 1911.

Chiarissimo Signore e Collega,

Il Comitato organizzatore si onora di invitare la S. V. a prender parte al V° Congresso Internazionale dei Matematici che si terrà

a Cambridge dal 22 al 28 Agosto 1912.

I Congressi precedenti, come Ella sa, ebbero luogo a Zurigo (1897), Parigi (1900), Heidelberg (1904), Roma (1908); ed appunto in questa ultima riunione fu scelta Cambridge come sede del successivo Congresso.

Il nostro Comitato ha voluto porre il prossimo Congresso sotto gli auspici di un Comitato internazionale; ed ora si adopera con ogni cura affinchè il Congresso riesca degno degli illustri scienziati che vi interverranno, e possa recare utili servigi alla scienza.

Si riceveranno e si discuteranno i rapporti della Commissione internazionale per l' insegnamento matematico nominata al Congresso di Roma.

Ci siamo adoperati ad organizzare una serie di conferenze atte a dare una idea dello stato attuale dei principali rami delle scienze matematiche e delle loro applicazioni. Siamo lieti di annunziare che i Sigg. E. Borel, E. W. Brown, A. Kneser, E. G. H. Landau, J. Larmor, Sir W. White, accogliendo i nostri propositi, hanno aderito a tenere in seduta plenaria discorsi sopra temi che verranno indicati in seguito.

Con altra Circolare potremo precisare il programma del Congresso e dire quali accoglienze saranno offerte agli scienziati che interverranno. Oggi vogliamo soltanto richiamare l' attenzione della S. V. su questo avvenimento scientifico, che avrà luogo nell' agosto del 1912.

Il Congresso verrà diviso in quattro sezioni:

I. *Aritmetica, Algebra, Analisi.*

II. *Geometria.*

III. *Meccanica, Fisica Matematica, Applicazioni varie della Matematica.*

IV. *Questioni filosofiche, storiche, didattiche.*

Può prender parte al Congresso, con diritto a ricevere il volume degli Atti, chiunque paghi la quota di L. 1.

Gli stessi diritti (fatta eccezione per il volume degli Atti) godranno le persone di famiglia dei Congressisti pagando la quota di 12*s*.

Tesoriere del Congresso è il

PROF. SIR J. LARMOR,
St. John's College, Cambridge (Inghilterra).

Per tutti gli schiarimenti e le informazioni riferentisi al prossimo Congresso rivolgersi al Segretario generale del Comitato organizzatore.

PROF. E. W. HOBSON,
Christ's College, Cambridge (Inghilterra).

IL COMITATO ORGANIZZATORE		
	G. H. DARWIN	*Presidente*
	J. LARMOR	*Tesoriere*
	E. W. HOBSON	*Segretari generali*
	A. E. H. LOVE	*Segretari generali*
	H. F. BAKER	
	A. BERRY	

SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

Continuazione della Nota pubblicata a pag. xv.

Hanno pagato la quota 1910 i Soci:

Alessandri Camillo
Almagià Roberto
Amerio Alessandro
Arnò Riccardo
Artom Alessandro
Bettanini Giuseppe
Boggio Lera Enrico
Castelli Enrico
Chiavassa Flaminio
Chilesotti Alberto
Dainelli Alberto
De Candia Oronzo
Di Legge Alessandro
Feliciani Caio
Finazzi Luigi
Fornari Ugo
Gamba Pericle
Gervasio Guido
Gucci Pietro
Macaluso Damiano
Macchia Pietro (dimiss.)
Mastricchi Felice
Mauri Aurelio
Moretti Ettore (dimiss.)
Meda Giovanni
Officine Galileo
Pagliani Stefano
Palazzo Luigi
Piaggesi Giuseppe
Rabitti Paolo
Sandrucci Alessandro
Scarpa Oscar
Silla Lucio
Stracciati Enrico
Teglio Emilio
Umani Antonio

Hanno pagato la quota 1911 i Soci:

Bellati Manfredo
Chiavassa Flaminio
Delgrosso Carlo
Folgheraiter Giuseppe
Giolitti Federico
Macaluso Damiano
Mastricchi Felice
Naccari Andrea
Rabitti Paolo
Razeto Michele
Rizzo G. Battista
Rovelli Costantino
Sacerdote Mario

FINE DEL VOLUME I, SERIE VI.

ATTILIO MARIOTTI, *gerente responsabile.*

INDICE

Pubblicazione mensile

Anno LVII - Serie VI - Vol. II - 2° Sem. - Fasc. 7°

Luglio 1911
Pubblicato il 18 Agosto

IL NUOVO CIMENTO

FONDATO DA C. MATTEUCCI E R. PIRIA
E CONTINUATO DA E. BETTI E R. FELICI

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

INDICE:

PISA
STABILIMENTO TIPOGRAFICO TOSCANO
Ditte: Vannucchi-Galileiana-Pieraccini
1911

IL NUOVO CIMENTO

ANNO LVII

IL NUOVO CIMENTO

FONDATO DA C. MATTEUCCI E R. PIRIA

E CONTINUATO DA E. BETTI E R. FELICI

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

DIRETTORI

A. BATTELLI, A. RÒITI, V. VOLTERRA.

DELEGATI DELLA SOCIETÀ

A. GARBASSO E G. P. GRIMALDI.

REDATTORE

O. M. CORBINO.

Serie VI. — Tomo II

PISA

STABILIMENTO TIPOGRAFICO TOSCANO

Ditte: Vannucchi-Galileiana-Pieraccini

1911

NUOVE RICERCHE SUL POTENZIALE DI SCARICA
NEL CAMPO MAGNETICO.

Memoria del Prof. Sen. AUGUSTO RIGHI [1]).

1. *Complementi alle esperienze relative alle rarefazioni medie.*

In una precedente pubblicazione [2]) ho studiato l'ifluenza del campo magnetico sulla differenza di potenziale necessaria perchè abbia luogo la scarica nell'aria a rarefazione *media* (pressione di qualche decimo di millimetro), e con elettrodi in forma di dischi paralleli fra loro. I risultati delle mie numerosissime misure furono rappresentati mediante certe curve, aventi per ascisse le intensità del campo magnetico e per ordinate i valori del potenziale di scarica.

Queste curve danno una chiara idea degli effetti dovuti al campo, ed in particolare mostrano in quali circostanze la creazione del campo magnetico faccia comparire la scarica, se prima non esisteva, o la faccia cessare se prima aveva luogo. Le curve stesse mostrano pure l' esistenza di un campo *optimum*, cioè di un valore particolare di esso a cui corrisponde il minimo potenziale di scarica; fatto questo non privo d' importanza, e che il sig. Bloch [3]) ha pienamente confermato.

Nel citato lavoro mi limitai, oltre che ad un certo ordine di grandezza della rarefazione, anche a valori piccoli della distanza fra un elettrodo e l' altro. Alcune delle nuove

[1]) Estratto dalle *Memorie della R. Accademia delle Scienze* dell' Istituto di Bologna, Serie VI, Tomo VIII, 1910-11.

[2]) Rend. della R. Acc. di Bologna, 29 maggio 1910.

[3]) *Le Radium*, Février 1911, pag. 52.

esperienze, e precisamente quelle di cui rendo conto in questo primo paragrafo, si riferiscono particolarmente al caso in cui la distanza fra gli elettrodi supera la distanza critica. La disposizione sperimentale addottata è quella stessa delle prime esperienze, salvo qualche modificazione di dettaglio.

Poichè le esperienze precedenti avevano mostrato, che in certi casi il campo determina un aumento del potenziale di scarica anzichè una diminuzione, ho pensato che, se con elettrodi a distanza reciproca maggiore della distanza critica non avevo constatato nessun fenomeno degno di nota, ciò poteva provenire dal fatto, che per le distanze grandi mi ero limitato a ricercare, se il campo magnetico determinasse una diminuzione del potenziale di scarica.

Rimaneva quindi da investigare, se per le grandi distanze fra gli elettrodi si verificasse invece un aumento di potenziale di scarica per opera del magnetismo.

Le esperienze eseguite in proposito hanno dimostrato, che così realmente accade.

Ho impiegato all' uopo quello stesso tubo, con elettrodi aventi la forma di dischi paralleli, uno dei quali mobile a piacere, con cui furono fatte le più antiche mie esperienze, ed ho misurato il potenziale di scarica per vari valori della distanza fra gli elettrodi e, per ciascuna distanza, sotto l' azione di campi più o meno intensi; e tutto ciò nei due casi in cui i due dischi sono o perpendicolari o paralleli alla forza magnetica.

La pressione dell' aria nel tubo, che conservo chiuso da tempo, è di 0,68 mm.

I seguenti risultati numerici, raccolti con varie serie abbastanza complete di misure, mostrano l' andamento dei fenomeni, che meglio ancora si rileva osservando le fig. 1 e 2.

In queste tabelle le colonne C contengono i valori del campo magnetico in gauss; quelle segnate P danno in volta i valori del potenziale di scarica.

Alcuni schiarimenti sono necessari relativamente al tracciato delle curve. Queste sono distinte in ciascuna delle fig. 1 e 2 colle lettere da A ad E, corrispondentemente ai cinque

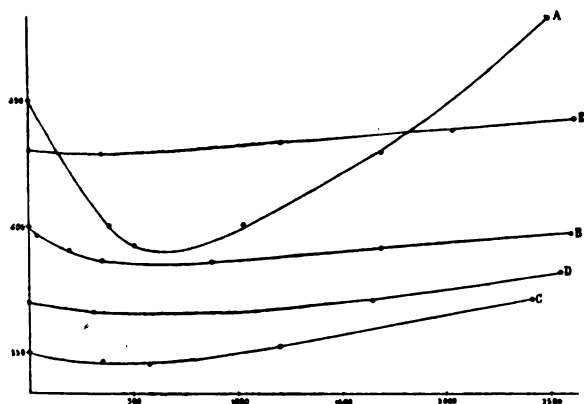



Fig. 1.

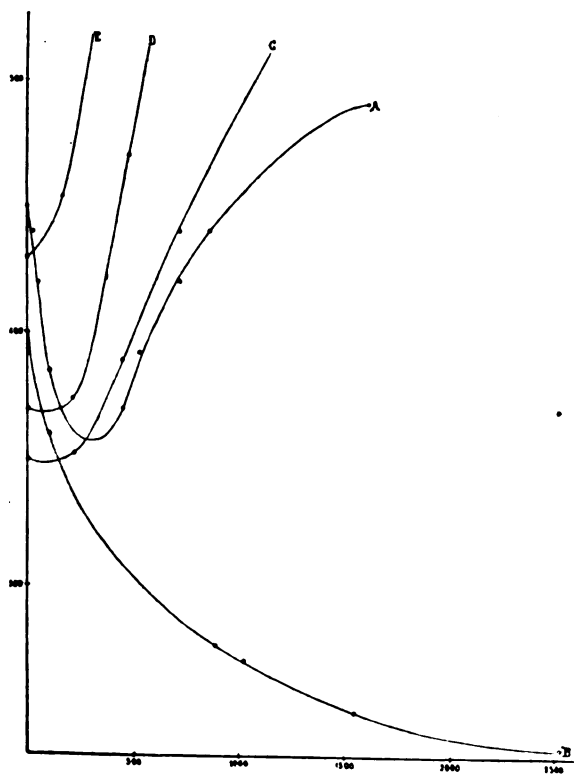



Fig. 2.

DISCHI PERPENDICOLARI AL CAMPO MAGNETICO.

Dist. in mm. fra gli elet. = 0,3		= 1		= 8		= 10		= 15	
C	P	C	P	C	P	C	P	C	P
0	450	0	400	0	350	0	370	0	430
384	400	38	396	346	346	307	366	346	428
500	392	192	390	576	345	1640	370	1200	432
1023	400	346	386	1200	352	2535	380	2010	436
1680	428	884	385	2400	370			2585	440
2460	480	2386	390						
		2586	396						

DISCHI PARALLELI AL CAMPO MAGNETICO.

Dist. in mm. fra gli elet. = 0,3		= 1		= 8		= 10		= 15	
C	P	C	P	C	P	C	P	C	P
0	450	0	400	0	350	0	370	0	430
26	440	102	360	225	352	225	374	153	454
50	420	883	276	714	440	476	470	422	640
102	385	1023	270	1330	540	861	580	570	740
450	370	1545	250	1730	660	1253	680		
524	392	2440	236	1972	740	1545	780		
714	420								
861	440								
1600	490								

valori da 0,3 mm. a 15 mm. dati alla distanza fra gli elettrodi. Le curve A e B si riferiscono dunque a casi di distanze minori della distanza critica, giacchè questa era di circa 6 mm. Sono dunque soltanto le curve C, D, E, che corrispondono allo scopo delle esperienze, cui il presente paragrafo è dedicato.

Molte altre serie di misure sono state fatte nelle medesime condizioni con risultati molto concordanti, ed ho tenuto sott' occhio le relative curve quando ho tracciato quelle delle fig. 1 e 2. Ciò mi è stato assai utile, ogni volta che i punti determinati sperimentalmente riescivano in una data curva troppo lontani l' uno dall' altro.

Dall' esame delle curve C, D, E, si vede subito, come l' effetto dominante del campo è un aumento del potenziale di scarica. Tale effetto è particolarmente marcato nel caso della fig. 2, cioè nel caso in cui il tubo è collocato in modo, che gli elettrodi siano paralleli alle linee di forza magnetiche.

È evidente la difficoltà che s' incontrerebbe, qualora si volesse render conto in dettaglio di questi fenomeni colla teoria generalmente ammessa.

2. *La spiegazione finora ammessa, e la nuova spiegazione proposta.*

Si è finora cercato di dar ragione dell' influenza del campo magnetico sul potenziale di scarica ricorrendo al cambiamento di forma delle traiettorie percorse dagli elettroni. Tale spiegazione a me sembra insufficiente per varie ragioni.

In primo luogo, nei casi di debole rarefazione essendo assai piccolo il libero cammino medio degli elettroni, l'azione del campo tendente a modificare il loro movimento fra un urto e l' altro deve verosimilmente produrre effetti poco marcati ; ed in ogni modo non si vede come si possa arrivare a rendere conto degli effetti constatati, e particolarmente delle diminuzioni e degli aumenti del potenziale di scarica, che si manifestano spesso qualunque sia l' inclinazione reciproca fra le linee di forza elettrica e quelle del campo magnetico.

Infine è da osservare, che per render conto dei casi nei quali con una differenza di potenziale inferiore a quella ne-

cessaria per la scarica, questa si manifesta non appena si crea il campo magnetico, l' ordinaria teoria presuppone che anche prima della creazione del campo esista un passaggio inosservato di elettricità nel tubo di scarica. Ora, non solo ciò non è molto verosimile, ma tutti quelli che hanno voluto mettere in chiaro l' esistenza di tale corrente preesistente all' azione del campo, hanno ottenuto risultati negativi, come rilevai già nel precedente lavoro.

Essendo questo fatto di capitale importanza ho voluto esaminarlo io pure sino dall' inizio delle nuove ricerche, ed ho effettuato per ciò l' esperienza seguente.

Messo uno degli elettrodi del tubo in comunicazione con un sensibilissimo elettrometro a quadranti (e momentaneamente col suolo), ho fatto comunicare l' altro elettrodo attraverso la solita resistenza liquida (destinata ad evitare i danni di correnti troppo intense) con uno dei poli della batteria di piccoli accumulatori, della quale l' altro polo era in comunicazione col suolo. Togliendo la comunicazione dell' elettrometro colla terra non ho mai osservata la più piccola deviazione, ben inteso essendo il potenziale della batteria minore del potenziale di scarica. Volendo rimanere nel campo dei fatti bisogna quindi convenire, che non v' è nel tubo nessun sensibile passaggio di elettricità.

Questa constatazione, da me fatta più e più volte in condizioni svariatissime, e che si accorda con analoghe precedenti osservazioni d' altri fisici, mette nell' alternativa, o di completare, se non abbandonare, l' ordinaria teoria, oppure di ostinarsi ad ammettere un passaggio di elettricità anche prima dell' azione del magnetismo, benchè di tale passaggio non si riesca a dare la dimostrazione sperimentale.

Non bisogna però dimenticare ciò che ho asserito nel precedente lavoro, e cioè che nell' atto in cui il tubo viene incluso nel circuito si ha una corrente di breve durata, che è rivelata dal galvanometro, se questo istrumento è inserito in una delle comunicazioni fra il tubo e la batteria, e che ha per effetto, a quanto penso, di produrre un accumulo di ioni positivi presso il catodo e di ioni negativi presso l'anodo. Mentre dunque non esiste ancora una corrente durevole nel

tubo, ai cui elettrodi è applicata una differenza di potenziale inferiore a quella necessaria per la scarica, il tubo stesso si trova nondimeno in condizioni diverse da quelle in cui si trovava prima d'essere messo in circuito. Tornerò più avanti su questo fatto, che mi sembra intimamente connesso cogli effetti prodotti dal magnetismo.

Non avendo fede nell'ordinaria teoria ho voluto esaminare se l'ipotesi, già messa avanti nella precedente Nota, secondo la quale il campo magnetico sarebbe in certe circostanze causa di ionizzazione, si prestasse abbastanza bene alla spiegazione dei fenomeni.

Un tale ipotesi non mi sembra priva di fondamento. Infatti, nello stesso modo che il campo magnetico sotto certe condizioni aumenta o diminuisce la stabilità delle coppie neutre elettrone-ione positivo, da me ideate per rendere conto dei fenomeni presentati dai raggi magnetici (o magneto-catodici), esso modificherà in modo analogo le traiettorie percorse dagli elettroni che fanno parte della struttura degli atomi, allargandole se il campo agisce in direzione opportuna. Un esempio gioverà alla chiarezza.

Si consideri in un atomo un elettrone che si mnova circolarmente, e si crei un campo magnetico perpendicolare al piano della traiettoria e diretto in modo, che la forza elettromagnetica agente sull'elettrone in moto risulti diretta dal centro della traiettoria stessa verso l'esterno. Tale forza tenderà evidentemente ad allontanare l'elettrone, e se avrà intensità sufficiente potrà, se non liberarlo, almeno permettergli di separarsi alla più lieve perturbazione esterna. Un campo elettrico, che esista simultaneamente al campo magnetico, potrà agevolare questo risultato, a meno che non si verifichi il caso particolare che la forza elettrica tenda a spingere l'elettrone verso l'atomo.

Non ho affatto la pretesa di ritenere, che i fatti già noti, e quelli che qui andrò descrivendo, forniscano la dimostrazione della verità contenuta in quell'ipotesi; ma credo che essi presentino un soddisfacente accordo colle conseguenze da essa tratte. In ogni modo l'ipotesi stessa è stata per me l'ispiratrice delle nuove ricerche.

Poichè l' accumularsi di ioni presso gli elettrodi, di cui ho fatto cenno più sopra, crea in vicinanza della loro superficie un campo elettrico, mentre nelle altre regioni del tubo il campo stesso è piccolissimo o nullo, mi sembra verosimile che là appunto il campo magnetico debba principalmente manifestare la sua azione ionizzatrice. Ma è sopratutto presso il catodo che la supposta *magnetoionizzazione* tende a provocare la scarica durevole nel tubo. Infatti gli elettroni creati in tal modo, o almeno quelli di essi che sfuggono ad una immediata neutralizzazione per l' incontro d' un ione positivo, acquisteranno presto una velocità considerevole; quelli invece che si creano per magnetoionizzazione presso l' anodo saranno tosto da questo assorbiti, senza cooperare ad iniziare la scarica.

Avendo adottato in via di tentativo questo punto di vista, diveniva necessario assicurarsi anche meglio dell' esistenza di quegli strati di ioni, e rendersi conto per quanto è possibile del modo con cui si producono e degli effetti ai quali possono dar luogo.

3. *Corrente o scarica di polarizzazione.*

La produzione di ioni, che permangono nel tubo finchè esista fra gli elettrodi una differenza di potenziale minore del potenziale di scarica, fu da me desunta dalla constatazione della corrente di breve durata, che si manifesta nell' atto di stabilire le comunicazioni fra tubo e accumulatori, non che dai caratteri che tale corrente presenta.

Tali caratteri sono i seguenti. Interrotto il circuito per un istante brevissimo e chiudendolo di nuovo quella corrente non si riproduce; ma essa si ottiene nuovamente se la durata dell' interruzione non fu molto breve, e tanto più intensa quanto più durò l' interruzione stessa. Infine, invertendo le comunicazioni fra tubo e sorgente elettrica si ha una corrente assai più intensa che colla semplice chiusura del circuito.

Mi pare, che per spiegare questi fenomeni si debba ragionare nel modo seguente. I pochissimi elettroni liberi eventualmente contenuti nel gas e quelli che possono essere emessi spontaneamente dal catodo iniziano, allorchè il circuito vien

chiuso, il noto processo della scarica ionizzando per urto le molecole. Quelli fra i ioni positivi in tal modo creati, che non si neutralizzano con elettroni, si portano verso il catodo, mentre gli elettroni, ed i ioni negativi (prodotti dall'unirsi di elettroni ad atomi neutri) si portano all'anodo. Con ciò il campo elettrico, mentre cresce presso gli elettrodi, diminuisce nel gas e finisce coll'annullarsi, con sospensione d'ogni ulteriore fenomeno, se la differenza di potenziale fra gli elettrodi è abbastanza piccola. Il passaggio della corrente rimane dunque prontamente sospeso.

Le condizioni degli elettrodi del tubo · sono allora, sotto un certo aspetto, analoghe a quelle di elettrodi immersi in un elettrolita e polarizzati da una corrente. Bisogna aspettarsi dunque, che il tubo dia una corrente di *polarizzazione* quando, avendo tolto le comunicazioni fra la batteria d'accumulatori e gli elettrodi, si fanno questi ultimi comunicare con un sensibile galvanometro. Ciò infatti si osserva.

Questa corrente o, forse meglio, scarica di polarizzazione ha una brevissima durata, e la sua intensità integrale, cioè la quantità d'elettricità che la costituisce, dipende naturalmente: 1.° dal tempo t_0 durante il quale il tubo rimase in comunicazione colla batteria, 2.° dal tempo t durante il quale il tubo rimase isolato prima di essere messo in comunicazione col galvanometro.

Conservando a t un valore costante la deviazione galvanometrica è risultata quasi indipendentemente da t_0.

Per esempio in un caso, per t_0 eguale a

1 — 15 — 60

secondi, la deviazione fu rispettivamente:

24 — 25 — 25,8

millimetri della scala galvanometrica [1]).

Si vede così quanto sia rapida la formazione degli strati di ioni sugli elettrodi, e si può praticamente ammettere che

[1]) Ogni millimetro corrisponde ad una corrente costante di $4,75 . 10^{-10}$ ampère.

con $t_0 = 30$ secondi la polarizzazione degli elettrodi sia completa.

D'altra parte lo sparire della polarizzazione dopo aver isolati gli elettrodi è invece lenta e graduale, mentre è praticamente istantanea, se si stabilisce una comunicazione metallica fra gli elettrodi.

Per avere una idea della velocità, con cui spontaneamente si attenua ad elettrodi isolati la quantità di ioni accumulati, basta misurare ripetutamente la corrente di polarizzazione, dopo che il tubo è rimasto isolato per un tempo più o meno lungo. Ecco i risultati ottenuti in una fra le molte serie di misure da me eseguite. Adoperai un tubo (che sarà descritto più avanti) avente un catodo costituito da una lamina di alluminio cilindrica applicata contro la parete interna del tubo, ed un anodo cilindrico esso pure e concentrico.

Al tempo t si diedero successivamente i valori numerici (in secondi) notati nella prima linea della seguente tabella; la seconda linea contiene le corrispondenti deviazioni d ottenute al galvanometro. Il tempo t_0 fu costantemente 30".

t	1	5	10	30	60	120	240
d	52	48	45,5	42	38	33	28

La pressione dell'aria nel tubo era un centesimo di millimetro; la batteria dava 2450 volta.

La curva della fig. 3, che fu disegnata prendendo t come ascissa e d come ordinata, mostra a colpo d'occhio come la provvista di ioni nel tubo diminuisca dapprima rapidamente, poi in modo di più in più lento. Curve di andamento simile ottenni sempre con tubi di forme e in condizioni svariate.

Il graduale distruggersi degli strati di ioni avvolgenti gli elettrodi ha luogo verosimilmente per via di neutralizzazioni reciproche fra essi, e sopratutto fra essi e gli elettrodi. Era dunque da prevedere che un campo magnetico influisse

su questo fenomeno, per esempio, secondo la teoria ammessa, in causa del mutar di forma delle traiettorie degli elettroni.

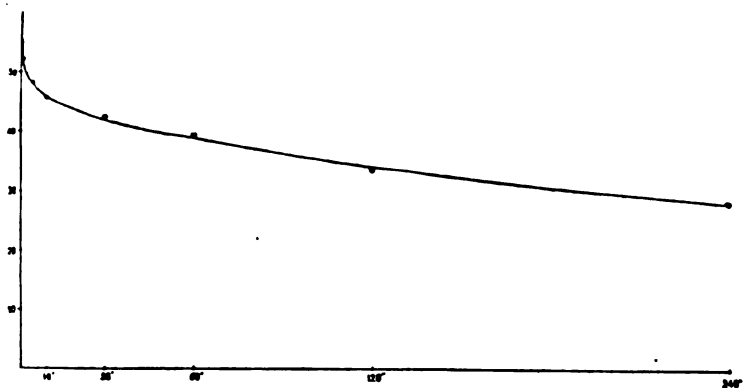



Fig. 3.

Apposite esperienze all' uopo istituite confermano la previsione. Per esse adoperai un inversore a pozzetti di mercurio ben isolati [1]), col quale era possibile far comunicare i due elettrodi del tubo, ora coi poli degli accumulatori, ora coi serrafili del galvanometro. Generalmente tenevo per mezzo minuto primo il tubo in connessione colla batteria, poi lo isolavo per 10 secondi prima di farlo comunicare collo strumento di misura, il quale colla sua deviazione misurava la quantità di ioni ancora esistenti. Durante quell' intervallo di 10", ora il campo non esisteva, ora invece era in azione. In questo secondo caso ottenni sempre una deviazione minore.

Reco come esempio alcune misure fatte con un tubo cilindrico avente come elettrodi due dischi perpendicolari all' asse del tubo, ed il cui diamatro è poco minore di quello del tubo stesso. La loro distanza è circa 2 centimetri, e l' aria

[1]) In tutte le esperienze, in cui s' impiegano molti accumulatori e un sensibile galvanometro o elettrometro, è indispensabile il più accurato isolamento di quei conduttori, che non devono comnnicare colla terra. In particolare é necessario rivestire a caldo con cera lacca la superficie esterna del tubo all' intorno dei punti da cui escono i conduttori comunicanti coi due elettrodi.

ha la pressione di circa un cinquantesimo di millimetro. Un campo di 3540 gauss poteva crearsi al momento opportuno.

Orbene, senza campo magnetico la deviazione era 23,9; facendo agire il campo, la deviazione era invece 6,9.

Esperienze simili furono fatte successivamente con cinque tubi di forme assai differenti e con svariate pressioni dell'aria interna, ed il risultato, non sempre così accentuato come nel caso riferito, fu sostanzialmente il medesimo, e cioè constatai sempre che il campo accelerava la neutralizzazione dei ioni entro il tubo. Anche dopo aver fatto ruotare di 90° la direzione del campo magnetico constatai la diminuzione della deviazione galvanometrica.

Ammesso che un tal risultato sia generale, esso è spesso in disaccòrdo colla previsione basta sulle deviazioni prodotte dal campo sugli elettroni in moto, giacchè in certi casi quelle deviazioni dovrebbero ostacolare la neutralizzazione delle cariche. Invece si spiega bene l'accelerarsi della scomparsa dei ioni per opera del campo magnetico, se si ammette la nuova ipotesi proposta, e cioè una ionizzazione prodotta dal campo, particolarmente efficace in prossimità del catodo.

4. *Circostanze che influiscono sul potenziale di scarica.*

Volendo istituire le ricerche su tubi a rarefazione piuttosto grande ne ho dapprima adoperato uno della forma ordinaria, cioè munito di elettrodi paralleli di forma circolare e più o meno lontani l'uno dall'altro, collocato fra i poli dell'elettro calamita di Ruhmkorff, ora in modo che i dischi fossero normali alla direzione del campo, ora disponendoli parallelamente a questa direzione.

Constatai subito che, anche a rarefazioni assai grandi, il campo magnetico in certi casi fa diminuire il potenziale di scarica e in altri lo fa aumentare; ma pur vincendo le difficoltà altrevolte segnalate, ebbi grande irregolarità nei risultati numerici. Accadeva poi non di rado ed in modo più pronunciato che colle minori rarefazioni il noto fenomeno, che una volta iniziata la scarica in determinate condizioni, essa perdurava anche se le condizioni stesse venivano poscia modificate in guisa da richierdersi per l'iniziarsi di essa una

differenza di potenziale di gran lunga maggiore di quella effettivamente applicata. Poi mi accorsi, che tale fenomeno si modificava spesso toccando per un momento col dito l'esterno del tubo, o avvicinandovi dei conduttori, o rendendo più o meno buona la proprietà isolatrice della superficie esterna del tubo di vetro. Inoltre constatai, che i fenomeni mutavano alquanto allorchè, pur non facendo variare la differenza di potenziale, si modificava il valore assoluto del potenziale di ciascun elettrodo, per esempio mettendo in comunicazione col suolo ora l'uno ora l'altro dei poli della batteria di accumulatori.

Tutto ciò indicava la formazione di cariche elettriche sulla parete del tubo, le quali cariche subivano naturalmente delle modificazioni per la presenza dei conduttori circostanti. Avendo infatti resa conduttrice la superficie esterna del tubo coll'incollarvi una foglia di stagno, che poi tenni in comunicazione col suolo, le irregolarità e le incertezze sparirono, pur restando l'influenza dei valori assoluti del potenziale. Per studiare questo fenomeno diedi al tubo di scarica la forma indicata dalla fig. 4.

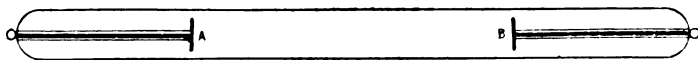



Fig. 4.

Il tubo è cilindrico, e porta come elettrodi A, B due dischetti d'alluminio perpendicolari al suo asse e lontani circa 15 centimetri l'uno dall'altro. Essendo il diametro esterno del tubo poco minore di quello del foro praticato nei nuclei di ferro dei due rocchetti, esso può esservi facilmente introdotto. E siccome l'elettrocalamita è mobile su due guide parallele all'asse dei rocchetti, si può far in modo, che uno degli elettrodi si trovi in mezzo al campo magnetico, mentre l'altro sta allora entro uno dei rocchetti a metà della sua lunghezza. Con tale disposizione il secondo elettrodo è praticamente sottratto all'azione del campo, almeno finchè la corrente magnetizzante non è molto intensa.

Per rendermi esatto conto di questa circostanza ho creduto necessario di misurare l' intensità del campo magnetico per varie intensità della corrente magnetizzante, sia nel punto di mezzo della distanza (circa 5 centimetri) fra le faccie polari dei rocchetti, sia a metà lunghezza nell'interno d'ognuno di questi, per mezzo d' un piccolo rocchetto collegato ad un galvanometro balistico. Ecco il risultato di queste misure.

intensità della corrente in ampère	Campo magnetico in gauss		
	entro il rocchetto di sinistra	in mezzo fra i poli	entro il rocchetto di destra
1	0	356	0
2	0	1126	—
4	—	1931	0
8	—	3018	—
12	—	4064	7
14	48	4450	0
16	113	4829	88
20	394	5473	388
23,5	650	5955	650

La non eguaglianza e l' andamento irregolare dei numeri della 2ª e 4ª colonna sono verosimilmente dovuti ad eterogeneità nel ferro dei due nuclei.

Per le esperienze seguenti l' elettrodo A del tubo si trovava nel mezzo del campo fra i poli, mentre l' elettrodo B si trovava entro il rocchetto di destra. Inoltre per le ragioni dette, il tubo era esternamente rivestito con foglia metallica comunicante col suolo.

Colla disposizione descritta è facile mettere in evidenza l' influenza esercitata dal valore assoluto del potenziale dei due elettrodi, come pure l' influenza del segno della loro ca-

rica, ed ecco una serie di misure, durante le quali la pressione dell'aria nel tubo era di 0,02 mm.

La differenza di potenziale V applicata agli elettrodi, circa 3000 volta, era assai inferiore al potenziale di scarica.

Cambiando le comunicazioni e mettendo a terra uno dei poli della batteria, si potevano realizzare i quattro casi seguenti:

1. Potenziale di A $= + V$; potenziale di B $= 0$.
2. » » $= 0$; » » $= + V$.
3. » » $= - V$; » » $= 0$.
4. » » $= 0$; » » $= - V$.

Orbene, mentre perchè si stabilisse nel tubo la corrente (rivelata dalla brusca e permanente deviazione del galvanometro incluso nel circuito) nei casi 2, 3 e 4 occorreva un campo magnetico di oltre 5000 gauss, bastava un campo di 1250 nel caso 1 [1]).

Lasciando in disparte i casi 2 e 4, nei quali, per essere a potenziale zero tanto l'elettrodo A che il rivestimento esterno del tubo, il campo elettrico intorno all'elettrodo A non può avere che una intensità debolissima, resta rimarchevole la differenza fra i casi 1 e 3.

Essa può essere attribuita principalmente a queste due circostanze, e cioè 1° al fatto che nel caso 1 funziona come catodo la parete intorno ad A, e cioè si ha in certo modo un catodo che avvolge e circonda l'anodo A, mentre nel caso 2 avviene l'opposto; 2° ad una diversità di comportamento fra catodi di diverse sostanze.

Contro questa influenza della natura del corpo, su cui vanno a terminare le linee di forza elettrica, parla l'esperienza seguente. Un tubo simile a quello della fig. 4, il quale però in luogo del rivestimento metallico esterno ne ha uno interno, costituito da una laminetta d'alluminio piegata a cilindro, applicata contro la parete del tubo e comunicante col suolo, dà sostanzialmente gli stessi risultati or ora descritti.

[1]) Questa ed alcune delle esperienze che descriverò più oltre furono già concisamente descritte altrove (*Comp. Rend.* 30 Janvien 1911).

Tuttavia, non parendomi da escludere a priori una qualche influenza della natura del catodo, o generalmente dei corpi che, ricevendo linee di forza, possono come tali comportarsi entro un tubo di scarica, ho creduto bene istituire ricerche speciali col tubo, di cui la fig. 5 mostra la sezione

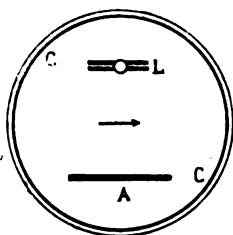



Fig. 5.

trasversale. In qnesto tubo (diametro circa 4 cent.) il catodo è costituito da una lamina cilindrica di alluminio C applicata contro la sua parete interna, mentre l'anodo è una lastra rettangolare A (3 c. per 1,7 c.). Questa lastra è eccentrica, onde lasciar posto ad un'altra L ad essa parallela lunga 5 c. e larga 1,2 c. costituita da due lamine sovrapposte, una d'alluminio e l'altra di diversa sostanza p. es. di piombo. Questa doppia lamina L può girare intorno ad un asse parallelo all'asse del tubo, ed essere disposta in modo da presentare all'anodo A ora la faccia di alluminio ora quella di piombo, essendo a tal uopo fissata ad un giunto smerigliato.

Nell'esperienza eseguita l'aria nel tubo aveva la pressione di 0,012 mm., la batteria forniva agli elettrodi una differenza di potenziale di 1730 volta, e al momento opportuno si creava un campo di circa 2500 gauss diretto come la freccia della fig. 5. Ecco ciò che ho osservato.

Mentre senza campo la corrente non si stabiliva nel tubo, la corrente stessa non si iniziava neppure col campo, se verso l'anodo era rivolta la faccia d'alluminio della doppia lamina L. Ma se verso l'anodo era rivolto il piombo la corrente si produceva. Lasciando poi sussistere il campo e facendo girare la doppia lamina in modo continuo, la corrente cessava ogni volta che all'anodo si volgeva la faccia d'allu-

minio, per ristabilirsi quando invece era il piombo che riceveva dall' anodo delle linee di forza elettrica.

Col platino al posto del piombo ho avuto un risultato analogo, ma assai meno pronunnciato, mentre che con vetro, argento, rame, ottone, zinco e bismuto non ho ottenuto risultati sicuri.

Mentre dunque la differenza fra i casi 1 e 3 precedenti è principalmente dovuta alla forma dei due elettrodi, sussiste certamente almeno pel piombo una certa attitudine a favorire la scarica, quando su di esso vanno a terminare delle linee di forza elettrica. Il fatto potrebbe ascriversi a traccie di radioattività, o a maggior tendenza ad emettere elettroni sotto l' azione della forza elettrica. In ogni modo si tratta d' un fenomeno probabilmente estraneo a quelli studiati nel presente lavoro.

Si potrebbe ancora pensare, che il modo leggermente diverso di comportarsi fra catodi di diversa natura fosse legato ad una diversa facilità di lasciare uscire i gas occlusi. Questa idea, che forse meriterebbe qualche considerazione, è suggerita dal fatto seguente da me molte volte constatato. Se si determina il valore del potenziale di scarica per un dato tubo, e poi coi noti metodi (ulteriore rarefazione accompagnata dal passaggio d' una corrente nel tubo) si cerca di sottrarre agli elettrodi i gas aderenti o occlusi, e, ridotta la pressione al valor primitivo si rinnova la misura, si trova sempre un notevole aumento del potenziale di scarica.

Dalle descritte esperienze si trae l' impressione che, se davvero il campo magnetico può ionizzare il gas, ciò principalmente avviene presso il catodo, ciò che si accorda con quanto fu detto nel § 2. Però non resta escluso, che la magnetoionizzazione si produca anche altrove, ed è anzi per chiarire questo punto che furono istituite esperienze, che saranno descritte più avanti.

5. *Misure del potenziale di scarica nel campo magnetico in casi di grande rarefazione.*

Visti gl' inconvenienti prodotti dal vetro delle pareti del tubo, ho dovuto adottare, per eseguire una serie sistematica

di misure, dei tubi, nei quali uno degli elettrodi è costituito da una lamina metallica applicata alla parete. La fig. 6 mostra un simile tubo, col quale ho potuto fare molte e concordanti determinazioni.

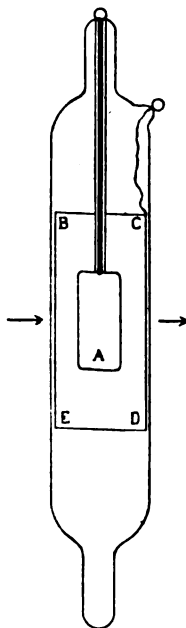



Fig. 6.

Mentre uno degli elettrodi è costituito dalla lamina cilindrica BCDE (altezza del cilindro 10 cent. diametro 3,5), l' altro è una lamina piana A (3 cent. per 1,7). Il tubo può essere girato intorno al proprio asse, e quindi essere collocato in guisa, che l'elettrodo A sia o parallelo o perpendicolare alla direzione, indicata dalle freccie nella figura, del campo magnetico.

In causa della differenza di forma fra i due elettrodi, e della circostanza che l' elettrodo A non ha forma di rivoluzione coassiale al tubo, si dovranno esaminare quattro casi diversi. Infatti, per ciascuna delle sue orientazioni principali della lastra A, questa può essere anodo o catodo.

L' effetto prodotto dal campo magnetico è differente nei quattro casi. Si hanno cioè quattro diverse curve rappresentatrici del fenomeno, costruite nel solito modo, cioè prendendo per ascissa il campo e per ordinata il corrispondente potenziale di scarica. In un gruppo di misure coll' aria a 0,056 mm. di pressione ho raccolto i dati della tabella seguente.

Lastra A +				Lastra A —			
perpendic. al campo		parallela al campo		perpendic. al campo		parallela al campo	
P	C	P	C	P	C	P	C
300	153	400	422	380	76	580	—
	430	450	383		254	630	0
400	127		450	500	38	640	137
	603	550	229		317	690	1593
610	76		1370	550	13	695	2474
	1447	590	216		383	700	5473
650.	61		1880	620	396		
	1750	660	152	850	643		
700	61		2535	1050	947		
	.....	750	127	1410	1690		
840	13	845	102	1720	3307		
	3175	930	77	1830	5196		
A		B		C		D	

La disposizione dei numeri in questa tabella è differente da quella delle tabelle riportate nel § 1, e cioè proviene dall' avere alcun poco modificato il metodo delle misure. Anzichè, come in passato, dare al campo magnetico un determinato valore e poi aumentare d' una unità per volta il numero degli accumulatori sino ad avere la scarica, mi sono persuaso che vi è vantaggio a fare l' inverso, e cioè dare un

determinato valore al potenziale fornito dalla batteria, e poi far variare lentamente l'intensità del campo magnetico (per mezzo di reostati a corsoio inseriti nel circuito della corrente magnetizzante) sinchè la scarica si produca [1]).

Così nel caso della prima delle misure registrate in detta tabella, dopo aver dato alla differenza di potenziale il valore di 300 volta, feci crescere il campo gradatamente a partire da zero sinchè, arrivato a 153 gauss, la corrente bruscamente si produsse.

Siccome però in molti casi ad uno stesso valore del potenziale di scarica possono corrispondere valori diversi (due e qualche volta tre) del campo magnetico così, dopo quella prima determinazione, occorreva cercare se esistevano altri valori del campo. Perciò diedi a questo un alto valore, per esempio 2000 gauss, e visto che la corrente non passava, lo feci gradatamente diminuire. Arrivando a 430 gauss la corrente di nuovo si produsse. E siccome da 2000 gauss in più non si ebbe corrente, così conclusi, che a 330 volta corrispodono i valori 153 e 430 gauss del campo, come pure che v'è corrente nel tubo solo se il campo magnetico ha un valore compreso fra questi due limiti.

Se per un certo valore del campo maggiore di 430 gauss si fosse nuovamente stabilito il passaggio della corrente nel tubo, avrei dovuto registrare nel quadro questo terzo valore. È assai probabile che in qualche caso il non aver trovato un terzo valore si debba a ciò, che per trovarlo sarebbe stato necessario realizzare campi di molto grande intensità.

Alle quattro serie di misure della precedente tabella, distinte colle lettere A, B, C, D, corrispondono ordinatamente le curve segnate colle stesse lettere nella fig. 7.

L'andamento delle tre prime somiglia assai a quello di molte delle curve del caso di media rarefazione, mentre l'andamento della D (catodo piano perpendicolare al campo) è assai differente, in quanto che con potenziali minori del poten-

[1]) Ho trascurato sempre le scariche momentanee, che qualche volta precedono lo stabilirsi della scarica permanente.

ziale di scarica ordinario (cioè senza campo) il campo magnetico non produsse effetto sensibile, e fu necessario ricorrere a

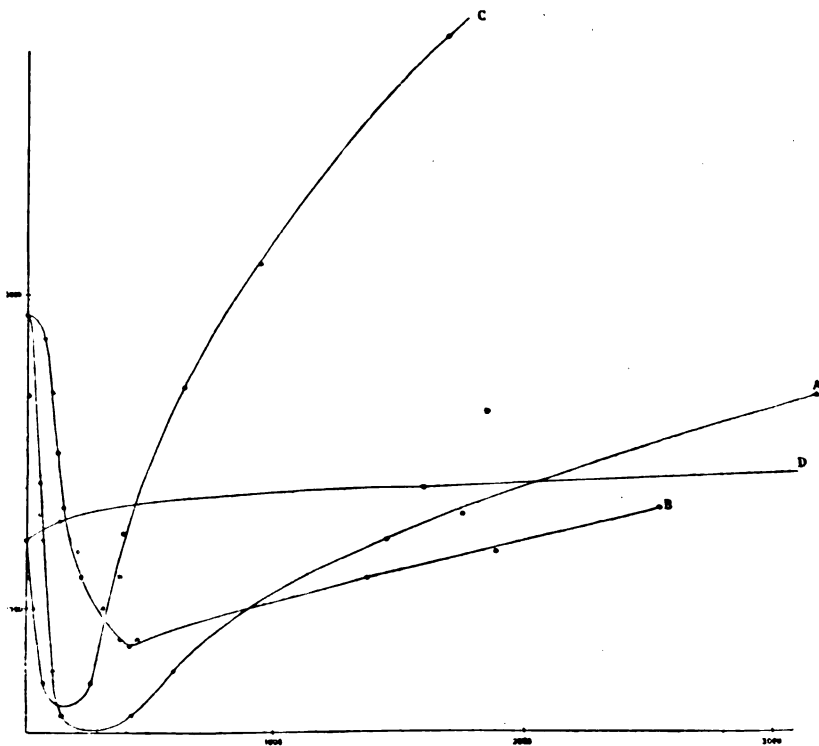



Fig. 7.

potenziali più elevati per constatare un effetto, e precisamente riconoscere che il campo fa aumentare il potenziale necessario alla produzione della corrente.

6. *Esperienze con tubi aventi elettrodi di forme varie.*

Sia secondo l'ordinaria spriegazione, sia secondo la nuova, che serve a completare la prima, la forma degli elettrodi deve esercitare una considerevole influenza sull'andamento dei fenomeni.

Infatti, è in tubi diversi necessariamente differente la distribuzione e forma delle linee di forza come pure l'inten-

sità del campo elettrico presso i vari punti della superficie del catodo. Non era dunque senza interesse l'istituire misure analoghe a quelle del paragrafo precedente, con tubi aventi elettrodi di svariate forme e variamenti disposti. Mi limiterò quì a recare tre esempi.

a) Il tubo di scarica è rappresentato dalla fig. 8, e contiene aria a 0,03 mm. di pressione. Uno degli elettrodi B consiste in un tubo d'alluminio applicato contro la parete,

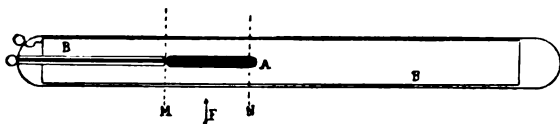



Fig. 8

mentre l'altro A è un cilindro dello stesso metallo lungo 5 centimetri circa e grosso mezzo centimetro. Nelle due prime serie di misure il tubo fu introdotto nei nuclei dell'elettrocalamita, in modo che il campo magnetico, per tal modo diretto nel senso del suo asse, agisce quasi esclusivamente sulla porzione del tubo corrispondente all'elettrodo A. Le faccie polari dell'elettrocalamita arrivavano infatti in M ed N. Nelle altre due serie di misure il tubo era collocato trasversalmente al campo, e cioè questo aveva la direzione della freccia F.

La tabella seguente porge i risultati numerici ottenuti, coi quali ho poi disegnate le curve della fig. 9 [1]).

[1]) Per economia di spazio non compaiono nella figura quelle porzioni di curva che corrispondono ai più grandi valori del campo e del potenziale.

Campo parallelo al cilindro A				Campo perpendicolare al cilindro A			
A positivo		A negativo		A positivo		A negativo	
P	C	P	C	P	C	P	C
200	482	390	362 / 483	660	744 / 2240	1030	0
450	181	470	360 / 543	840	483 / 4490	1400	45
865	180	950	362 / 1527	2160	392	1750	80
1300	151	1310	360 / 2493	2880	392	2600	180
1760	151	1770	362 / 3831			3300	271
2650	150	1850	362 / 4143				
3400	153						
4300	151						
A		B		C		D	

Per distinguere le curve della fig. 9 ho segnato presso di esse le stesse lettere, che nella precedente tabella designano le varie serie di misnre.

Avrò occasione più avanti di mostrare la curva B ottenuta collo stesso tubo con pressione interna più elevata, e allora si vedrà che la curva stessa, dopo la grande salita di destra, raggiunge una massima altezza per poi ridiscendere. Colla rarefazione più spinta per giungere fin là sarebbe stato necessario creare campi magnetici assai più intensi di quelli disponibili.

b) Un secondo esempio l'offre il tubo da scariche rappresentato in sezione dalla fig. 10. Entro il tubo di vetro sono applicate contro le pareti quattro eguali lastre d'alluminio, le quali, salvo il piccolo intervallo che le separa nel

senso delle generatrici, costituiscono col loro insieme un cilindro. Due di esse A, A, fra loro comunicanti, costituiscono

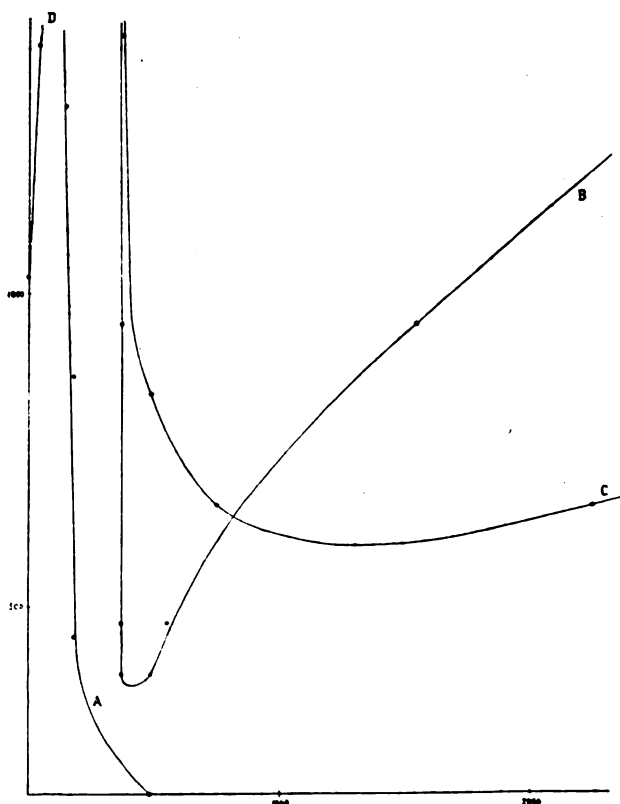



Fig. 9.

uno degli elettrodi, le altre due B, B, costituiscono l'altro. Si hanno dunque due elettrodi di forma identica, senza, tutta-

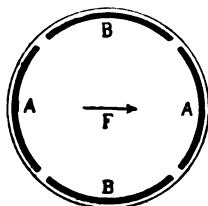



Fig. 10.

via, che resti scoperta la parete di vetro (salvo le strette strisce fra una lastra e l' altra). Il campo magnetico agisce nella direzione della freccia F, cioè secondo la retta che congiunge i centri delle due lastrine costituenti uno degli elettrodi A A. Questo elettrodo era anodo nella prima serie delle misure seguenti, e catodo nella seconda. La pressione nel tubo era 0,04 mm.

Elettrodo A A +		Elettrodo A A —	
P	C	P	C
1570	0	350	229, 330
1620	25		
1830	102	415	160, 632
1980	153		
2190	343	530	127, 1992
2370	512		
2450	595	590	120, 5674
2830	6240		
		740	114
		930	102
		1040	102

Le curve della fig. 11 sono disegnate coi precedenti numeri, ed i segni +, —, servono a distinguerle. Per non dare alla figura dimensioni soverchie, non solo si sono soppresse le porzioni relative ai più elevati valori del campo, ma si sono disegnate le due curve una dentro l'altra in grazia d'un opportuno spostamento degli assi di riferimento. È degna di nota la grande diversità fra le due curve, diversità che in

questo caso speciale è quella che, in parte almeno, si accorda coll' ordinaria spiegazione dei fenomeni.

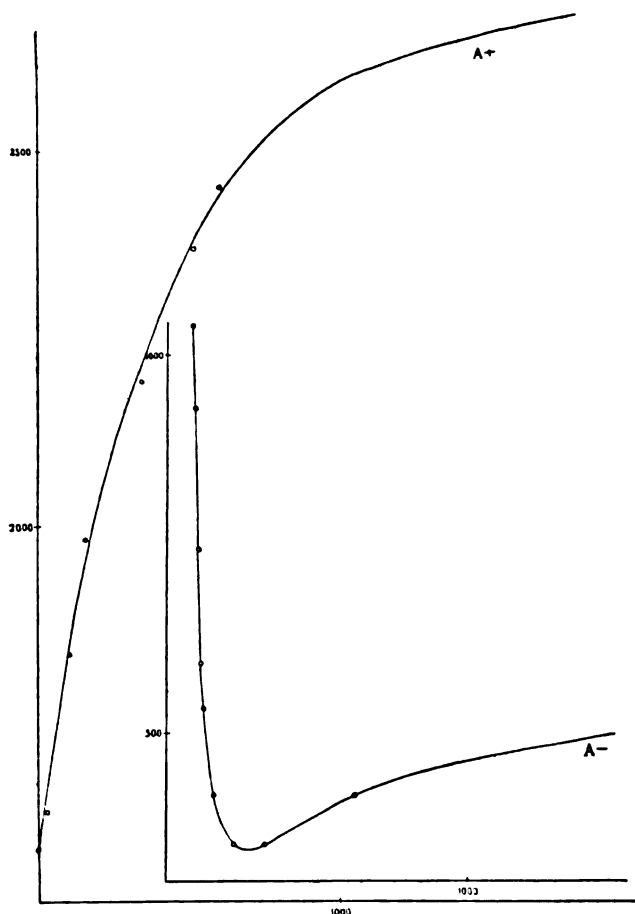



Fig. 11.

I due esempi precedenti *a*), *b*) mettono in evidenza la varietà dei fenomeni, ma anche qualche carattere costante, comune cioè ai vari tubi. Non sarebbe facile servirsi dei dati precedenti a scopo di verifica qualitativa d' una qualunque delle spiegazioni, in causa delle forme speciali degli elettrodi.

Ad uno scopo di questo genere si presterebbe meglio il terzo esempio che segue.

c) Il tubo adoperato differisce da quello della fig. 8 soltanto in ciò, che l'elettrodo A è lungo quanto il tubo. Introdotto quest' ultimo nei rocchetti, le condizioni dell' esperienza sono sensibilmente quelle di un c ampo elettrico cilindrico e d'un campo magnetico uniforme, le cui linee di forza sono perpendicolari alle linee di forza elettrica; ed in questo caso speciale è possibile determinare la forma delle traiettorie percorse dagli elettroni emessi dal catodo.

Mi limiterò al caso in cui il cilindro centrale è catodo; ma darò i risultati ottenuti con due differenti gradi di rarefazione dell' aria entro il tubo.

Pressione = 0,012		Pressione = 0,1	
P	C	P	C
750	5141		259
2100	5231	190	405
	563		5200
2860	1126		236
	5392	309	900
	563		5151
2950	1528		225
	5310	940	2800
	475		4919
3800	2800		220
	5419	1480	4505
			4849

La fig. 12 mostra la curva costruita coi numeri relativi alla pressione 0,1. Per la pressione 0,012 si avrebbe una

curva simile a quella della fig. 12, ma limitata ai più bassi potenziali. La curva sarebbe quindi costituita da due tratti separati fra loro.

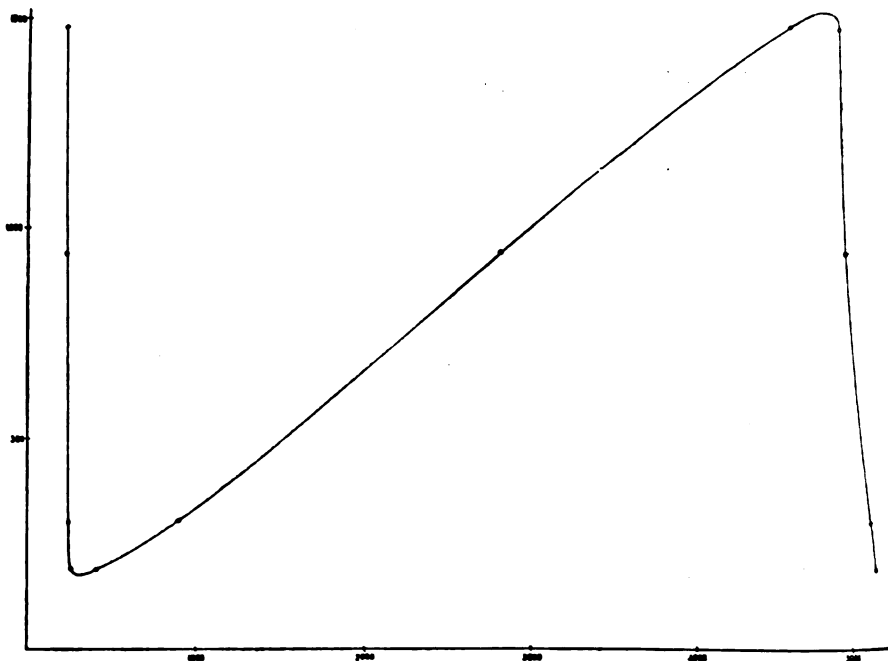



Fig. 12.

La curva fig. 12 sembra essere il tipo più generale rappresentante la relazione fra intensità di campo magnetico e potenziale di scarica, almeno per i tubi il cui anodo è cilindrico e circonda il catodo [1]). Si notano in essa due tratti poco differenti da rette verticali. Quello relativo a campi di 200 a 300 gauss ha però spesso una tale forma (per es. nella fig. 14) da dimostrare, che ad un medesimo campo cor-

[1]) Probabilmente se si disponesse di campi assai più intensi di 5000 gauss, e si potesse così ulteriormente prolungare la curva, questa, dopo aver raggiunto una nuova ordinata minima, diverrebbe ancora ascendente. La curva avrebbe allora all' incirca la forma della lettera M capovolta.

rispondono due diversi valori del potenziale di scarica; ma probabilmente ciò si deve a qualche inavvertito errore sistematico di poca entità. In rari casi ciò si è verificato anche per il secondo tratto di discesa della curva, che corrisponde a campi assai intensi.

Quei tratti di curva quasi verticali rappresentano brusche diminuzioni del potenziale di scarica dovute verosimilmente a due cause distinte, che l'ipotesi della magnetoionizzazione spiega agevolmente. E cioè, la prima ripida discesa della curva deve attribuirsi all'azione del campo sul catodo; la seconda invece alla azione sul gas lontano da questo elettrodo.

7. *Esperienze suggerite dalle ipotesi della magnetoionizzazione.*

Facilmente s'intuisce la maniera con cui si può sottoporre la precedente interpretazione alla prova dell'esperienza. Basterà costruire la curva caratteristica per un tubo del tipo fig. 8 due volte, e cioè quando l'elettrodo A, adoperato come catodo, si trova fra i poli della elettrocalamita e poi, dopo avere convenientemente spostata questa, quando il catodo si trova entro uno dei rocchetti, ove è sensibilmeute sottratto all'azione del campo magnetico.

La prima delle due curve fu già ottenuta, ed è la curva B della fig. 9. Ma essa non è completa, mancando della seconda ripida discesa, pel motivo che nelle misure non si raggiunsero valori abbastanza grandi del campo magnetico. Ho dovuto quindi rifarla anch'essa.

Prima però d'esporre i risultati delle nuove misure è bene eliminare un dubbio, che sorge spontaneo nella mente, e cioè è utile anzitutto verificare, che il campo non dia il suo effetto sul catodo, anche quando questo si trova entro uno dei rocchetti.

A questo scopo ho costruito il tubo rappresentato dalla fig. 13, che differisce da quello della fig. 8 in ciò, che il suo catodo A ha la forma d'un disco perpendicolare all'asse del tubo. Inoltre all'esterno e in corrispondenza del catodo formai un piccolo rocchetto R, R, avvolgendo sul vetro per dieci

giri un sottile filo di rame ben isolato, i cui capi, torti strettamente assieme, furono poi messi in comunicazione con un sensibile galvanometro balistico. Leggendo la deviazione prodotta, quando s' interrompe e si chiude una corrente di nota intensità nei rocchetti, si può così calcolare facilmente l'intensità del campo nel luogo occupato dal catodo.

Fig. 13.

Ecco i risultati d' una esperienza, fra le molte concordanti da me eseguite, mentre l'aria entro il tubo aveva 0,028 mm. di pressione.

Disposto il tubo entro i rocchetti e collocata l' elettrocalamita in modo che il catodo A fosse fra i poli a metà distanza, trovai, che con una differenza di potenziale di 2210 volta applicata agli elettrodi occorreva un campo di almeno 3713 gauss, perchè si determinasse il passaggio della corrente.

Spostata allora l' elettrocalamita sinchè il catodo venisse a trovarsi entro uno dei rocchetti a metà della lunghezza di questo, fu necessario portare il campo a 4829 gauss per avere ancora la scarica. Per decidere se in questo caso si trattava d' un' azione sull' aria collocata fra i poli, o di una azione sul catodo, era necessario conoscere a quale intensità di campo si trovava esposto quest' ultimo.

Col piccolo rocchetto trovai, che mentre il campo aveva fra i due poli l' intensità di 4829 gauss, l' intensità intorno al catodo era soltanto 276 gauss, cioè circa la quindicesima parte del valore (3713) necessario a determinare la scarica. Questa non poteva ascriversi dunque all' azione del campo magnetico sul catodo collocato entro il rocchetto.

Con altri gradi di rarefazione, o con altri valori del potenziale applicato al tubo, ottenni sempre un analogo risultato, in modo più o meno marcato a seconda dei casi. L' esempio precedente corrisponde a quella fra le varie espe-

rienze in cui il fatto si manifestava nel modo più accentuato.

Fatta questa constatazione, che da sola rende già oltremodo probabile la magnetoionizzazione dell' aria lontana dal catodo, ho eseguite le misure necessarie per costruire le due curve, di cui ho parlato più sopra. Ho adoperato il tubo della fig. 8, con aria alla pressione di 0,088 mm. Ecco i risultati ottenuti.

Catodo fra i poli		Calcolo entro il rocchetto	
P	C	P	C
550	288 563	500	5241
900	290 1593	1120	5191
1050	288 2028 5300	1530	5190
1260	387 2474 5270	1800	5132
1430	338 2836 5260	1876	4063
1550	340 3583 5173	1900	0
1630	338 4063 5087		B
1900	0		
	A		

Le curve A, B della figura 14, costruite coi numeri precedenti, mostrano l' andamento dei fenomeni, e dal loro confronto si rileva subito, che col sottrarre il catodo all' azione del campo si sopprime la parte in ripida discesa corrispondente ai valori del campo intorno a 300 gauss, mentre resta la seconda parte discendente relativa ai campi di circa 5000 gauss. Da ciò mi sembra risultare una buona conferma delle previsioni basate sulla ipotesi della magnetoionizzazione.

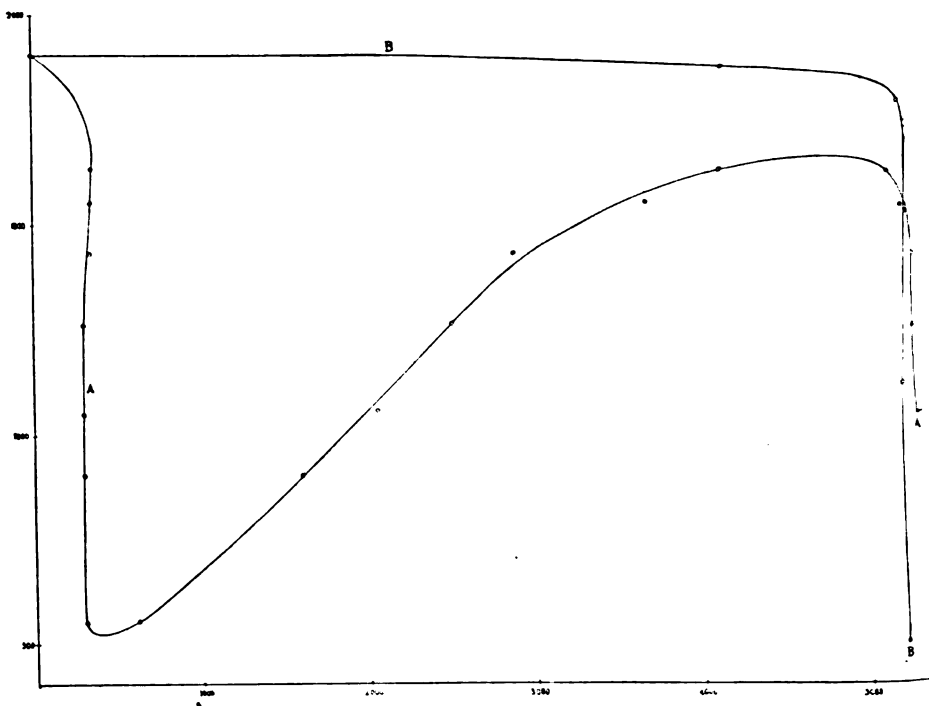



Fig. 14.

Non sarà superfluo descrivere un' altra esperienza, che in fondo non è che un variante delle precedenti.

Mi sono servito di un tubo simile a quello della fig. 4, ma senza il rivestimento esterno di stagnuola (che, come ho potuto verificare, non modificherebbe sostanzialmente il risultato), il quale tubo ha i suoi elettrodi così lontani l'uno dal-

l' altro, che, quando uno si trova entro il nucleo d' un rocchetto a metà della lunghezza di questo, l' altro va ad occupare la posizione simmetrica entro l' altro rocchetto. Durante le misure il punto di mezzo della batteria veniva messo in comunicazione colla terra, in modo che i potenziali dei due elettrodi avessero valori eguali e di segno contrario. Ciò tendeva a rendere perfettamente longitudinale il campo elettrico nella parte del tubo, la più lontana dai due elettrodi, che rimaneva nell' intervallo fra i poli magnetici. Con pressione di 0,04 mm. nel tubo ebbi questi risultati:

P	C
450	5090
760	4910
920	4678
1082	4510
1210	4140
1220	0

Non riprodurrò la curva che ne ritulta, perchè essa è assai simile alla B della fig. 14, salvo che la parte discendente di essa è meno ripida. A parte ciò mi sembra, che come la B, riveli un' azione del campo sull' aria che si trova fra i poli.

Come spesso accade d' ogni ipotesi suggerita da certi fatti noti, anche l' ipotesi d' una azione del magnetismo tendente a favorire la ionizzazionè dei gas, ha condotto a trovare qualche fatto nuovo. Quelli che ho descritto tendono evidentemente a confermare l' ipotesi assunta. Essa mi parve necessaria per spiegare come un campo possa produrre la scarica quando la differenza di potenziale impiegata non produce nessun passaggio dimostrabile di elettricità prima che il campo esista. E poichè le nuove esperienze non contraddicono tale ipotesi, sarà utile a mantenerla.

Essa da sola non vale a rendere conto di tutte le particolarità. E siccome non si può negare la deformazione delle traiettorie degli elettroni per opera del campo, che è la base della spiegazione ordinaria, così l'ipotesi della magnetoionizzazione non devesi sostituire, ma aggiungersi all'ordinario modo di spiegare l'azione del campo sulle scariche. Colla magnetoionizzazione si arriva a comprendere come e quando prenda origine un moto apprezzabile di elettroni in un tubo da scarica per opera del campo; ma bisognerà tener conto del movimento ch'essi assumono sotto l'influenza del campo stesso per prevedere ciò che in seguito avviene, e cioè per sapere, se quella messa in moto di elettroni è destinata ad abortire, oppure ad intensificarsi sino al punto da produrre la scarica durevole.

La questione d'una probabile magnetoionizzazione, oltre che avere una certa importanza per la spiegazione dei fenomeni di scarica nel campo magnetico, ne ha una di gran lunga maggiore dal punto di vista filosofico. Infatti, la constatazione di effetti spiegabili soltanto in base ad una influenza del magnetismo sopra elettroni muoventisi in orbite chiuse entro gli atomi, costituirebbe una validissima conferma sperimentale in favore delle idee, che oggi i fisici vanno formandosi relativamente alle strutture atomiche.

LO STUDIO SPERIMENTALE DEL FENOMENO DI HALL
E LA TEORIA ELETTRONICA DEI METALLI.

Nota di O. M. CORBINO.

1. — La interpretazione dei fenomeni galvano- e termomagnetici secondo la teoria elettronica della conduzione metallica è abbastanza soddisfacente finchè ci si limita al loro studio qualitativo. Notevoli difficoltà sorgono invece quando dalla ricerca quantitativa confrontata con le formole della teoria, si voglia risalire alle costanti primitive caratteristiche del metallo. Già il Drude tentò una simile deduzione; e dei risultati non sempre soddisfacenti attribuì la causa al fatto che i diversi valori sperimentali adoperati nel calcolo erano stati ricavati da esperienze che sperimentatori diversi avevano eseguito con materiali diversi.

Ma quando lo Zahn [1]), con una serie di misure veramente pregevoli, determinò i coefficienti sperimentali pei diversi fenomeni sullo stesso campione di metallo, ben puro e di nota provenienza, e volle poi passare alla deduzione delle costanti, l'esito fu ancora men fortunato. Egli pervenne invero a un sistema di valori che era assurdo in se stesso, per esempio le mobilità degli ioni dei due segni venivano espresse da numeri negativi.

Malgrado ciò difficilmente si può attribuire ai presupposti della teoria la causa dell'insuccesso. Nel sistema di equazioni che legano le quantità sperimentalmente misurabili e le costanti da determinare questa sono frammiste nel modo più vario; e perciò basta che un solo dei dati sperimentali sia inesatto o mal sicuro, perchè ne venga inficiata, e grave-

[1]) Zahn. *Ann. d. Phys.*, *14*, pag. 903; 1904.

mente, l'attendibilità dell'intera soluzione. E questo è purtroppo il caso, poichè qualcuno dei fenomeni è molto difficile a constatare e a misurare con la esattezza che sarebbe desiderabile.

Ma a parte le difficoltà sperimentali, che potranno superarsi raffinando ancora più i metodi di ricerca, un altro esame s'impone sin da ora; quello di alcune ipotesi accessorie poste per semplificare la teoria, e che non sempre son soddisfatte nella realizzazione delle esperienze.

2. — Il caso più caratteristico è presentato, al riguardo, dalla teoria del fenomeno di Hall, pel quale il coefficiente R della teoria di Drude non può corrispondere a quello che si determina sperimentalmente. L'esperienza dimostra che la differenza di potenziale V creata dal campo H tra due punti dei bordi d'una lamina percorsa da una corrente di densità j è esprimibile con la formola

$$V = R j H b$$

nella quale b misura la larghezza della lamina ed R è un coefficiente positivo o negativo caratteristico del metallo.

Il calcolo del coefficiente R, in funzione delle costanti della teoria, è fatto dal Drude supponendo che la lamina sia trasversalmente isolata, termicamente ed elettricamente, nel qual caso le equazioni che reggono il movimento degli elettroni sono le seguenti adottando le unità elettrostatiche:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \alpha_1 \frac{\partial T}{\partial y} &= e\left(Y - \frac{H}{c}\frac{d\xi_1}{dt}\right) \\ \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial y} &= -e\left(Y - \frac{H}{c}\frac{d\xi_2}{dt}\right) \\ \frac{d\xi_1}{dt} &= v_1\left(e X - \alpha_1 \frac{\partial T}{\partial x}\right) \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= v_2\left(-e X - \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial x}\right) \\ j &= e\left(N_1 \frac{d\xi_1}{dt} - N_2 \frac{d\xi_2}{dt}\right). \end{aligned}$$

Il significato dei diversi simboli è il seguente:

c è la velocità della luce;

$\alpha_1 = \frac{4\,\alpha\,T}{3}\,\frac{d \log N_1}{d\,T}$, in cui α designa la costante dei gas, T la temperatura del metallo, N_1 il numero di ioni positivi per cm. cubo;

α_2 è la grandezza analoga ad α_1 per gli ioni negativi;

e rappresenta la carica elettrica comune agli elettroni dei due segni, presa col suo valore numerico;

$\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial T}{\partial y}$ sono i gradienti di temperatura lungo la lamina nel senso longitudinale x della corrente elettrica e nel senso trasversale y;

X e Y la forza elettrica nel senso x e nel senso y;

$\frac{d\xi_1}{dt}$ e $\frac{d\xi_2}{dt}$ le velocità degli ioni positivi e negativi, nel senso x;

v_1 e v_2 le mobilità corrispondenti cioè le velocità assunte dagli ioni sotto la forza 1.

Queste equazioni permettono di dedurre due delle grandezze Y, $\frac{\partial T}{\partial x}$, j, $\frac{\partial T}{\partial y}$ quando siano date le altre.

Per il calcolo del coefficiente R del fenomeno Hall il Drude suppone $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$. e identifica il campo Y con la f. e. m. di Hall per unità di larghezza della lamina.

Ma entrambe le ipotesi non corrispondono alle condizioni dell' esperienza.

E infatti il gradiente $\frac{\partial T}{\partial x}$ che comparisce nella formola non è quello che il solo campo produce, ma quello che in realtà si determina tra i posti d'entrata e d'uscita della corrente, risultante dall'effetto Peltier, dalle eventuali differenze nell'effetto Joule ecc. Al gradiente di temperatura effettivamente esistente, seguirà una differenza di temperatura trasversale (effetto Righi) che altererà il gradiente $\frac{\partial T}{\partial y}$ e un campo elettrico (effetto Ettingshausen) che modificherà il va-

lore di Y. La formola di Drude andrebbe quindi corretta in questo senso; e si può dimostrare che il nuovo valore di Y è dato, in funzione di j e di $\frac{\partial T}{\partial x}$, da

$$Y = \frac{H}{c\,(N_1 v_1 + N_2 v_2)(\alpha_1 + \alpha_2)} \left\{ j \frac{\alpha_2 v_1 - \alpha_1 v_2}{e} + \right.$$

$$\left. + (\alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2)(v_1 \alpha_2 + v_2 \alpha_1) \frac{\partial T}{\partial x} \right\}$$

che si riduce alla formola di Drude per $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$. La correzione potrebbe essere tutt'altro che indifferente in certi casi.

Ma in un altro punto l'applicazione sperimentale della formola di Drude conduce a risultati non corretti.

Il campo Y misura la f. e. m. per unità di lunghezza esistente nell'interno della lamina e agente perciò sugli elettroni in moto. Ma non è permesso identificarla con la differenza di potenziale V che si constata ai bordi della lamina, anche ricorrendo a elettrodi della stessa natura, o effettuando la correzione della forza termoelettrica aggiunta con le sonde di altro metallo come fece lo Zahn.

E invero tra i bordi della lamina esiste una differenza di temperatura, per il gradiente trasversale $\frac{\partial T}{\partial y}$. E perciò lungo le sonde dello *stesso metallo,* fino all'apparecchio esploratore della differenza di potenziale, si aggiunge la differenza di potenziale propria della caduta di temperatura, cui è dovuto l'effetto Thomson.

Questo campo supplementare Y′ costituisce una parte del campo Y esistente nella lamina e dato dalle (1), che tengono conto di tutto, poichè nella lamina esiste il gradiente $\frac{\partial T}{\partial y}$; ma mentre i suoi effetti sul moto degli ioni sono effettivamente esistenti, la sua osservazione ci sfugge ricorrendo alle sonde, ove se ne crea uno opposto, e si perviene perciò a una valutazione scorretta del campo Y. Analogamente può dimostrarsi che, per la stessa ragione, è insufficiente la correzione

dello Zahn nel caso di sonde costituite da un metallo diverso, la quale ha solo per effetto di ricondurre la differenza di potenziale osservata a quella che si avrebbe con sonde dello stesso metallo.

Si vede da tutto ciò che un confronto esatto della formola teorica coi risultati dell'esperienza è molto difficile, e richiede inoltre una valutazione esatta di $\frac{\partial T}{\partial x}$, che a torto fu supposto nullo nella teoria di Drude.

3. — Ben diverse sono le condizioni qualora, come ha fatto lo Zahn [1]) in una interessante ricerca, s'immerga la lamina in una massa d'acqua che si rinnova rapidamente e che rende perciò in tutta la lamina costante la temperatura.

Ma a tal caso non corrispondono più le formole (1) della teoria, le quali presuppongono invece che la lamina sia trasversalmente isolata anche termicamente. Per la trattazione di questo caso, che può chiamarsi col Zahn caso isotermico, occorrerà introdurre le componenti $\frac{d\eta_1}{dt}$, $\frac{d\eta_2}{dt}$ della velocità nel senso y, e scrivere che la lamina è trasversalmente isolata solo per la corrente elettrica. Si ottiene così, in unità elettromagnetiche,

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
\frac{d\xi_1}{dt} &= e v_1 (X - H e v_1 Y) \frac{1}{1 + H^2 e^2 v_1^2} \\
\frac{d\xi_2}{dt} &= - e v_2 (X + H e v_2 Y) \frac{1}{1 + H^2 e^2 v_2^2} \\
\frac{d\eta_1}{dt} &= e v_1 (Y + H e v_1 X) \frac{1}{1 + H^2 e^2 v_1^2} \\
\frac{d\eta_2}{dt} &= - e v_2 (Y - H e v_2 X) \frac{1}{1 + H^2 e^2 v_2^2} \\
j_x &= e\left(N_1 \frac{d\xi_1}{dt} - N_2 \frac{d\xi_2}{dt}\right) \\
j_y &= e\left(N_1 \frac{d\eta_1}{dt} - N_2 \frac{d\eta_2}{dt}\right) = 0\,.
\end{aligned}
$$

[1]) Zahn. *Ann. d. Phys.*, *23*, p. 131; 1907.

Da queste equazioni, posto

$$(3) \qquad \sigma_1 = e^2 N_1 v_1 \ , \quad \sigma_2 = e^2 N_2 v_2 \ , \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

si deduce

$$Y = \frac{\sigma_1 v_1 - \sigma_2 v_2}{\sigma} e H X .$$

Indicando poi con σ' la conducibilità elettrica della sostanza sotto l'azione del campo magnetico, posto cioè

$$\sigma' = \frac{j}{X}$$

si avrà

$$Y = \frac{\sigma_1 v_1 - \sigma_2 v_2}{\sigma} e H \frac{j}{\sigma'} .$$

E quindi il coefficiente di Hall isotermico R_T sarà

$$R_T = \frac{E}{\sigma'}$$

ove E denota il coefficiente da cui dipendono le azioni elettromagnetiche di 2ª specie, che io ho chiamato momento ionico differenziale:

$$E = \frac{e v_1 \sigma_1 - e v_2 \sigma_2}{\sigma} .$$

Adunque il coefficiente del fenomeno di Hall isotermico, il solo che possa senza ambiguità determinarsi con l'esperienza, non è dato dalla formola di Drude, ma si rilega col momento ionico differenziale E da cui dipendono le azioni elettromagnetiche di seconda specie già da me considerate nelle antecedenti ricerche.

La teoria ci può essere d'altra parte di guida preziosa per rintracciare le condizioni sperimentali più favorevoli alla ricerca delle costanti del metallo.

Abbiamo visto che nel caso isotermico la misura del fenomeno Hall ci fornisce il valore del ceefficiente

$$E = \frac{e v_1 \sigma_1 - e v_2 \sigma_2}{\sigma} .$$

Inoltre la misura della differenza di temperatura trasversale per una corrente termica longitudinale (effetto Righi) ci fornisce il coefficiente

$$S = \frac{e}{c\sigma}(\sigma_2 v_1 - \sigma_1 v_2) .$$

Infine se con l'apparecchio di Zahn, nel quale si può sovrapporre alla corrente elettrica longitudinale un flusso di calore nel medesimo senso, si creano due flussi tali da ottenere che sia $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$, allora le formole (1) di Drude ci danno la relazione interessante

$$Y = \frac{Hj}{ce(N_1 - N_2)}$$

da cui si può dedurre $N_1 - N_2$ misurando Y che in questo caso si identifica con la differenza di potenziale trasversale.

Chiamiamo R_1 il coefficiente di questo particolare fenomeno di Hall osservabile quando è $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial T}{\partial x}$ ha il valore conveniente perchè questo si ottenga a lamina isolata. Avremo le relazioni semplicissime che qui riassumo:

$$R_1 = \frac{1}{ce(N_1 - N_2)}$$

$$E = \frac{e v_1 \sigma_1 - e v_2 \sigma_2}{\sigma}$$

$$S = \frac{e}{c} \frac{\sigma_2 v_1 - \alpha_1 v_2}{\sigma}$$

le quali unite alle (3) ci permetteranno di determinare le quattro costanti più notevoli del metallo N_1, N_2, v_1 e v_2, in funzione di R_1, E, S e della conducibilità σ del metallo.

Una simile ricerca, presenterebbe il più grande interesse, poichè mentre le formole sono senza obbiezione, ciascuno dei dati sperimentali è rilegato con un minor numero di costanti che non nelle formole di Drude.

4. Un esame analogo a quello eseguito per la teoria del fenomeno di Hall può anche farsi per la teoria degli effetti elettromagnetici di cui mi sono occupato in una precedente Memoria.

Pel caso della corrente elettrica radiale, contro la condizione supposta che le linee di egual potenziale siano delle circonferenze, non c'è nulla da obbiettare: e così non c'è dubbio che quelle linee sono anche isotermiche. Occorre invece tener conto di un eventuale gradiente radiale di temperatura dovuto all'effetto Peltier o a quello Joule, diseguale al centro e alla periferia. Un flusso radiale di corrente elettrica appare perciò inseparabile da un flusso radiale di calore, cosicchè si sovrapporranno sullo stesso disco le correnti circolari di doppia origine che lo trasformano (come ho dimostrato) in una particolare lamina magnetica.

Malgrado ciò l'azione induttiva sulla bobina che circonda il disco non sarà modificata, poichè all'atto in cui s'invia o si interrompe la corrente radiale e si constata l'azione induttiva, il gradiente di temperatura non s'è formato, o resta invariato, per la sensibile capacità termica del disco. Invece questa sovrapposizione dei due effetti si potrà manifestare nella rotazione del disco percorso da corrente radiale; poichè la misura della deviazione richiede un certo tempo, e può allora prodursi una eventuale differenza di tempertura tra il centro e la periferia, e quindi una rotazione del disco di origine termomagnetica.

La correzione può essere facilmente apportata esplorando con gli stessi fili adduttori della corrente la differenza di temperatura creata da questa tra il centro e la periferia, desumibile dalla conseguente forza elettromotrice termoelettrica.

Roma, Istituto fisico della R. Università.

SULLA SEDE DELLA FORZA ELETTROMOTRICE DELLE COPPIE VOLTAICHE.

NOTA DI G. GUGLIELMO [1].

Nonostante il numero grandissimo di lavori che da oltre un secolo vennero pubblicati a favore della teoria del contatto o della teoria chimica della pila e nonostante che molti di questi lavori siano stati eseguiti con grande studio ed acume, può dirsi che rimane tuttavia dubbio se la forza elettromotrice delle coppie voltaiche risieda nel contatto dei due metalli o nel contatto di ciascuno di questi coll' elettrolito oppure, come Volta fu condotto ad ammettere, in tutti tre questi contatti. Parecchi fisici autorevoli, per intuizione, o guidati da speciali teorie, hanno creduto di poter risolvere il dubbio suddetto in un senso o nell' altro, ma il fatto che opinioni contrarie possono tuttavia sussistere prova che nessuna di esse è incontrastabilmente dimostrata, e chi senza preconcetti si accinge allo studio di questo argomento non riesce a trovare una prova decisiva di nessuna delle suddette opinioni.

L' ipotesi che fra metalli a contatto esista una differenza di potenziale è basata unicamente su misure della medesima eseguite cogli elettrometri, in modi svariatissimi e con risultati abbastanza concordi. In tutte queste misure, incominciando da quelle di Volta fino a quelle più recenti (p. es. del Majorana) si suppone implicitamente che non esista differenza di potenziale fra i metalli e l' aria o il dielettrico in cui sono immersi, ciò che non è dimostrato ed anzi pare improbabile per molte ragioni.

I due metalli immersi nell' aria si trovano in condizioni che non paiono essenzialmente diverse da quelle degli stessi

[1] *Rend. R. Acc. Lincei*, 2° sem., 1910.

metalli immersi in un elettrolito, poichè l'ionizzazione dell'aria può ritenersi in certi rispetti equivalente alla dissociazione dell'elettrolito. I due metalli a contatto immersi nell'aria possono quindi esser considerati come formanti una coppia con grandissima resistenza interna (quella dell'aria) e con resistenza esterna trascurabile [1]). La differenza di potenziale suddetta misurata con un metodo qualsiasi è quella che appare agli estremi della resistenza interna, cioé nei due strati d'aria adiacenti ai due metalli; essa non dà nessun indizio sulla sede della forza elettromotrice che produce la suddetta differenza di potenziale, che è uguale alla somma delle differenze di potenziale prodotte da ciascun contatto.

Inoltre è molto istruttivo il comportamento dello zinco nelle coppie voltaiche a seconda dello stato della sua superficie. Nella coppia Daniell come nella coppia Volta ad acqua, la forza elettromotrice efficace rimane all'incirca la stessa, sia che lo zinco sia leggermente alterato alla superficie per l'azione dell'aria, oppure sia stato accuratamente pulito con smeriglio, oppure sia stato amalgamato; invece la differenza di potenziale nell'aria fra zinco e rame a contatto, misurata con uno dei metodi suddetti risulta massima (circa 1 Volt) se lo zinco è amalgamato, notevolmente minore se lo zinco non è amalgamato ma solo pulito con smeriglio ed ancora minore (0,3 Volt e meno) se la superficie dello zinco è leggermente alterata dall'azione dell'aria. È chiaro dunque che in questi casi si ha una differenza di potenziale accessoria variabile collo stato della superficie dello zinco, la quale benchè compatibile colla teoria del contatto non deve confondersi con quella (costante) che produce la forza elettromotrice e la corrente della coppia Volta o Daniell [2]).

[1]) Alla suddetta equivalenza si deve probabilmente il fatto da molto tempo constatato che la differenza di potenziale di due metalli M ed N a contatto nell'aria risulta all'incirca la stessa di quella della coppia voltaica M, acqua, N, M.

[2]) Come ho indicato in una Nota precedente (*Rendiconti dell' Acc. dei Lincei*, 2° semestre, 1909), per queste misure è molto adatto e d'uso facile il collettore ad acqua di Lord Kelvin.

Risulta dunque che se indichiamo con V (M, N) la differenza di potenziale nell' interno di due metalli M ed N a contatto, con V (M, a) e V (N, a) le differenze di potenziale fra l' interno di essi metalli, rispettivamente, e l' aria adiacente, le misure elettrometriche comunque eseguite non potranno darci che il valore di $V(a, M) + V(M, N) + V(N, a)$ e s'avrà quindi una sola equazione con tre incognite. Nè gioverà cambiare il dielettrico tenendo i due metalli nel vuoto, mai perfetto, o in un gaz diverso dall' aria o in un dielettrico liquido o solido perchè ogni nuova determinazione ci darà un' equazione con due nuove incognite; neppure gioverà eseguire le misure su combinazioni due a due di parecchi metalli poichè s' avrebbero $n(n-1)/2$ equazioni, più una data dalla legge di Volta, con $n(n-1)/2 + n$ incognite e quindi $n - 1$ incognite rimarrebbero indeterminate.

Non credo che siano mai state eseguite (e forse non sono possibili) esperienze dirette che determinino separatamente V (M, N) e $V(a, M) + V(N, a)$. I partigiani della teoria del contatto hanno supposto che fosse $V(a, M) + V(N, a)$ nullo o trascurabile, ciò che non è dimostrato, nè pare ammissibile per le ragioni suesposte, mentre gli avversarî di questa teoria hanno supposto che fosse invece $V(M, N) = 0$, ciò che altresì non è dimostrato incontrastabilmente.

A favore dell' ipotesi che la forza elettromotrice delle coppie voltaiche risieda unicamente nelle superfici di contatto dei metalli coll' elettrolito sta il fatto che per parecchie coppie esiste una semplice relazione fra questa forza elettromotrice ed il calore dovuto all' effetto chimico che si produce appunto nei suddetti contatti; però questa relazione appunto per la sua natura termodinamica non indica ove debba risiedere la forza elettromotrice, come non spiega quale ne sia la causa, ma stabilisce solo il suo valore che non potrebbe esser diverso anche se detta forza risiedesse nella superficie di contatto dei due metalli. Per la stessa ragione non è decisiva a favore della stessa ipotesi la mancanza, nel contatto dei due metalli, di un effetto Peltier corrispondente alla forza elettromotrice della coppia.

Ho cercato in molti modi, giovandomi dei lavori antecedenti, (fra i quali ricorderò quello di Corbino [1]) contrario alla teoria del contatto) una qualche disposizione che eliminasse ogni dubbio. Le misure elettrometriche comunque variate, anche con aria ionizzata mediante pechblenda o raggi X, non condussero a nessun risultato, invece la seguente disposizione nella quale è escluso ogni contatto di metalli eterogenei mentre persiste l'effetto chimico della pila, mi pare giunga allo scopo perchè dà modo di ottenere termodinamicamente il solito valore della forza elettromotrice che non può essere collocata altrove che nei contatti dei metalli coll' elettrolito.

Considero due elementi d'una stessa pila cui sia applicabile la relazione termodinamica suddetta ($V = C/e$), p. es. due coppie Daniell, accoppiate coi poli omonimi a contatto, cioè zinco con zinco e rame con rame, e suppongo che una di esse per effetto d'una maggior concentrazione del solfato di rame e minore del solfato di zinco abbia una forza elettromotrice alquanto maggiore di quella dell'altra, dimodochè si produca una debole corrente. Siccome, per effetto di questa, la soluzione più diluita andrà aumentando di concentrazione e la più concentrata andrà diluendosi, dimodochè la disuguaglianza delle forze elettromotrici e quindi la corrente tende a cessare, suppongo o che questa disuguaglianza e questa corrente siano, quanto si vuole, piccolissime o che le quantità delle soluzioni siano grandissime, dimodochè le loro concentrazioni e quindi le forze elettromotrici possano considerarsi come, praticamente, costanti. Suppongo finalmente, per facilità di ragionamento, che la resistenza interna di queste coppie sia trascurabile rispetto a quella esterna, metallica, costituita p. es. da un filo di rame che riunisca i due poli di rame.

L'insieme di queste due coppie funziona come l'insieme delle due coppie di concentrazione: Zn, soluzione più diluita SO_4Zn, soluzione meno diluita, $Zn + Cu$, soluzione più diluita SO_4Cu, soluzione meno diluita, Cu che hanno gli stessi

[1]) O. Corbino. « Sulle correnti dovute all'effetto Volta ecc. ». *Nuovo Cimento*, 1908, XV, p. 395.

contatti fra metalli e soluzioni, egualmente orientati ma solo in ordine diverso.

Se V è la f. e. della coppia Daniell più attiva, $V - \varepsilon$ quella della coppia meno attiva, *i* l'intensità della corrente, il polo rame della coppia più attiva, ad una estremità del filo di rame suddetto, avrà un potenziale che supera di ε quello del polo rame all'altra estremità, la quantità d'elettricità *i* per secondo passando dall'uno all'altro potenziale perderà una quantità d'energia $i\varepsilon$ che si manifesterà come calore Joule nel filo suddetto. L'origine di questo calore sta nella diversità dei calori di soluzione dei due solfati in soluzione diversamente concentrate, e la forza elettromotrice ε potrà essere calcolata termodinamicamente nel modo solito, come per le coppie di concentrazione, basandosi sui valori delle concentrazioni o in quelli dei calori di diluizione.

Possiamo però considerare la sola coppia più attiva e ripetere lo stesso ragionamento; il suo polo rame trovasi ad un potenziale che supera di V (che voglio supporre incognito) quello dello zinco, la quantità di elettricità *i* per secondo passando dall'uno all'altro potenziale perderà una quantità d'energia iV che si manifesterà sia come calore Joule nel circuito, ossia nella resistenza metallica (la sola che si è supposta apprezzabile), sia producendo un lavoro chimico nella coppia opposta. Dovremo cercare l'origine prima di questo calore o nella coppia più attiva suddetta o nel resto del circuito; ma in questo non può trovarsi perchè la resistenza metallica non presenta contatti di metalli eterogenei e la coppia opposta, quella meno attiva, non solo non fornisce energia ma anzi ne assorbe per la riduzione dello zinco, compensata solo in parte dalla combinazione del rame.

Ne segue dunque che l'origine della suddetta quantità d'energia, iV per secondo non può trovarsi che nella coppia più attiva ossia nell'energia chimica che essa perde. Se t è il tempo in secondi necessario perchè la corrente *i* faccia sciogliere 1 gr. equivalente di zinco e C l'energia chimica, espressa in Joules, perduta dalla coppia nello stesso tempo sarà dunque: $it. V = C$ ossia $V = C/it = C/96540 = 1{,}09$ Volt circa.

Questa differenza di potenziale che è la f. e. solita della coppia Daniell non può risiedere nel contatto dei due metalli zinco rame che è stato escluso e non può quindi trovarsi che nel contatto di ciascun metallo colla soluzione. (Trascuro il contatto delle due soluzioni che potrebbe esser evitato colla scelta di coppie ad un liquido) [1]).

Credo utile aggiungere che, secondo i partigiani della teoria del contatto, la differenza di potenziale fra il rame e lo zinco d'una coppia Daniell a circuito aperto dovrebbe essere quella solita (circa 1,09 Volt) diminuita della forza elettromotrice di contatto zinco-rame, la quale necessariamente viene introdotta sia che si congiungano essi poli con un filo metallico, sia che questi vengono posti in comunicazione coi quadranti d'un elettrometro. Siccome essi ammettono che questa f. e. di contatto è circa 1 Volt ne segue che la differenza di potenziale fra il rame e lo zinco (senza la solita lista di rame) d'una Daniell a circuito aperto dovrebbe essere pressochè nulla, e ciò viene confermato, apparentemente, dalle misure elettrometriche.

Per assicurarmene posi ciascun polo d'una coppia Daniell in comunicazione mediante un filo metallico (che per la legge di Volta non fa variare la differenza di potenziale dei metalli che mette in comunicazione) con una lamina dello stesso metallo del polo, piegato in forma di tubo di 9 cm. d'altezza, 4 cm.

[1]) Il suddetto ragionamento potrebbe essere invertito: la coppia più attiva perde nel tempo t una quantità di energia chimica C che non compare localmente e deve venire trasformata in energia elettrica, mediante la produzione d'una corrente i, che può essere variamente impiegata (e nel caso considerato è impiegata precisamente a produrre un lavoro chimico) deve dunque essere ancora: $it\,V = C$ e $V = C/it$.

Entrambi i ragionamenti valgono per una coppia qualsiasi, purchè la differenza di potenziale (interna) dei poli sia una funzione determinata (anche se ignota) del calore dovuto alla reazione chimica che vi produce il passaggio della corrente. Riunendo due di queste coppie coi poli omonimi a contatto e supponendo che una di esse abbia una f. e. di pochissimo superiore a quella dell'altra, il valore della suddetta differenza di potenziale, risulterà determinato e sebbene sia evitato il contatto di metalli eterogenei sarà lo stesso di quello che si otterrebbe introducendo esso contatto.

di diametro. Questi due tubi erano collegati fra loro, a distanza di pochi millimetri, mediante un corto tubo di vetro d'ugual diametro nel quale venivano parzialmente introdotti ed erano tenuti da un sostegno isolante coll'asse comune verticale.

Una coppia di quadranti d'un elettrometro era in comunicazione col suolo e con uno o coll'altro polo della Daniell suddetta, l'altra coppia di quadranti era in comunicazione coll'acqua del collettore di Lord Kelvin ed il beccuccio d'esso collettore penetrava entro il doppio tubo suddetto, secondo l'asse. Sollevavo ed abbassavo alternativamente questo doppio tubo in modo che la rottura della vena liquida avvenisse a metà altezza del tubo inferiore oppure di quello superiore, lasciandolo immobile in ciascuna delle due posizioni tanto quanto era necessario, perchè l'ago dell'elettrometro assumesse una deviazione costante.

Quest'ago essendo stato caricato ad un potenziale conveniente, essendo stata determinata la deviazione corrispondente prodotta nell'ago da una differenza di potenziale di 1 Volt (data da un campione) nelle due coppie di quadranti, dalle variazioni che accusava l'ago quando il beccuccio si trovava nel tubo di rame o in quello di zinco, deducevo la differenza di potenziale esterna fra rame e zinco della coppia Daniell, ossia la differenza di potenziale dell'aria contenuta nel tubo di rame ed in quello di zinco. Ottenni i seguenti risultati:

1° Quando lo zinco della coppia Daniell e quello del tubo erano entrambi accuramente puliti con carta smerigliata e non amalgamati, il potenziale nell'interno del tubo di rame risultò circa di $^1/_3$ Volt superiore a quello dell'interno del tubo di zinco.

2° Amalgamando lo zinco della coppia ma non quello del tubo la differenza suddetta di potenziale variò di pochi centesimi di Volt che considero trascurabili, perchè variabili e dovuti forse a cause accidentali.

Risulta dunque che l'amalgamazione dello zinco non ne altera essenzialmente in misura notevole le proprietà galvaniche, ciò che risulta anche quando si usano le coppie Daniell per la produzione di corrente.

3° e 4° Se invece il tubo di zinco suddetto veniva amalgamato internamente il potenziale nell'interno del medesimo risultava solo di circa 0,03 Volt inferiore a quello dell'interno del tubo di rame e ciò sia che lo zinco della coppia fosse o no amalgamato.

5° Se invece i due tubi suddetti erano dello stesso metallo, entrambi di zinco nelle stesse condizioni o entrambi di rame, la differenza di potenziale nell'interno di essi risultava la stessa come quando i due poli della coppia erano messi direttamente in comunicazione ciascuno con una coppia di quadranti dell'elettrometro, cioè circa 1,1 Volt.

Dalle determinazioni 3ª e 4ª risulterebbe dunque che la differenza di potenziale fra lo zinco ed il rame d'una coppia Daniell a circuito aperto è piccolissima ma tenendo conto delle determinazioni 1ª e 2ª appare chiaro che i risultati dipendono dallo stato della superficie dello zinco a contatto dell'aria.

Mi par dunque di poter concludere che le misure elettrometriche dirette (comunque eseguite) non possono dare il valore della differenza di potenziale interna dei due poli d'una coppia voltaica, nè possono quindi infirmare la suesposta dimostrazione termodinamica, secondo la quale la f. e. delle coppie voltaiche non può risiedere nel contatto dei due metalli.

SUL VALORE DELLE COMPONENTI LA FORZA ELETTROMOTRICE DELLA COPPIA DANIELL.

Nota di G. GUGLIELMO [1].

Ammesso che la forza elettromotrice delle coppie voltaiche risieda non nel contatto reciproco dei due metalli ma in quello di ciascun metallo coll' elettrolito (ciò che credo aver dimostrato in una Nota precedente) [2]) rimane ancora da determinare in quale proporzione ciascuno dei due metalli partecipi alla produzione di tale forza, ossia quale è la differenza di potenziale (interna) fra un dato metallo e l'elettrolito con cui sia a contatto.

A tale scopo sono state eseguite da parecchi fisici misure dirette elettrometriche della differenza di potenziale che esiste nell'aria adiacente al metallo ed all' elettrolito, ma anche contro di esse, comunque siano eseguite, vale l'obbiezione che non è dimostrato e non è certamente ammissibile che fra il metallo e l' aria adiacente non esista differenza di potenziale (mentre sebbene non dimostrato pare ammissibile che sia trascurabile quella fra l' elettrolito e l' aria adiacente).

Credo che Exner [3]) abbia molto ridotta questa causa d' errore; egli (mediante il collettore di lord Kelvin ed usando mercurio invece di acqua) ha misurato la differenza di potenziale fra l'aria contenuta in un tubo aperto di carta imbevuta dell' elettrolito e l'aria contenuta in tubo pure aperto di platino o d' oro o di carbone di storta, che comunicava coll'elettrolito suddetto mediante un metallo; questo a contatto dell'elettrolito

[1]) *Rendiconti dell'Acc. dei Lincei,* 2° semestre, 1910 con modificazioni.

[2]) *Rendiconti dell' Acc. dei Lincei,* 2° semestre, 1910. *Nuovo Cimento,* 1911.

[3]) Carl, Repertorium der Physik. 1883.

produceva la differenza di potenziale cercata fra esso metallo e l'elettrolito stesso ed a contatto p. es. col platino produceva una differenza di potenziale che Exner supponeva nulla. Egli supponeva inoltre che anche la differenza di potenziale fra l'aria ed il platino, o l'oro, o il carbone di storta fosse nulla e quindi la differenza di potenziale misurata fosse uguale a quella cercata, ma tale ipotesi non è dimostrata e solo pare probabile che questa differenza di potenziale sia minore che non per gli altri metalli, forse in proporzione del grado d'ossidabilità.

Ostwald invece, e dopo lui altri fisici, determinarono la differenza di potenziale fra il metallo immerso in una soluzione ed il mercurio effluente rapidamente nella stessa, supponendo che la differenza di potenziale fra mercurio e soluzione non avesse tempo di prodursi e quindi la differenza di potenziale misurata fosse uguale a quella cercata fra metallo e liquido. Ma anche tale ipotesi non è incontrastabilmente dimostrata e non è ammessa universalmente.

Perciò ho creduto utile ricorrere alle considerazioni termodinamiche che hanno giovato a proposito della differenza di potenziale dei metalli a contatto, supponendo che fossero applicabili alle singole differenze di potenziale fra metallo ed elettrolito gli stessi ragionamenti e le stesse formule termodinamiche che valgono per la somma algebrica di esse differenze, cioè per la f. e. della coppia.

Riconosco che in generale non è lecito applicare una formola termodinamica ad una parte d'un processo considerandola come isolata, quando essa è invece inseparabilmente connessa con altre parti dello stesso processo e che sarebbe facile addurre esempi nei quali una tale applicazione condurrebbe a risultati erronei; tuttavia non si può escludere che talora la connessione delle parti suddette sia tale da permettere questa applicazione e suppongo che ciò avvenga nel caso attuale; naturalmente i risultati dovranno essere ammessi condizionatamente.

Chiamando V, V' V'' le differenze di potenziale dei due poli d'una coppia riversibile, e di ciascun metallo rispetto all'elettrolito, chiamando inoltre C, C', C'', le quantità di calore,

espresse in Joules, che si producono nella coppia complessivamente ed attorno a ciascun metallo quando passa la quantità di elettricità e (cosicchè sia $V = V' - V''$, $C = C' - C''$) ed essendo T la temperatura assoluta la formola di Hehlmoltz dà:

$$V = C / e + T\, dV / dT \tag{1}$$

ed applicando la stessa formula alle singole differenze di potenziale della coppia s'avrebbe:

$$V' = C'/e + T\, dV'/dT\,, \quad V'' = C''/e + T\, dV''/dT. \tag{1'}$$

È da notare che qualora non si volessero ammettere queste relazioni (1') dovrebbero però essere ammesse le seguenti

$$V' = C'/e + T\, dV'/dT + K, \quad V'' = C''/e + T\, dV''/dT + K \tag{1''}$$

affinchè sia soddisfatta la (1) e si avrebbe una costante ipotetica K la stessa per i metalli e le coppie più diverse (purchè riversibili) senza che appaia nè il suo significato nè il perchè della sua costanza.

Inoltre se c' e c'' sono le quantità di calore (positive o negative) che si manifestano localmente presso ciascun elettrodo, quando passa la suddetta quantità di elettricità e, la quantità di calore $C' - C'' - (c' - c'')$ dovuta alla reazione chimica e che non appare localmente deve apparire come effetto Joules in tutto il circuito e perchè ciò sia dev'essere anche per coppie non riversibili:

$$e\, V = C' - C'' - (c' - c'') = (C' - c') - (C'' - c'') \tag{2}$$

ed applicando questa formula alle singole differenze di potenziale si avrà:

$$V' = (C' - c')/e \quad V'' = (C'' - c'')/e\,. \tag{2'}$$

Anche per queste relazioni è da notare che dalla (2) risulta necessariamente:

$$V' = (C' - c')/e + K\,, \quad V'' = (C'' - c'')/e + K \tag{2''}$$

e K, se diverso da zero dovrà essere lo stesso per tutte le coppie, ciò che rimane inesplicato.

Se le coppie cui si applicano le (2') sono reversibili saranno applicabili altresì le (1') e ne risulterà , anche se K non è nullo:

$$(3) \qquad c' = e\,\mathrm{T}\,d\mathrm{V}'/d\mathrm{T}\,, \quad c'' = e\,\mathrm{T}\,d\mathrm{V}''/d\mathrm{T}\,.$$

Ho cercato anzitutto di determinare V' e V'' per la coppia Daniell; i valori di $d\mathrm{V}'/d\mathrm{T}$ e $d\mathrm{V}''/d\mathrm{T}$ per lo zinco e pel rame si hanno dalle numerose determinazioni di forze elettromotrici termoelettriche fra metalli ed elettroliti, tuttavia per maggior sicurezza ho creduto utile eseguire nuove determinazioni. Ho usato dapprima un tubo di vetro ad U ripieno di soluzione di solfato di zinco o di rame in cui pescavano due elettrodi, uno per ramo, entrambi rispettivamente di zinco o di rame. Determinavo con un elettrometro a quadranti molto sensibile (di Dolezalek) la differenza di potenziale dei due elettrodi prima quando entrambi i rami del tubo erano alla temperatura dell' ambiente, poi quando uno di essi era scaldato a 100°, e poi dopo che si era raffreddato e poi nuovamente quando veniva nuovamente riscaldato a 100°, e così di seguito, ed ottenevo per differenza la differenza di potenziale causata dalla diversa temperatura dei due rami.

Siccome la posizione dello zero dell' ago non si manteneva ben costante (forse per imperfezione degli uncinetti), misurai la stessa differenza di potenziale col galvanometro e col solito mezzo di opposizione. Inoltre usai un diverso voltametro; composto di un recipiente di vetro contenente la soluzione in fondo alla quale trovavasi un disco orizzontale di zinco (o rame) che serviva da elettrodo ed in alto una scatola cilindrica di zinco (o di rame) col fondo orizzontale che serviva come 2° elettrodo. Questa scatola era provvista superiormente di due tubulature per le quali potevo far passare del vapore proveniente da acqua in ebollizione e scaldare a 100° la scatola e la soluzione adiacente.

I valori da me ottenuti per $d\mathrm{V}'/d\mathrm{T}$ e $d\mathrm{V}''/d\mathrm{T}$ non differiscono in media da quelli ottenuti dai precedenti sperimentatori, siccome però ritengo che questi eseguendo di proposito

uno studio accurato dell' argomento abbiano meglio evitato le piccole cause d' errore (mentre le mie esperienze furono eseguite accessoriamente, senza ricerca di grande precisione) mi baserò specialmente sui loro dati.

Dalle esperienze di Bouty (C. R. t. 90, a. 1880), Ebeling (*Wied. Ann.*, 30, 1887) e Brander (*W. A.*, 37, 1889) come dalle mie risulta per lo zinco in soluzione diluita di solfato $dV'/dT = = 0{,}00075$ Volt, quindi $T\, dV'/dT = 0{,}22$ Volt.

Cercai in seguito di determinare V' e V" per lo zinco ed il rame applicando le formule (2').

Prima d' essermi procurato il lavoro di Jahn (*Zeitschr. für phys. Chemie*, vol. 26, 1898), nel quale sono descritte le sue ultime determinazioni del calore locale suddetto e d' aver ben ponderato le difficoltà che esse presentano, ho eseguito parecchie determinazioni che tuttavia mi paiono non prive d' interesse. Usai elettrodi calorimetrici formati da scatole cilindriche di zinco, basse, ripiene completamente d' alcool, provviste d' un tubo di vetro graduato nel quale lo spostamento del livello dell' alcool indicava la quantità di calore ricevuta o perduta dall' elettrodo.

Credevo poter evitare il riscaldamento degli elettrodi per effetto del calore Joules, che la corrente produce nella soluzione, collocando in basso l' elettrodo presso cui la soluzione aumenta di densità (le basi di questa scatola elettrodo erano orizzontali e la base superiore formava il fondo del recipiente che conteneva la soluzione) ed in alto quello (pure a basi orizzontali) presso cui essa densità descresce. Usavo correnti deboli e contavo sul fatto che la conducibilità termica dei liquidi è minima quando sia evitata la conducibilità per convezione. Non potei tuttavia ottenere da queste esperienze che risultati irregolari, non utilizzabili, forse perchè la variazione della densità prodotta dall' effetto chimico è accompagnata da una variazione in senso inverso prodotta dall' effetto termico.

Ho invece ottenuto valori abbastanza regolari e (con larga approssimazione) concordi con quelli di Jahn da alcune esperienze preliminari eseguite per scopo d' orientamento, usando due elettrodi calorimetrici formati da scatole a base semicircolare, disposte entrambe alla sommità della soluzione, colle

basi in uno stesso piano orizzontale, cogli orli rettilinei contigui ma separati da un diaframma che penetrava nel liquido fino a poca profondità, e calcolando queste esperienze col metodo di Jahn. Spero ottenere risultati del tutto attendibili disponendo l'apparecchio entro un vaso di Dewar dimodochè sia meglio protetto dalle variazioni di temperatura dell'ambiente e sia quindi possibile usare correnti più deboli.

Siccome queste esperienze non possono finora paragonarsi neppure lontanamente con quelle di Jahn, eseguite col calorimetro di Bunsen e frutto di lungo e fecondo studio, mi gioverò per il calcolo di c'/e dei valori da esso ottenuti.

Nella seguente tabella trovansi: nella 1ª colonna le intensità i in Ampères, della corrente, che durava sempre un'ora; nella 2ª colonna le corrispondenti quantità di elettricità $3600\,i$; nella 3ª e 4ª colonna le quantità di calore C_a, C_c in calorie, misurate dal calorimetro secondo che l'elettrodo contenuto in esso funzionava come anodo o come catodo; nella 5ª colonna la semi differenza $(C_a - C_c)/2$ cioè c'; nella 6ª colonna la differenza di potenziale v' che sarebbe necessaria affinchè le suddette $3600\,i$ Coulomb producessero elettricamente la quantità di calore c'.

La quantità di calore C_a è composta del calore Joules prodotto dalla corrente in quella parte della soluzione che trovasi immersa nel calorimetro, (sia p. es. J) e del calore locale c', mentre C_c si compone ancora della quantità di calore J (invariata perchè le condizioni dell'apparecchio e l'intensità della corrente sono rimaste le stesse) diminuita dalla quantità c' che è scomparsa localmente. Si ha dnnque $C_a = J + c'$, $C_c = J - c'$, $c' = (C_a - C_c)/2$ $v' = c'/3600\,i\,.\,0{,}24$.

	i	$3600\,i$	C_a	C_c	c'	K
Cu SO_4Cu	0,01411	50,76	80,81	75,60	2,605	0,216
	1736	62,64	145,30	139,36	2,97	0,198
	2446	88,20	229,35	221,18	4,085	0,193
Zn SO_4Zn	2413	86,76	212,25	203,46	4,395	0,212
	2452	88,20	221,34	213,13	4,105	0,148
Cd SO_4Cd	2425	87,30	219,11	212,11	3,50	0,167
	2408	86,76	222,28	215,43	3,425	0,165

Il Valore di c' e di v' così ottenuto, circa 0,2 Volt, è approssimativamente uguale a quello ottenuto colla formula di Hehlmoltz, conforme alla (3) che è applicabile perchè le reazioni sono riversibili. In quanto alle piccole differenze che osservansi fra questi valori come anche nei valori ottenuti pei diversi metalli esse possono derivare o dalla difficoltà delle determinazioni, (poichè la quantità di calore c' che si vuol misurare è unita ad una quantità di calore accessoria, circa 14 volte maggiore) oppure dalla non rigorosa esattezza delle ipotesi su cui è basato il calcolo.

Per le coppie che seguono la semplice relazione $V = C / e$ dev' essere $c' = c''$ quindi sui metalli che ne fanno parte al passaggio di uguali quantità di elettricità si devono produrre o essere assorbite localmente uguali quantità di calore nonostante la diversità di essi metalli ed in specie il diverso calore di combinazione.

Una spiegazione della suddetta costanza approssimativa, che non potrebbe essere attribuita a reazioni secondarie, potrebbe essere la seguente.

Hehlmoltz, per spiegare la forza elettromotrice di contatto fra i metalli, ha supposto che esista fra questi e l'elettricità un' attrazione un po' diversa a seconda dei metalli, la quale, ammessa l'inesistenza della forza elettromotrice di contatto, può servire per spiegare quella termoelettrica.

Ammessa questa attrazione, per ottenere la quantità d'energia fornita dalla combinazione di 1 gr. equiv. di zinco cogli ioni SO_4 bisognerà dedurre dall'energia C' prodotta dalla combinazione, quella occorrente per superare l'attrazione dello zinco per l'elettricità positiva che abbandona l'elettrodo; essa sarebbe rappresentata da c'. Secondo quest'ipotesi il calore locale c' rappresenterebbe presso l'anodo il calore d'evaporazione (o di passaggio dal metallo all'elettrolito) dell'elettricità positiva e presso il catodo quello di condensazione della stessa elettricità.

Concludendo dai suddetti calcoli risulterebbe per la coppia Daniell:

1°) che la differenza di potenziale fra ciascun metallo e la soluzione del suo sale è, con una certa approssimazione, proporzionale al calore di combinazione e soluzione del metallo per grammo-equivalente colla parte elettronegativa del sale, ossia approssimativamente uguale a questo calore espresso in Joules, diviso per l'unità elettrochimica d'elettricità espressa in Coulomb;

2°) che la proporzionalità e l'uguaglianza suddette divengono esatte quando s'aggiunga alla differenza di potenziale circa 0,2 Volt, oppure si deduca dal calore di combinazione la corrispondente quantità di calore che suppongo venga impiegata ad allontanare l'elettricità positiva dal metallo superando la reciproca loro attrazione, o venga prodotta nel passaggio inverso.

FORZE PONDEROMOTRICI ESERCITATE DA UN CAMPO MAGNETICO OMOGENEO SU UNA CORRENTE CONTINUA RETTILINEA INDEFINITA

DI BRUTO CALDONAZZO.

1. Forze ponderomotrici.

Le azioni che un campo elettromagnetico esercita sulle masse elettriche e magnetiche situate in un corpo si manifestano come azioni meccaniche agenti sulla massa del corpo stesso; e per questo le forze corrispondenti a tali azioni prendono il nome di « forze ponderomotrici ».

Maxwell [1], si propose la determinazione di tali forze assimilandole a tensioni interne tendenti a deformare il mezzo; perciò spesso vengono indicate col nome di tensioni maxvelliane.

Hertz [2]) invece ammettendo per tali forze il principio della azione eguale ed opposto alla reazione ed il principio della conservazione dell'energia determinò le forze ponderomotrici partendo dalle sue equazioni fondamentali della elettrodinamica per un corpo in movimento.

Senza entrare in discussione sopra la maggiore o minore attendibilità del risultato ottenuto dal primo o dal secondo dei due grandi fisici matematici mi sono proposto la determinazione tanto secondo Maxwell che secondo Hertz delle forze ponderomotrici che un campo magnetico omogeneo esercita sopra una corrente continua in un conduttore cilindrico indefinito. Dapprima, date le espressioni di tali forze pel caso generale, accenno che per altra via e senza avvertirlo Ein-

[1]) Maxwell. « Treatise » II, pag. 254 (1873).

[2]) Hertz. *Ann. der Phys.* 41, pag. 389 (1890), oppure *Untersuchungen*, pag. 234 e 275 (1895).

sein e Laub [1]) diedero per queste forze espressioni che coincidono con quelle di Maxwell.

Dalle espressioni in forma vettoriale delle forze ponderomotrici agenti per unità di volume deduco le espressioni delle equivalenti pressioni fittizie in superficie. Determinato poi il campo magnetico risultante all'esterno ed all'interno del conduttore applico direttamente le formule di Maxwell e di Hertz. Ottengo quindi la forza risultante agente su ogni porzione di cilindro conduttore di lunghezza 1 (e che indicherò in seguito col nome di sezione unitaria) integrando su questa porzione la forza di volume agente all'interno del conduttore per unità di volume e aggiungendo a questo primo contributo il contributo portato dalla discontinuità delle pressioni fittizie in superficie. Accenno poi come per altra via si poteva calcolare questa risultante; infine confronto i due diversi valori ottenuti.

2. Forze ponderomotrici esercitate da un campo magnetico su una corrente.

Secondo **Maxwell** la forza esercitata su l'unità di volume di un corpo magnetizzato con una intensità di magnetizzazione **M**, da un campo magnetico di forza **H** è secondo l'asse delle x

$$\mathbf{M}_x \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial x} + \mathbf{M}_y \frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial y} + \mathbf{M}_z \frac{\partial \mathbf{H}_z}{\partial z}$$

ossia, essendo

$$\mathbf{M} = \frac{\mu - 1}{4\pi} \mathbf{H},$$

questa forza è rappresentata dal vettore

$$\frac{\mu - 1}{8\pi} \operatorname{grad} \mathbf{H}^2, \tag{1}$$

essendo μ la permeabilità magnetica del mezzo.

[1]) Einstein und Laub. *Ann. der Phys.* 26, pag. 541 (1908).

Se poi il corpo magnetizzato è percorso da una corrente elettrica di densità $\mathbf{i}$ si deve aggiungere alla forza (1) la forza

$$\frac{1}{c}[\mathbf{i}\mathbf{B}] \tag{2}$$

in cui

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

e c indica la velocità di propagazione della luce nell'etere.

Quindi complessivamente la forza agente sull'unità di volume è

$$\mathbf{F} = \frac{\mu - 1}{8\pi} \operatorname{grad} \mathbf{H}^2 + \frac{1}{c}[\mathbf{i}\mathbf{B}]. \tag{3}$$

Supponendo che questa forza determini nel mezzo uno stato di tensione otteniamo come componenti speciali della forza agente sull'unità di superficie perpendicolare all' asse delle x

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{H}_x \mathbf{B}_x - \frac{1}{2}\mathbf{H}^2\right), \\ X_y &= \frac{1}{4\pi}\mathbf{H}_x \mathbf{B}_y, \\ X_z &= \frac{1}{4\pi}\mathbf{H}_x \mathbf{B}_z, \end{aligned} \tag{4}$$

essendo $X_y = Y_x$ ecc.

Secondo Einstein e Laub invece la forza fornita dal campo magnetico in luogo della (1) è

$$(\mathbf{M}, \operatorname{grad}) \mathbf{H} \tag{1 a}$$

e quella che si deve aggiungere se il corpo è percorso da corrente di densità $\mathbf{i}$, secondo la legge di Biot e Savart è

$$\frac{1}{c}[\mathbf{i}\mathbf{H}]. \tag{2 a}$$

In luogo della (3) abbiamo allora

$$\mathbf{F} = (\mathbf{M}, \operatorname{grad}) \mathbf{H} + \frac{1}{c}[\mathbf{i}\mathbf{H}]. \tag{3 a}$$

Per dimostrare che la (3a) coincide con la (3) osserviamo che è

$$(\mathbf{M}, \mathrm{grad})\,\mathbf{H}_x = \frac{\mu - 1}{4\pi}\left(\mathbf{H}_x \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial x} + \mathbf{H}_y \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial y} + \mathbf{H}_z \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial z}\right)$$

(5)

$$= \frac{\mu - 1}{4\pi}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{H}^2}{\partial x} - [\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}]_x\right)$$

e quindi

$$(\mathbf{M}, \mathrm{grad})\,\mathbf{H} = \frac{\mu - 1}{8\pi}(\mathrm{grad}\,\mathbf{H}^2 + 2\,[\mathrm{rot}\,\mathbf{H}, \mathbf{H}])\,.$$

Essendo poi [1])

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{i}$$

si ha subito

$$(\mathbf{M}, \mathrm{grad})\,\mathbf{H} = \frac{\mu - 1}{8\pi}\,\mathrm{grad}\,\mathbf{H}^2 + \frac{1}{c}\,[\mathbf{i}\,\mathbf{B}] - \frac{1}{c}\,[\mathbf{i}\,\mathbf{H}]\,,$$

la quale ci mostra subito l'eguaglianza delle (3) alla (3a).

Secondo Hertz la forza esercitata da un campo magnetico su una corrente per unità di volume ha per componenti speciali

$$\mathrm{X}_x = \frac{1}{4\pi}\left\{\mathbf{H}_x\,\mathbf{B}_x - \frac{1}{2}(\mathbf{H}\,\mathbf{B})\right\},$$

(4a)

$$\mathrm{X}_y = \mathrm{Y}_x = \frac{1}{4\pi}\,\mathbf{H}_x\,\mathbf{B}_y\,,\ \text{ecc.}$$

Le componenti di questa forza secondo l'asse delle x

$$\mathbf{F}_x = \frac{\partial \mathrm{X}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{X}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{X}_z}{\partial z}$$

assume per le (4a) la forma

[1]) V. ad es. Abraham. » Theorie der Elektrizität », I, pag. 227 (1907).

$$F_x = \frac{1}{8\pi} \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{H}_x \mathbf{B}_x) + 2 \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{H}_x \mathbf{B}_z) + 2 \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{H}_x \mathbf{B}_z) - \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{H}\,\mathbf{B}) \right\}$$

$$= \frac{1}{8\pi} \left\{ 2(\mathbf{B}\,\mathrm{grad})\,\mathbf{H}_x + 2\,\mathbf{H}_x\ \mathrm{div}\,\mathbf{B} - \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{H}\,\mathbf{B}) \right\}$$

e quindi la forza $\mathbf{F}'$ è il vettore

$$\mathbf{F}' = \frac{1}{8\pi} \{ 2(\mathbf{B}\,\mathrm{grad})\,\mathbf{H} - \mathrm{grad}\,(\mathbf{H}\,\mathbf{B}) \}, \tag{6}$$

essendo

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0 .$$

Inoltre dalla (5) ricaviamo facilmente moltiplicando per $\frac{8\pi\mu}{\mu - 1}$

$$2(\mathbf{B}, \mathrm{grad})\,\mathbf{H} = \mu\,\mathrm{grad}\,\mathbf{H}^2 + \frac{8\pi}{c}[\mathbf{i}\,\mathbf{B}],$$

ed essendo

$$\mathrm{grad}\,(\mathbf{H}\,\mathbf{B}) = \mu\ \mathrm{grad}\,\mathbf{H}^2 + \mathbf{H}^2\ \mathrm{grad}\,\mu$$

possiamo scrivere la (6)

$$\mathbf{F}' = \frac{1}{c}[\mathbf{i}\,\mathbf{B}] - \frac{1}{8\pi}\mathbf{H}^2\,\mathrm{grad}\,\mu . \tag{6a}$$

Vediamo quindi le forze $\mathbf{F}$ ed $\mathbf{F}'$ date rispettivamente dalle (3) e (6a) non coincidono e la loro differenza è

$$\mathbf{F} - \mathbf{F}' = \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,(\mathbf{M}\,\mathbf{H}) .$$

Confrontando poi le (4) con le (4a) si vede che nelle espressioni delle X_x, Y_y, Z_z date dalle seconde in luogo di $\mathbf{H}^2$ compare $(\mathbf{H}\,\mathbf{B})$.

Determiniamo ora le forze superficiali corrispondenti rispettivamente a $\mathbf{F}$ e $\mathbf{F}'$.

Consideriamo la forza $\mathbf{F}$ agente in un campo v limitato dalla superficie f. La risultante della forza agente in questo

campo ha per componente secondo l'asse delle x, tenendo conto delle (4)

$$\int \mathbf{F}_x \, dv = \frac{1}{4\pi} \int dv \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{H}_x \mathbf{B}_x - \frac{1}{2} \mathbf{H}^2 \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{H}_x \mathbf{B}_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{H}_x \mathbf{B}_z) \right\} .$$

La funzione che compare nel secondo integrale si può sempre considerare come divergenza del vettore di componenti $\mathbf{X}_x, \mathbf{X}_y, \mathbf{X}_z$; per cui indicando con $\mathbf{n}$ un vettore unitario normale alla superficie f diretto all'esterno del volume v, pel lemma di Gauss possiamo scrivere

$$\int \mathbf{F}_x \, dv = \frac{1}{4\pi} \int df \left\{ \left(\mathbf{H}_x \mathbf{B}_x - \frac{1}{2} \mathbf{H}^2 \right) \cos nx + \mathbf{H}_x \mathbf{B}_y \cos ny + \mathbf{H}_x \mathbf{B}_z \cos nz \right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int df \left\{ \mathbf{H}_x (\mathbf{B}\,\mathbf{n}) - \frac{1}{2} \mathbf{H}^2 \cos n\,x \right\} .$$

Alla forza $\mathbf{F}$ quindi agente sull'unità di volume possiamo sostituire una forza superficiale agente per unità di superficie

$$\mathbf{T} = \frac{1}{8\pi} \{ 2\,\mathbf{H} (\mathbf{B}\,\mathbf{n}) - \mathbf{H}^2 \mathbf{n} \} . \tag{7}$$

Se consideriamo invece l'espressione della forza agente sull'unità di volume data da Hertz, con processo analogo otteniamo

$$\int \mathbf{F}'_x \, dv = \frac{1}{8\pi} \int dv \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial x} \left((\mathbf{H}_x \mathbf{B}_x) - \frac{1}{2} (\mathbf{H}\,\mathbf{B}) \right) + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{H}_x \mathbf{B}_y + 2 \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{H}_x \mathbf{B}_z \right\} =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int df \{ 2\,\mathbf{H}_x (\mathbf{B}\,\mathbf{n}) - (\mathbf{B}\mathbf{H}) \cos n\,x \} .$$

La forza superficiale unitaria è in tal caso

$$\mathbf{T}' = \frac{1}{8\pi}\{2\mathbf{H}(\mathbf{B}\mathbf{n}) - (\mathbf{B}\mathbf{H})\mathbf{n}\}$$

oppure sotto altra forma vettoriale

$$\mathbf{T}' = \frac{1}{8\pi}\{\mathbf{H}(\mathbf{B}\mathbf{n}) + [\mathbf{B}[\mathbf{H}\mathbf{n}]]\}. \tag{7a}$$

3. Posizione del problema.

In un campo magnetico omogeneo $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_{0z}$ si trova un conduttore cilindrico indefinito di raggio R, coll'asse coincidente coll'asse delle y. Facciamo passare pel cilindro una corrente continua di densità $\mathbf{i} = \mathbf{i}_y$. Determinare la forza ponderomotrice che il campo magnetico risultante esercita sul cilindro per ogni porzione di lunghezza 1, nell'ipotesi che il mezzo esterno al cilindro e il mezzo costituente il cilindro siano isotropi e le loro permeabilità magnetiche rispettivamente μ_1 e μ_2 siano costanti.

4. Determinazione del campo magnetico risultante.

Il campo magnetico risultante è costituito dal campo primitivo $\mathbf{H}_0$ a cui si sovrappongono il campo indotto dalla discontinuità del mezzo sulla superficie del conduttore e il campo determinato dalla corrente. Indicando con φ_1 e φ_2 i potenziali del campo indotto rispettivamente fuori e dentro il conduttore dalla detta discontinuità, essi devono determinarsi in modo che la induzione magnetica normale e la forza magnetica tangenziale alla superficie del cilindro siano continue su questa superficie.

Queste condizioni analiticamente sono rappresentate dalle equazioni

$$\text{I}\quad\left\{\begin{aligned} &\varphi_1 = \varphi_2\,, && \text{per } \rho = \mathrm{R} \\ &\mu_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} - \mu_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = (\mu_2 - \mu_1)\,\mathrm{H}_0\frac{\partial z}{\partial n}\,, && \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \end{aligned}\right.$$

essendo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, ed n la normale alla superficie diretta all'esterno del cilindro. A queste poi si aggiungono le condizioni indefinite

$$\text{II} \qquad \begin{cases} \Delta_2 \varphi_1 = 0 \,, & \rho \geq R \\ \Delta_2 \varphi_2 = 0 \,, & \rho \leq R \,. \end{cases}$$

Per ragioni di simmetria le φ sono indipendenti da y; possiamo ridurre il problema quindi sul piano xz. Riferendo i punti di questo piano a un sistema polare di coordinate ρ, ϑ le nostre condizioni ai limiti diventano

$$\text{(Ia)} \qquad \begin{cases} \varphi_1(\rho, \vartheta) = \varphi_2(\rho, \vartheta) & \rho = R \\ \mu_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\varphi \rho} - \mu_1 \dfrac{\partial \dot{\varphi}_1}{\partial \rho} = (\mu_2 - \mu_1) H_0 \operatorname{sen} \vartheta \,, & \text{"} \quad \text{"} \end{cases}$$

mentre per le condizioni indefinite tanto φ_1 che φ_2 devono essere soluzioni della

$$\text{(IIa)} \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} = 0 \,.$$

L'integrale generale di questa

$$\varphi = \sum_{\nu=0}^{\infty} (A_\nu \rho^\nu + B_\nu \rho^{-\nu}) (C_\nu \cos \nu\vartheta + D_\nu \operatorname{sen} \nu\vartheta)$$

ci permette di dare a φ_1 e φ_2 le seguenti espressioni

$$\varphi_1 = K H_0 R^2 \frac{\operatorname{sen} \vartheta}{\rho} \,, \qquad \rho \geq R$$

$$\varphi_2 = K H_0 \rho \operatorname{sen} \vartheta \,, \qquad \rho \leq R$$

soddisfacendo così alle condizioni che φ_1 si annulli per $\rho = \infty$ e che φ_2 resti finita per $\rho = 0$, in cui è

$$\text{(8)} \qquad K = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}$$

soddisfacendo così alla (I a).

Il campo poi determinato dalla corrente non dipende da un potenziale scalare ma bensì da un potenziale vettore [1])

$$\mathbf{A} = \frac{\mu \mathbf{i}}{c} \int \frac{dv}{r}$$

in modo che la corrispondente induzione magnetica è

$$\mathbf{B} = \text{rot}\, \mathbf{A} \,.$$

Nel nostro caso **A** deve essere scelto in modo che siano soddisfatte ancora le condizioni espresse dalle (I) e (II). Introducendo ora l' intensità di corrente $\mathbf{J} = \mathbf{J}_y = \pi R^2 \mathbf{i}$, i potenziali vettori pel mezzo esterno ed interno al cilindro sono rispettivamente [2])

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_{1y} = -2\mu_1 \frac{\mathbf{J}}{c} \log \rho \,, \qquad \rho \geq R$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_{2y} = -\mu_2 \frac{\mathbf{J}}{c} \frac{\rho^2}{R^2} \,, \qquad \rho \leq R \,.$$

Abbiamo ora tutti gli elementi necessari per esprimere in base alla $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \text{grad}\, \varphi + \frac{1}{\mu} \text{rot}\, \mathbf{A}$ il campo magnetico risultante internamente ed esternamente al cilindro.

Abbiamo cioè riferendoci con l' indice 1 e 2 rispettivamente al campo esterno ed interno, in coordinate cartesiane:

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} H_{1x} &= K\, H_0 \frac{R^2}{\rho^2} \operatorname{sen} 2\vartheta + 2 \frac{\mathbf{J}}{c} \frac{\operatorname{sen} \vartheta}{\rho} \,, \\ H_{1y} &= 0 \,, \\ H_{1z} &= -K\, H_0 \frac{R^2}{\rho^2} \cos 2\vartheta - \frac{2\,\mathbf{J}}{c} \frac{\cos \vartheta}{\rho} \,; \end{aligned} \right.$$

[1]) Abraham. L. c., pag. 227.

[2]) Debye. « Encykl. der Math. Wiss. V, 17, num. 20.

$$(9a)\quad \begin{cases} H_{2x} = \dfrac{2J}{c}\dfrac{\rho}{R^2}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\ , \\ H_{2y} = 0\ , \\ H_{2z} = -(K-1)\,H_o - \dfrac{2J}{c}\dfrac{\rho}{R^2}\cos\vartheta\ ; \end{cases}$$

e in coordinate cilindriche:

$$(10)\quad \begin{cases} H_{1\rho} = H_o\left(K\dfrac{R^2}{\rho^2}+1\right)\mathrm{sen}\,\vartheta\ , \\ H_{1y} = 0\ , \\ H_{1\zeta} = -H_o\left(K\dfrac{R^2}{\rho^2}-1\right)\cos\vartheta - \dfrac{2J}{c}\dfrac{1}{\rho}\ ; \end{cases}$$

$$(10a)\quad \begin{cases} H_{2\rho} = -H_o\,(K-1)\,\mathrm{sen}\,\vartheta\ , \\ H_{2y} = 0\ , \\ H_{2\zeta} = -H_o\,(K-1)\cos\vartheta - \dfrac{2J}{c}\dfrac{\rho}{R^2}\,. \end{cases}$$

Sulla superficie è facile verificare ora che sono soddisfatte le condizioni ai limiti; infatti si ha per $\rho = R$

$$(11)\qquad B_{1\rho} = B_{2\rho} = \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\,H_o\ \mathrm{sen}\,\vartheta\ ,$$

$$(12)\qquad H_{1\zeta} = H_{2\zeta} = \frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\,H_o\cos\vartheta - \frac{2J}{c}\frac{1}{R}\,.$$

5. Forza ponderomotrice esercitata sulla corrente per sezione unitaria.

Per la determinazione della forza ponderomotrice esercitata su ogni sezione di cilindro di lunghezza 1 procediamo prima in questo modo: integriamo le forza agente sull' unità di volume sulla porzione di cilindro considerata ed aggiungiamo la risultante delle pressioni fittizie agenti sulla corrispondente superficie rispettivamente dalla parte di ciascun mezzo.

a) Secondo Maxwell ed Einstein-Laub.

Dalla (3a), ponendo in essa $\mathbf{i} = \frac{1}{\pi R^2} \mathbf{J}$, abbiamo pei punti interni al cilindro, tenendo conto che per le (9a) $\mathbf{H}_{2x}$ e $\mathbf{H}_{2z}$ sono indipendenti rispettivamente da x e z e che è $\mathbf{H}_{2y} = 0$,

$$\mathbf{F}_x = \frac{\mu_2 - 1}{4\pi} \mathbf{H}_{2z} \frac{\partial \mathbf{H}_{2x}}{\partial z} + \frac{\mathbf{J}}{c\pi R^2} \mathbf{H}_{2z},$$

$$\mathbf{F}_y = 0,$$

$$\mathbf{F}_z = \frac{\mu_2 - 1}{4\pi} \mathbf{H}_{2x} \frac{\partial \mathbf{H}_{2z}}{\partial x} - \frac{\mathbf{J}}{c\pi R^2} \mathbf{H}_{2x};$$

ossia, sostituendo direttamente per le componenti di $\mathbf{H}_2$ i valori dati dalle (9a) e tenendo conto della posizione (8)

$$\mathbf{F}_x = \frac{\mu_2 + 1}{\pi R^2} \frac{\mathbf{J}}{c} \left\{ \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \mathbf{H}_0 - \frac{\mathbf{J}}{c} \frac{\rho}{R^2} \cos\vartheta \right\},$$

$$\mathbf{F}_y = 0,$$

$$\mathbf{F}_z = -\frac{\mu_2 + 1}{\pi R^2} \frac{\mathbf{J}^2}{c^2} \frac{\rho}{R^2} \operatorname{sen}\vartheta .$$

Integriamo ora queste componenti sul volume di una sezione unitaria; la prima di queste componenti ci dà

$$\int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta\, \mathbf{F}_x = \frac{1}{c} \frac{\mu_1(\mu_2 + 1)}{\mu_1 + \mu_2} \mathbf{H}_0 \mathbf{J},$$

mentre gli integrali delle altre due si annullano.

La forza di volume risultante quindi è diretta secondo l'asse x ed il suo valore si può mettere sotto la forma

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_x = \frac{1}{c} \frac{\mu_2 + 1}{\mu_1 + \mu_2} \mathbf{B}_{10} \mathbf{J}, \tag{13}$$

essendo $\mathbf{B}_{10} = \mu_1 \mathbf{H}_0$ l'induzione magnetica all'esterno del cilindro del campo primitivo.

Vediamo ora quale contributo portano a questa risultante le tensioni superficiali.

Dalle (7) abbiamo che la somma delle forze agenti sull'unità di superficie è, tenuto conto che sulla superficie vale la (11),

$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 = \frac{1}{8\pi}\left\{2\,(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)(\mathbf{B}_2\,\mathbf{n}) + (\mathbf{H}_1^2 - \mathbf{H}_2^2)\,\mathbf{n}\right\}.$$

Se teniamo conto poi che per la continuità in superficie è

$$\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1 = \mathbf{n}\left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}\right)(\mathbf{B}_2\,\mathbf{n}),\quad \mathbf{H}_1^2 - \mathbf{H}_2^2 = \left(\frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu_2^2}\right)(\mathbf{B}_2\,\mathbf{n})^2,$$

possiamo scrivere

$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 = \frac{\mathbf{n}}{8\pi}\left\{2\left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}\right) + \frac{1}{\mu_1^2} - \frac{1}{\mu_2^2}\right\}(\mathbf{B}_2\,\mathbf{n})^2.$$

Essendo, come abbiamo detto, $\mathbf{n}$ normale e diretto verso l'esterno alla superficie del cilindro è $(\mathbf{B}_2\,\mathbf{n}) = \mathbf{B}_{2\rho}$ e per la (11)

$$\mathbf{B}^2_{2\rho} = 4\left(\frac{\mu_1\,\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\right)^2 \mathbf{H}_0^2 \operatorname{sen}^2\vartheta\,.$$

Integrando allora le componenti di $\mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2$ sulla superficie ognuna di esse da un contributo nullo perchè $\int_0^2 \operatorname{sen}^2\vartheta \cos\vartheta\, d\vartheta$, $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3\vartheta\, d\vartheta$ che compaiono nella risultante secondo l'asse x e l'asse z sono nulli, e perchè la risultante secondo l'asse y è pure nulla essendo sempre $\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2$ perpendicolare a questo asse.

Concludendo allora possiamo asserire che partendo dalle formule di Maxwell ed Einstein-Laub, la forza ponderomotrice agente su ogni sezione unitaria del conduttore è diretta secondo l'asse x, normale quindi alla corrente e al campo magnetico primitivo, ed è espressa dalla (13).

Nel caso particolare in cui il mezzo esterno ha permeabilità magnetica eguale a 1, cioè nel caso in cui questo mezzo è l'etere la (13) diventa

$$P = P_x = \frac{1}{c} H_0 J . \tag{14}$$

b) Secondo Hertz.

La forza agente sull'unità di volume è in questo caso data dalla (6a), che per i punti interni al conduttore, essendo ivi $\mu = \mu_2 =$ cost., diventa

$$F' = \frac{1}{c \pi R^2} [J B_2] .$$

Per le (9a) e la (8) le componenti di questa forza sono

$$F'_x = \frac{1}{c} \frac{2 \mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{1}{\pi R^2} H_0 J - \frac{\mu_2}{c^2} \frac{2 J^2}{\pi R^4} \rho \cos \vartheta$$

$$F'_y = 0$$

$$F'_z = - \frac{\mu_2}{c^2} \frac{2 J^2}{\pi R^4} \rho \operatorname{sen} \vartheta .$$

Integrando queste componenti sul volume di una sezione unitaria si vede subito che solo il primo termine del secondo membro di F'_x non si annulla, mentre i contributi secondo gli altri due assi vanno a zero: resta quindi sola una risultante secondo l'asse delle x

$$\int_0^R \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta \, F'_x = \frac{1}{c} \frac{2 \mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} H_0 J . \tag{15}$$

Determiniamo la risultante delle pressioni fittizie in superficie.

La forza agente sull'unità di superficie da una parte e dall'altra dei due mezzi è per le (7a) e per le note continuità in superficie:

$$\mathbf{T}'_1 + \mathbf{T}'_2 = \frac{1}{8\pi}\left\{(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)(\mathbf{B}_2\mathbf{n}) + [(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)[\mathbf{H}_2\mathbf{n}]]\right\} ;$$

a questa si può dare anche la forma, essendo

$$\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1 = \mathbf{n}\left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}\right)(\mathbf{B}_2\mathbf{n}) ,$$

$$\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1 = \quad (\mu_2 - \mu_1)[\mathbf{H}_2\,\mathbf{n}] ;$$

$$\mathbf{T}'_1 = \mathbf{T}'_2 = \frac{\mathbf{n}}{8\pi}\left\{\left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}\right)(\mathbf{B}_2\mathbf{n})^2 + (\mu_2 - \mu_1)[\mathbf{H}_2\mathbf{n}]^2\right\} .$$

Integrando questa forza sulla superficie, per quanto abbiamo visto nel caso precedente di Maxwell, il termine che contiene $(\mathbf{B}_2\mathbf{n})^2$ non dà alcun contributo. Resta quindi a considerare solo quel termine che contiene

$$[\mathbf{H}_2\mathbf{n}]^2 = \mathbf{H}^2_{2\vartheta} = \frac{4\mu_1^2}{(\mu_1 + \mu_2)^2}\mathbf{H}_0^2\cos^2\vartheta + \\ + \frac{4\mathbf{J}^2}{c^2\mathrm{R}^2} - \frac{8\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}\frac{\mathbf{H}_0\mathbf{J}}{c\,\mathrm{R}}\cos\vartheta .$$

se teniamo conto del valore di $\mathbf{H}_{2\vartheta}$ in superficie dato dalla (12).

Queste espressioni dipendono esclusivamente da ϑ e poichè $\mathbf{T}'_1 + \mathbf{T}'_2$ è un vettore normale alla superficie del conduttore le sue componenti secondo gli assi x e z si ottengono moltiplicando il suo valore rispettivamente per $\cos\vartheta$ e $\operatorname{sen}\vartheta$.

Integrando allora sulla superficie di una sezione unitaria si ottiene

$$\text{(16)} \qquad \mathrm{R}\int_0^{2\pi}(\mathbf{T}'_{1x} + \mathbf{T}'_{2x})\,d\vartheta = \frac{1}{c}\,\frac{\mu_1(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1 + \mu_2}\mathbf{H}_0\mathbf{J} ;$$

gli integrali delle altre due componenti sono nulli.

Quindi anche la risultante delle forze di superficie è diretta secondo l'asse x. Sommando la (15) colla (16) otteniamo la forza totale agente su ogni sezione unitaria del conduttore

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P}'_x = \frac{1}{c}\,\frac{2\mu_1\mu_2 + \mu_1(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1 + \mu_2}\mathbf{H}_0\mathbf{J} ,$$

ossia

(13 a) $$\mathbf{P}' = \mathbf{P}'_x = \frac{1}{c}\,\mathbf{B}_{10}\,\mathbf{J}\,.$$

Come ho già accennato la risultante delle forze ponderomotrici si ottiene anche integrando sulla superficie del conduttore la pressione esercitata dal campo esterno. Come controprova dei risultati ottenuti ci basterà provarlo pel caso di Maxwell. In tal caso la detta pressione per unità di superficie ha per componente secondo l' asse x (7)

$$\mathbf{T}_{1x} = \frac{1}{8\pi}\left\{2\,\mathbf{H}_{1x}\,\mathbf{B}_{1\rho} - \mathbf{H}_1^2 \cos\vartheta\right\}$$

e per le (9) e (11)

$$\mathbf{T}_{1x} = \frac{1}{4\pi}\left\{\mathrm{K}\,\mathbf{H}_0 \operatorname{sen} 2\vartheta + \frac{2\,\mathbf{J}}{c}\,\frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\mathrm{R}}\right\}\frac{2\,\mu_1\,\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\,\mathbf{H}_0 \operatorname{sen}\vartheta -$$
$$-\frac{1}{8\pi}\left\{(\mathrm{K}+1)^2\,\mathbf{H}_0^2 \operatorname{sen}^2\vartheta + \left[(\mathrm{K}-1)\,\mathbf{H}_0\cos\vartheta + \frac{2\,\mathbf{J}}{c\,\mathrm{R}}\right]^2\right\}\cos\vartheta\,.$$

Integrando sulla superficie di una sezione unitaria solo i termini contenenti $\operatorname{sen}^2\vartheta$ e $\cos^2\vartheta$ porteranno un contributo diverso da zero; abbiamo quindi tenendo conto anche della (8).

$$\mathrm{R}\int_0^{2\pi}\mathbf{T}_{1x}\,d\vartheta = \frac{1}{c}\,\frac{\mu_1\,\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\,\mathbf{H}_0\,\mathbf{J} + \frac{1}{c}\,\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\,\mathbf{H}_0\,\mathbf{J}$$

(17)

$$= -\frac{1}{c}\,\frac{\mu_2+1}{\mu_1+\mu_2}\,\mathbf{B}_{10}\,\mathbf{J}\,.$$

Poichè $\mathbf{T}_{1y}$ è nullo anche la sua risultante sulla superficie del cilindro è nulla, e poichè la espressione di $\mathbf{T}_{1z}$ analoga a quella di $\mathbf{T}_{1x}$ risulta composta da termini affetti da uno dei fattori $\cos 2\vartheta \operatorname{sen}\vartheta$, $\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta$, $\operatorname{sen}^3\vartheta$, $\cos^2\vartheta\operatorname{sen}\vartheta$ anche il suo integrale sulla superficie scompare. La risultante della forza agente sulla sezione unitaria è diretta secondo l'asse x è la sua espressione (17) coincide con quella trovata per altra via (13).

6. Confronto dei risultati ottenuti.

La forza ponderomotrice agente su ogni sezione unitaria del cilindro tanto secondo Maxwell che Hertz è diretta secondo l'asse x e quindi normale al campo magnetico e alla corrente, e il valore di essa secondo Maxwell sta al valore secondo Hertz nel rapporto

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{P}'} = \frac{\mu_2 + 1}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Le due espressioni quindi coincidono per $\mu_1 = 1$ come del resto si vede direttamente confrontando la (14) con la (13 a).

Ora osserviamo che l'espressione della forza secondo Hertz

$$\mathbf{P}' = \frac{1}{c}\,\mathbf{B}_{10}\,\mathbf{J}$$

è omogenea rispetto alla permeabilità, mentre non lo è quella di Maxwell

$$\mathbf{P} = \frac{1}{c}\,\frac{\mu_2 + 1}{\mu_1 + \mu_2}\,\mathbf{B}_{10}\,\mathbf{J}\,;$$

questa omogeneità di $\mathbf{P}'$ sta in favore della sua maggiore attendibilità su $\mathbf{P}$.

Inoltre $\mathbf{P}'$ non dipende punto dalla permeabilità magnetica del mezzo conduttore ma unicamente da quella del mezzo esterno per tramite di $\mathbf{B}_{10}$. Questo vien confortato anche dalle seguenti considerazioni. Se invece di un circuito rettilineo indefinito, come nel nostro problema, si prende a considerare un generico circuito chiuso, posto in un campo magnetico qualunque, percorso da una corrente continua, spostando il circuito nel campo il lavoro eseguito dalle forze del campo è proporzionale, oltre che all'intensità della corrente, al flusso magnetico che attraversa la superficie determinata dal circuito. Ma nel movimento del circuito possiamo ben supporre che il campo magnetico indotto dalla discontinuità di μ sulla superficie del conduttore e quello indotto

dalla corrente si spostino assieme al circuito e quindi nel computo del flusso magnetico attraversante il circuito si debba tener conto solamente di quello che dipende dal campo primitivo esterno, di quello cioè che secondo le nostre notazioni dipende da $\mathbf{B}_{10}$.

In ogni caso in generale la differenza che passa tra **P** e **P**′ è molto piccola perchè la permeabilità magnetica μ_1 del mezzo esterno, trattandosi di un dielettrico, di poco differisce dall'unità e quindi anche il rapporto **P**: **P**′ è molto prossimo all' unità.

Molto difficilmente quindi si potrà verificare sperimentalmente quale delle due espressioni **P** o **P**′ sia più attendibile, tanto più che la misura delle forze ponderomotrici è difficile e difficilmente si possono eliminare le cause d' errore.

L' argomento di questa nota mi fu proposto dal prof. M. Abraham cui devo anche far vivi ringraziamenti pei validi suggerimenti datimi.

Milano, maggio 1911.

Un' esperienza da lezione sulla ricomposizione della luce.

Prof. ALESSANDRO AMERIO.

Tra le esperienze che riguardano la ricomposizione della luce si suole ripetere comunemente quella del disco colorato di Newton.

La tinta che il disco assume con la rotazione è in generale ben lontana dal bianco; per lo più è di color caffè e latte, e talvolta presenta gradazioni anche più discoste, a meno che non si illumini intensamente il disco con luce bianca.

Mentre si capisce perfettamente la ragione di questa colorazione, è pur certo che didatticamente l'esperienza non è delle più felici.

Si suol dire infatti che i vari colori ricoprenti il disco non sono effettivamente quelli dello spettro, nè presentano la sua infinita varietà di gradazioni ma sono pochi e impuri; e sta bene, ma ciò non prova che se fossero i colori dello spettro ne risulterebbe il bianco.

Anche eseguendo un'altra delle esperienze più note si potrebbe sempre obiettare che tanto coi prismi contraposti, che con la lente convergente, che con uno o più specchi, i vari colori si fondono contemporaneamente sopra uno schermo, mentre col disco di Newton, questa fusione avviene nell' occhio per il fenomeno fisiologico della persistenza delle imagini.

Per conseguenza conviene fare l' esperienza sostituendo i colori impuri del disco di Newton mediante i colori dello spettro messi opportunamente in rapido moto.

Per ottenere questo si può fare in più modi.

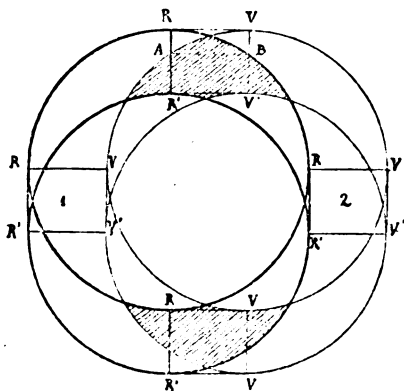
Così si può fare oscillare il prisma, che dà lo spettro su uno schermo, intorno alla deviazione media minima [1]). Sullo schermo si ottiene una striscia bianca eccetto che ai due estremi che sono l'uno rosso l'altro violetto.

Oppure si possono far cadere i raggi dispersi dal prisma su uno specchio girante che li proietta su uno schermo [2]).

Allorchè lo specchio sia posto in rotazione, o sia fatto oscillare, sullo schermo apparirà una striscia *perfettamente* bianca, come se fosse data direttamente dalla sorgente.

Io ritengo sia vantaggioso procedere nel modo seguente, che in fondo è una modificazione dell'ultimo citato.

Si unisca uno specchio a un asse di rotazione in modo che la sua normale faccia con l'asse un angolo di pochi gradi.

I raggi dispersi dal prisma cadano sullo specchio nella direzione dell'asse e vengano proiettati sopra uno schermo, formando uno spettro nel rettangolo RR'VV'. Facendo rotare

rapidamente lo specchio ogni punto dello spettro descriverà un cerchio e tutto l'insieme genererà una specie di corona luminosa nella quale i colori si sovraporranno variamente, come è facile seguire sulla figura, producendo effetti diversi.

[1]) *Lehrbuch der Physik*. Wüllner. L'esperienza è del Münchow.

[2]) Ròiti. « Elem. di Fisica ». Vol. III, pag. 171, e *N. C.*, 1870, vol. IV.

Nella figura i due cerchi marcati in grosso corrispondono alle due estremità alta e bassa del rosso, i due più sottili alle due estremità del violetto.

La sovraposizione dei due colori sarà completa nelle due parti tratteggiate che appariranno perfettamente bianche. Ciò si vedrà meglio facendo cadere sullo schermo solo i raggi che vi producono il rettangolo A B R′ V′ per eliminare il contrasto con le parti vicine colorate.

Nei due rettangoli 1 e 2, ove i colori scorrono su se stessi sensibilmente, si avranno gli spettri inalterati, ed è facile trovare i punti ove si sovrapongono due o più colori consecutivi che sono su tante strisce parallele a R V.

Padova, giugno 1911.
R. Istituto Tecnico.

ERRATA - CORRIGE.

Nella Nota sulla *Resistenza dell' aria*, pubblicata nel fascicolo di Maggio, è incorso un errore derivante da un'omissione.

L'espressione $S + a v$ della superficie *virtuale* di appoggio di un rettangolo in moto, deve essere scritta $S + h. a v$; essendo h un coefficiente che ha le dimensioni di un tempo.

Ma le ultime formule, dove si trascura il termine S, rimangono invariate, purchè nel coefficiente k si intenda raccolto anche il coefficiente h.

Firenze, 15 Luglio, 1911.

C. Del Lungo.

Attilio Mariotti, *gerente responsabile.*

Pubblicazione mensile

Anno LVII - Serie VI - Vol. II - 2° Sem. - Fasc. 8°

Agosto 1911
Pubblicato il 31 Agosto

IL NUOVO CIMENTO

FONDATO DA C. MATTEUCCI E R. PIRIA
E CONTINUATO DA E. BETTI E R. FELICI

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

INDICE:

PISA
STABILIMENTO TIPOGRAFICO TOSCANO
Ditte: Vannucchi-Galileiana-Pieraccini
1911

Circa una maggiore precisazione della legge di degradazione universale e circa una possibile disponibilità indefinita di energia degradabile.

Nota di P. BARRECA.

I.

La legge della degradazione dell'energia di Kelvin non stabilisce quantitativamente come proceda la degradazione universale; ciò non ostante, la letteratura dell'argomento (che non riassumiamo, perchè sarebbe superfluo ed eccessivo) conclude necessariamente verso una quiete universale in epoca finitamente vicina: « Wenn es überhaupt gestattet ist, die Schlusze, die wir aus den Gesetzen der unsere Beobachtung zugänglichen Natur abgeleitet haben, auf das Universum auszudenen, worüber man ja getheilter Meinung sein kann, so würde sich ergeben, dasz das Weltall in sich nicht die Bedingungen für eine ewige Lebensdauer besitzt » [1]. È vero però, che molti autori si astengono dal trarre questa conclusione e dal pronunziarsi su di essa ed inoltre che molti altri le elevano contro il sospetto che non sempre ed ovunque si debba avere degradazione prevalente, il che (filosoficamente parlando e dal punto di vista della ricerca di leggi costanti ed universali quale compito del lavoro scientifico) dovrebbe più esplicitamente enunciarsi col sospettare errata la legge di degradazione medesima.

Un'obiezione di quest'ultimo genere è quella che si appoggia al teorema di H. Poincaré, secondo il quale in un sistema composto di un numero finito di punti materiali e sog-

[1]) Müller-Pouillet. « Trattato » Vol. 2°, pag. 536. Braunschweig 1898. Molti altri trattati elementari accettano tali conclusioni.

getto a forze che dipendono soltanto dalle coordinate, le diverse configurazioni devono riprodursi con approssimazione prefissabile a piacere. In proposito però giova tener presente la controobiezione che il tempo necessario al ripresentarsi approssimato di ogni singola configurazione deve crescere (e rapidamente) quando si aumenti il numero di punti materiali da cui è formato il sistema chiuso. Se dunque, tra le ipotesi possibili sulla quantità totale di materia esistente nell' universo, se ne abbraccia una che la assume infinita [1]), tale tempo diventa infinito e l' obiezione riceve un enunciato illusorio.

La presente nota, invece, si eleva esplicitamente contro la legittimità di una tale deduzione partendo dalla legge di Kelvin e fa osservare che non vi si può giungere con ragionamenti rigorosi. In particolare e con certe ipotesi che non sembrano troppo restrittive, risulta che può perfino darsi che (almeno a partire da un qualche istante) la degradazione (in un senso che sarà spiegato), pur continuando sempre, vada essa stessa attenuandosi in modo tale, che sempre rimanga energia disponibile per future trasformazioni. In tal caso, lo stato di perfetta quiete e di uniformità generale di temperatura sarebbe soltanto assintotico, cioè non raggiungibile.

II.

La proposizione che intendiamo discutere viene solitamente presentata come una estensione del teorema che in un sistema chiuso l' entropia aumenta col tempo. Vi sono diverse difficoltà perchè questa applicazione si possa fare, ma una prima è che sarebbe molto interessante di sapere se in un sistema chiuso l' entropia possa aumentare in modo da raggiungere il proprio valore massimo entro un tempo finito. In vero, man mano che nel sistema chiuso le temperature si vanno eguagliando, gli scambi di calore per irradiazione e conduzione, la dispersione del calore generato dagli attriti e dalle

[1]) Vedi S. Arrhenius. « Die unendlichkeit der Welt ». *Rivista di scienze.* Bologna, N. X 2, Vol. 5, 1909, pag. 217.

correnti termoelettriche, ecc...., devono avvenire sempre più lentamente (talchè le relative degradazioni avvengono anch'esso meno rapidamente); sembra dunque sospettabile che tali rallentamenti possano raggiungere un ammontare tale da rendere il fenomeno assintotico rispetto al tempo.

III.

Una seconda difficoltà ad un'estensione rigorosa del teorema dei sistemi chiusi riguarda la grandezza da considerare nell'enunciato e che sarebbe sempre crescente. Infatti, noi, allo stato attuale delle nostre cognizioni, non sappiamo se la quantità totale di materia esistente nell'universo sia finita od infinita, nè con quale legge sia distribuita nello spazio; per una certa analogia è anche lecito di dubitare se la somma di tutte le entropie dell'universo sia finita od infinita. Ora, in quest'ultimo caso l'asserzione che essa cresce non avrebbe un significato preciso.

Possiamo però pensare a modificare l'enunciato opportunamente.

Diciamo m la massa materiale di un corpo generico ed $\mathrm{E}(t)$ la sua entropia per ogni Kg. nell'istante t, poi consideriamo la massa totale (finita od infinita) dell'universo:

$$\Sigma\, m$$

come finita oppure come infinita di ordine uno e facciamo, con una discreta generalità, l'ipotesi che *l'ordine di infinità della grandezza:*

$$\Sigma\, m \,.\, \mathrm{E}(t)$$

(se non è anch' essa finita) sia qualunque, ma esprimibile con un numero e questo non sia funzione del tempo. Allora, in qualunque caso:

$$\Psi = \frac{\Sigma\, m \,.\, \mathrm{E}(t)}{(\Sigma\, m)^p},$$

dove p è un numero positivo, nullo [1]) o negativo opportunamente scelto, rappresenta una grandezza finita e non nulla,

[1]) Con adeguata convenzione in questo caso.

che va crescendo col tempo e può servire ad enunciare la legge di degradazione universale [1]).

IV.

Cerchiamo adesso, se dopo aver ammessa l'esistenza della funzione Ψ, si sia ancora autorizzati a dedurne l'arresto dei processi universali in tempo finito, facendo qualche considerazione sopra tale funzione:

1.° Ψ pur essendo funzione del tempo, ha dimensioni che non lo contengono; in fatti il suo numeratore è un'entropia. È per questo necessario che contenga un parametro T avente le stesse dimensioni di t, il quale la renda indipendente dalla grandezza della unità di misura scelta per questo. Può dunque sempre prendere la forma:

$$\Psi\left(\frac{t}{T}\right) + \chi(0),$$

dove il termine $\chi(0)$ funzione della sola origine dei tempi potrebbe o non mancare e dove Ψ rappresenta ora operazioni analitiche sul numero puro $\frac{t}{T}$ che non introducono il tempo. In fatti, ad ogni valore della funzione Ψ ne corrisponde uno di $\frac{t}{T}$, sicchè possono mettersi in relazione direttamente.

2.° $\Psi\left(\frac{t}{T}\right)$ è positiva sempre crescente e $\frac{d\Psi}{dt}$ è sempre positiva.

3.° Se contrariamente alle ipotesi fatte, Ψ fosse infinita, le obiezioni precedenti contro il rigore dei ragionamenti

[1]) Se si conoscesse il modo di tendere ad infinito del numeratore (ove questo sia il caso) coll'aumentare del numero di corpi considerati e se tale modo fosse indipendente dal tempo e non obbedisse alla ipotesi di sopra esposta, forse sarebbe per lo meno possibile di sostituire al denominatore una opportuna funzione di tutte le masse materiali, tale da ricondurre ancora il quoziente ad un valore finito e non nullo. Noi, in quanto segue, abbandoniamo questa considerazione, che permetterebbe una generalità ancora maggiore.

che questa nota intende criticare, rimarrebbero inalterate. Vogliamo ora mostrare che anche se è finita (e perfino per $t = \pm \infty$) non può ancora dedursene la proposizione impugnata.

Essendo:

$$\Psi = \int_0^t \frac{d\Psi}{dt} dt \ ,$$

sono possibili due casi:

a) O $\frac{d\Psi}{dt}$ non esiste e non ha senso prima di un certo istante e dopo di un certo altro e allora $\Psi(+\infty)$ e $\Psi(-\infty)$ coincidono coll'integrale arrestato all'istante corrispondente. Questa ipotesi, per quanto riguarda il nostro tema, non richiede ulteriori spiegazioni.

b) Oppure si ritiene che abbia senso il parlare di $\frac{d\Psi}{dt}$ per qualunque t positivo o negativo comunque grande (senza escludere eventualmente valori nulli isolati di $\frac{d\Psi}{dt}$). Allora $\frac{d\Psi}{dt}$ deve comportarsi opportunamente al limite, affinchè l'integrale improprio sia finito. Ora, dalla osservazione seconda risulta che $\frac{d\Psi}{dt}$ ha sempre un medesimo segno; dunque per $t = \pm \infty$ deve necessariamente essere lim $t \frac{d\Psi}{dt}$ nullo, o deve oscillare tra due limiti finiti dei quali uno sia zero (Vedi Pascal. Es. e note critiche di calcolo infin.) vale a dire che $\frac{d\Psi}{dt}$ è colà infinitesima di grado uguale o superiore al primo. Vi sono dunque, nelle ipotesi di cui poco sopra, uno o più punti (almeno uno, ma anche infiniti) nei quali, col presupposto *b)*, la funzione $\frac{d\Psi}{dt}$ del tempo ha presentato o presenta o presenterà massimi relativi e per $t = \pm \infty$ essa è nulla.

Ne segue che $\frac{d^2\Psi}{dt^2}$ non conserverà sempre lo stesso segno e la curva che rappresenta Ψ in coordinate cartesiane, pur

salendo sempre, presenterà in qualche punto concavità verso le Ψ positive ed in qualche altro verso le Ψ negative. Avrà per lo meno un punto di flesso (al finito) (fig. 1); in altri termini: *Nella legge con cui cresce l'entropia media universale per* $(Kg)^p$ *di materia e per le fatte ipotesi, vi devono essere fasi di acceleramento e di rallentamento, restando escluso che cresca in modo uniforme o che vada continuamente accelerando o continuamente rallentando.* Se di queste fasi ve ne sono soltanto due l'ultima è di rallentamento (fig. 1).

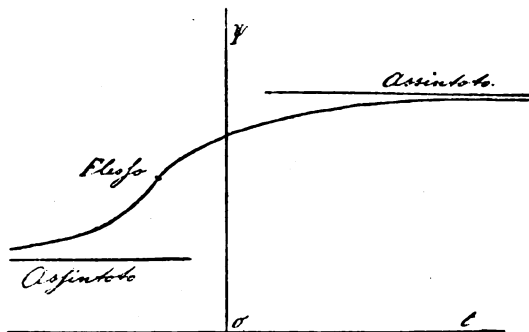



Fig. 1.

Esaminando queste conseguenze dell'ipotesi *b)* sembra che, allo stato attuale delle nostre cognizioni, nulla ci autorizzi rigorosamente ad accettarle in modo esclusivo od a respingerle come assurde. In altri termini e per quanto concerne argomenti del genere considerato in questa nota, niente ci impone o ci vieta di pensare che l'universo si presenti congegnato come se provenisse *ab eterno* e dovesse divenire *in eterno.*

V.

Per molteplici ragioni, dunque, la previsione di uno stato finale di quiete e di equilibrio delle temperature non discende legittimamente dal principio di degradazione e ben a ragione Kelvin nella memoria fondamentale se ne astenne. In vero, in « *On a Universal Tendency in Nature to the Dissipation of Mechanical Energy* » egli si è guardato rigorosamente dal

concludere alla morte certa dell' universo; a questo riguardo ha preferito enunciare una proposizione più limitata, cioè che: « La terra deve essere stata nel passato, ad un' epoca separata da noi da un tempo finito e lo sarà in avvenire in un' epoca separata da noi da un tempo finito, inadatta all' abitazione dell'uomo quale è al presente costituito, a meno che..... ». Questo è in armonia con considerazioni dedotte da disparate discipline.

Invece, nella conferenza « *Ueber die Wechselwirkung der Natürkrafte und etc.* ». Helmholtz dedusse che « ..... wenn das Weltall ungestört dem Ablaufe seiner physikalischen Prozesse überlassen wird, so muss endlich aller Kraftvorrath in Wärme übergehen und alle Wärme in das Gleichgewicht kommen. Dann ist jede Möglichkeit einer weiteren Veränderung erschöpft etc. », lodando la perspicacia del fisico inglese che nel principio di Carnot aveva saputo leggere la sentenza di morte dell' universo [1]).

A questo modo di vedere Kelvin si accostò nella conferenza « Sur l'age de la chaleur solaire [2]) », ma parzialmente e con riserve, perchè dice: « Il risultato sarebbe necessariamente uno stato di riposo e di morte, *se l' universo fosse finito e continuasse ad obbedire alle leggi esistenti* ». Egli preferiva ammettere « uno sviluppo senza fine in uno spazio senza limiti, di una azione che produce trasformazione di energia potenziale in movimento sensibile e poscia in calore, anzichè considerare l'universo come un meccanismo finito funzionante a guisa dei movimenti di orologeria e fermantesi per sempre ». Egli dunque, in questa conferenza, pensava che un arresto completo dei processi universali non cinetico-molecolari conseguisse (per lo meno nel caso dell' universo finito) necessariamente dalla sua legge e preferiva dubitare che questa

[1]) Helmholtz dice: « .... Folgerungen zu lesen verstand, die dem Weltall, wenn auch erst nach unendlich langer Zeit, mit ewigem Tode drohen ». Ora, nel significato dato dal contesto, l' unendlich non va inteso letteralmente, perchè contradirebbe all' ewigem Tode, anzi non avrebbe senso.

[2]) Traduzione francese. Gauthier Villars. 1893. Pag. 225.

non si dovesse verificare in ogni epoca (e forse anche dapertutto); la presente nota toglie la necessità logica di simili restrizioni, anche per chi adotta l'ipotesi più sopra indicata con *b*). Boltzmann ha espresso il desiderio che tale necessità fosse allontanata. In linea secondaria poi, questa nota precisa un po' di più l'enunciato della legge di degradazione universale e fa rilevare alcune deficienze di rigore in certi ragionamenti.

SUL CONCETTO DI DEFORMAZIONE DERIVATA APPLICATO ALLO STUDIO DELLE DEFORMAZIONI DEI SOLIDI CILINDRICI.

NOTA II DI E. ALMANSI.

1. — Riprendo l' argomento che ho incominciato a svolgere in una Nota precedente [1]).

Si esaminava la deformazione di un cilindro isotropo, sollecitato comunque sulle basi, e uniformemente sulla superficie laterale. Dette u, v, w le componenti di spostamento, abbiamo preso in particolare modo a considerare le tre quantità $\frac{\partial w}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$, che resultavano espresse dalle formule (7) della Nota precedente; alle quali converrà che noi diamo una forma più simmetrica chiamando $-$B la costante B. Onde avremo:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \omega_0 + \mathrm{A}y + \mathrm{B}x + \mathrm{K}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u_0}{\partial z} - \mathrm{B}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial v_0}{\partial z} - \mathrm{A}. \tag{2}$$

In queste formule u_0, v_0, w_0 rappresentano un sistema di componenti di spostamento relative alla *deformazione derivata,* e sono quindi da ritenersi note.

Si tratta ora di determinare le tre costanti A, B, K.

Ricordiamo perciò la formula che esprime l'allungamento unitario $\frac{\partial w}{\partial z}$ mediante le tre tensioni τ_{xx}, τ_{yy}, τ_{zz}. Si ha:

[1]) *Nuovo Cimento.* Serie VI. Vol. I. Aprile 1911.

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{E} \{ \tau_{zz} - \lambda (\tau_{xx} + \tau_{yy}) \} ; \qquad (E, \lambda = \text{cost.})$$

onde la formula (1) potrà scriversi

$$(3) \qquad A y + B x + K = \frac{1}{E} \{ \tau_{zz} - \lambda (\tau_{xx} + \tau_{yy}) \} - \omega_0 .$$

Moltiplichiamo per $d\sigma$ e integriamo, estendendo l'integrale a σ (sezione del cilindro normale all'asse). Avremo:

$$A \int_\sigma y \, d\sigma + B \int_\sigma x \, d\sigma + K \int_\sigma d\sigma =$$

$$= \frac{1}{E} \int_\sigma \tau_{zz} \, d\sigma - \frac{\lambda}{E} \int_\sigma (\tau_{xx} + \tau_{yy}) \, d\sigma - \int_\sigma w_0 \, d\sigma .$$

Ma dei sei integrali estesi a σ che figurano in questa equazione, i primi due (momenti statici della sezione rispetto a rette baricentriche) sono nulli; il terzo è uguale a σ; il quarto è lo *sforzo normale* F_z. Denotiamo il quinto con k, poniamo cioè

$$(4) \qquad k = \int_\sigma (\tau_{xx} + \tau_{yy}) \, d\sigma .$$

Si avrà, dividendo per σ:

$$(5) \qquad K = \frac{F_z}{E\sigma} - \frac{\lambda}{E\sigma} k - \frac{1}{\sigma} \int_\sigma w_0 \, d\sigma .$$

Espressioni analoghe si otterranno per le altre due costanti A e B, moltiplicando l'eq. (3) per $y\,d\sigma$ ed $x\,d\sigma$, anzichè per $d\sigma$. Dovrà osservarsi che anche il *momento misto* rispetto agli assi principali d'inerzia della sezione, $\int_\sigma x y \, d\sigma$, è nullo; mentre i due integrali $\int_\sigma y^2 \, d\sigma$ e $\int_\sigma x^2 \, d\sigma$ rappresentano i momenti d'inerzia I_x ed I_y; che inoltre gl'integrali $\int_\sigma \tau_{zz} \, y \, d\sigma$ e $\int_\sigma \tau_{zz} \, x \, d\sigma$ rappresentano i *momenti flettenti* M_x ed M_y. E si troverà:

$$
(6) \qquad \left\{
\begin{aligned}
A &= \frac{M_x}{E I_x} - \frac{\lambda}{E I_x} a - \frac{1}{I_x} \int_\sigma w_0 \, y \, d\sigma , \\
B &= \frac{M_y}{E I_y} - \frac{\lambda}{E I_y} b - \frac{1}{I_y} \int_\sigma w_0 \, x \, d\sigma ,
\end{aligned}
\right.
$$

ove :

$$
(7) \qquad a = \int_\sigma (\tau_{xx} + \tau_{yy}) \, y \, d\sigma , \quad b = \int_\sigma (\tau_{xx} + \tau_{yy}) \, x \, d\sigma .
$$

In una deformazione come quella che esaminiamo le tensioni interne nelle quali manca l' indice z, in particolare τ_{xx} e τ_{yy}, sono indipendenti da z (Nota prec. § 5); onde le quantità a, b, k, date dalle formule (4) e (7), saranno le stesse per tutte le sezioni σ, saranno cioè delle costanti. Le formule (5) e (6) fanno dunque dipendere il calcolo di A, B, K, dal calcolo di queste nuove costanti a, b, k.

Stabilirò ora una formula generale dalla quale potremo ricavare i valori delle tre costanti a, b, k, senza determinare effettivamente le tensioni τ_{xx} e τ_{yy}.

2. — Sieno f e g due funzioni finite e continue, insieme alle loro derivate prime, delle sole variabili x ed y. E consideriamo la quantità

$$
(8) \qquad J = \int_\sigma \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial f}{\partial y} \tau_{xy} + \frac{\partial g}{\partial x} \tau_{yx} + \frac{\partial g}{\partial y} \tau_{yy} \right\} d\sigma ,
$$

che per una def. D_1, come quella che esaminiamo, è una costante, giacchè tutte le funzioni sotto il segno d' integrazione sono indipendenti da z.

Trasformiamo i singoli termini in cui si può scindere il secondo membro dell' equazione precedente. Denotando con s il contorno di σ, con $\cos\alpha$ e $\cos\beta$ i coseni della normale esterna, si ha :

$$
\int_\sigma \frac{\partial f}{\partial x} \tau_{xx} \, d\sigma = - \int_\sigma f \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} d\sigma + \int_s f \tau_{xx} \cos\alpha \, ds , \text{ ecc.};
$$

quindi:

$$J = -\int_\sigma \left\{ f \cdot \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) + g \cdot \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) \right\} d\sigma +$$

$$+ \int_\sigma \left\{ f \cdot \left(\tau_{xx} \cos\alpha + \tau_{xy} \cos\beta \right) + g \cdot \left(\tau_{yx} \cos\alpha + \tau_{yy} \cos\beta \right) \right\} ds\,.$$

Ma, per le condizioni d'equilibrio,

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\,, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}\,.$$

Se dunque poniamo

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = \tau'_{xz}\,, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \tau'_{yz}\,;$$

e inoltre:

$$\tau_{xx} \cos\alpha + \tau_{xy} \cos\beta = \tau_x\,, \quad \tau_{xy} \cos\alpha + \tau_{yy} \cos\beta = \tau_y\,,$$

avremo:

$$(9) \qquad J = -\int_\sigma (f \tau'_{xz} + g \tau'_{yz})\, d\sigma \;\; + \int_s (f \tau_x + g \tau_y)\, ds\,.$$

Ora τ'_{xz}, τ'_{yz} sono le tensioni analoghe a τ_{xz}, τ_{yz}, relative alla deformazione derivata D_0; τ_x e τ_y sono le componenti, secondo gli assi delle x e delle y, della tensione che agisce, nella deformazione oggettiva D_1, sulla superficie laterale del cilindro. Le une e le altre sono note: sarà nota pertanto la costante J.

Se in particolare prendiamo $f = x$, $g = y$, sarà

$$\frac{\partial f}{d x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 1\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} = 0\,,$$

quindi, per la formula (8),

$$J = \int_\sigma (\tau_{xx} + \tau_{yy})\, d\sigma\,.$$

Dal confronto di questa formula colla (4) vediamo che J in tal caso, non è altro che k. Si otterrà dunque il valore di k facendo nella (9) $f = x$, $g = y$: sarà cioè:

$$(10) \qquad k = -\int_\sigma (x\,\tau'_{xz} + y\,\tau'_{yz})\,d\sigma + \int_\sigma (x\,\tau_x + y\,\tau_y)\,ds\,.$$

In modo analogo si ottiene il valore di a prendendo $f = x\,y$, $g = \frac{y^2 - x^2}{2}$, e quello di b prendendo $f = \frac{x^2 - y^2}{2}$, $g = x\,y$. Infatti, osservando che $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, si vede che la quantità sotto il segno d'integrazione, nel secondo membro della formula (8), diventa uguale nell'un caso a $(\tau_{xx} + \tau_{yy})\,y$, nell'altro a $(\tau_{xx} + \tau_{yy})\,x$.

Abbiamo così determinate le tre costanti a, b, k, quindi le A, B, K; e per conseguenza le quantità $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$.

3. — Le espressioni definitive di $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$, come apparisce dalle cose fin qui dette, resulteranno in generale alquanto complicate. Ma in quei casi particolari che presentano, per le applicazioni, maggiore importanza, esse prendono forme notevolmente semplici [1]).

Un caso in cui si hanno, per $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$, espressioni semplicissime è il seguente: che, pur essendo il cilindro sollecitato sulla superficie laterale, *le sei caratteristiche* F_x, F_y, *ecc., siano nulle per tutte le sezioni.*

In tal caso anche le caratteristiche relative alla deformazione derivata saranno nulle. Ma una def. D_0 a caratteristiche nulle è (almeno in punti abbastanza lontani dalle basi) una deformazione nulla. Potremo quindi ritenere $u_0 = v_0 = w_0 = 0$ onde le formule (1) e (2) daranno:

[1]) Un esempio, trattato con metodo diverso, può vedersi nella mia Nota « Sulla flessione dei cilindri », *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, Tomo XXI, anno 1906.

$$\frac{\partial w}{\partial z} = A y + B x + K$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = - B , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = - A ;$$

e le (5) e (6), in cui si faccia pure $F_z = M_x = M_y = 0$:

$$K = - \frac{\lambda}{E \sigma} k , \quad A = - \frac{\lambda}{E I_x} a , \quad B = - \frac{\lambda}{E I_y} b$$

sarà per conseguenza:

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= - \frac{\lambda}{E} \left(\frac{a}{I_x} y + \frac{b}{I_y} x + k \right) , \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\lambda}{E I_x} a , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\lambda}{E I_y} b . \end{aligned} \right.$$

Il valore della costante k è dato dalla formula (10), in cui però dovremo fare $\tau'_x = \tau'_y = 0$ (tensioni relative alla deformazione nulla D_0). Quindi avremo:

$$(12) \qquad k = \int_s (x \tau_z + y \tau_y) \, d s .$$

I valori delle altre due costanti a e b si avranno da formule analoghe ottenute sostituendo x ed y con $x y$ ed $\frac{y^2 - x^2}{2}$ per a, con $\frac{x^2 - y^2}{z}$ ed $x y$ per b (§ 2). Sarà dunque:

$$(13) \qquad \begin{aligned} a &= \int_s \left(x y \tau_x + \frac{y^2 - x^2}{2} \right) d s , \\ b &= \int_s \left(\frac{x^2 - y^2}{2} \tau_x + x y \tau_y \right) d s . \end{aligned}$$

Possiamo interpretare le formule (11) dicendo che i valori delle tre quantità $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$ sono gli stessi che si avrebbero se il cilindro fosse sollecitato alle basi in modo

che sopra ciascuna sezione σ agisse lo sforzo normale $-\lambda k$, e i momenti flettenti $-\lambda a$ e $-\lambda b$.

Ammettendo invece di poter applicare anche ad una def. D_1 le formule

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{E}\left(\frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x + \frac{F_z}{\sigma}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{M_x}{E I_x} y, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{M_y}{E I_y},$$

valide per una def. D_0, e ricordando che le sei caratteristiche, in particolare le M_x, M_y, F_z, sono, per ipotesi, nulle, si troverebbe: $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$.

4. — Per fare una verifica, in un caso molto particolare, delle formule precedenti, supponiamo che le basi del cilindro non siano sollecitate, e che sulla superficie laterale agisca una *pressione* normale p, uguale in tutti i punti: nel qual caso le sei caratteristiche risultano nulle per tutte le sezioni.

Sulla superficie laterale sarà $\tau = -p \cos\alpha$, $\tau_y = -p\cos\beta$; quindi dalla formula (12), sostituendo a τ_x e τ_y queste loro espressioni, e portando la costante p fuori del segno d' integrazione, avremo:

$$k = -p \int_s (x \cos\alpha + y \cos\beta)\, ds .$$

L' integrale esteso ad s si trasforma immediatamente in un integrale esteso a σ, e si trova esser uguale a 2σ. Onde sarà $k = -2p\sigma$. Dalle formule (13) si ha poi, in modo analogo, $a = 0$, $b = 0$. Avremo pertanto dalle (11):

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{2\lambda p}{E}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0. \tag{14}$$

Le fibre longitudinali si conservano dunque rettilinee, e subiscono in ogni punto l' allungamento unitario $\frac{2\lambda p}{E}$.

A questo stesso risultato si perviene determinando le comp. di spost. u, v, w: ciò che nel caso particolare di sollecitazione qui esaminato non presenta difficoltà. Si ha infatti, a meno di termini corrispondenti ad uno spostamento rigido del cilindro:

$$u = \frac{\lambda - 1}{E} p x , \quad v = \frac{\lambda - 1}{E} p y , \quad w = \frac{2 \lambda}{E} p z ,$$

come può verificarsi deducendo da queste formule le comp. di def., indi le sei tensioni interne, e infine le sollecitazioni esterne.

Ora i valori di $\frac{\partial w}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ ricavati dalle ultime formule sono precisamente quelli dati dalle (14).

CONTRIBUTO ALLO STUDIO DELLA VELOCITÀ DEGLI IONI DI FIAMMA.

DEL DOTT. ARCIERO BERNINI.

§ I.

Introduzione e scopo del lavoro.

1. È noto il concetto del metodo che il prof. J. J. Thomson [1]) consiglia, senza fare esperienza alcuna, per la determinazione della velocità specifica degli ioni in genere.

Se χ_2 e χ_1 rappresentano i valori della forza in due punti x_2 e x_1 dell' asse x normale ai due piatti A e B, fra i quali, p. es. in M N, agisce una causa ionizzante, e se fuori di M N,

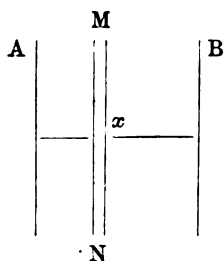



Fig. 1.

nello spazio compreso fra i due piatti, non si trovano che ioni di un solo segno, il valore della velocità specifica si ricava dalla formula

$$(\alpha) \qquad K = \frac{8\pi i (x_2 - x_1)}{\chi_2^2 - \chi_1^2} .$$

[1]) J. J. Thomson, *Phylos. Magazine.*

Il Child [1]) tenta di applicare il metodo agli ioni di fiamma, e trova, per una differenza di potenziale fra i piatti di 98,5 Volta e per $x_1 = 1$ e $x_2 = 6$, una volocità di 2,6 cm. per gli ioni negativi, e di 2,2 cm. per gli ioni positivi. Dichiara però che il metodo non è soddisfacente, perchè riesce assai difficile la determinazione della forza elettrica nei diversi punti del campo, e propone una modificazione, secondo la quale il valore della velocità sarebbe dato dalla formula

$$(\beta) \qquad K = \frac{32 \pi i x^3}{9 V^2},$$

dove x rappresenta la distanza del piatto, su cui si misura l'intensità di corrente i, dal piano in cui finisce il campo ionizzante (in questo caso lembo della fiamma), e V la differenza di potenziale fra il piatto e il piano origine.

Viene con ciò risparmiata la determinazione della distribuzione del potenziale tra fiamma e piatto, e quella della tangente trigonometrica alla curva dei potenziali che darebbe il valore della forza.

I risultati che con questo metodo il Child ottiene per la i sono approssimativamente d' accordo colla (β), e per la K ottiene con buona approssimazione dei valori concordanti col valore riportato sopra ricavato col metodo di Thomson, e crescenti col diminuire della distanza.

Il dott. G. Gianfranceschi [2]) ritiene che, se il metodo del Child evita le grandi difficoltà che si incontrano per una esatta determinazione della forza, presenta una difficoltà non minore nella determinazione della distanza x fra piatto e quel piano parallelo che limita il campo in cui avviene la ionizzazione ed in cui si trovano ioni di ambo i segni.

Questo piano non è certo il piano della fiamma, ed in realtà esso non è affatto determinato, in quanto che il passaggio del campo in cui vi sono ioni di entrambi i segni e quello in cui non ve n'è che di un solo segno avviene con conti-

[1]) Child, *Phys. Rew.* V, XII 1901.

[2]) Gianfranceschi, *Memorie dell' Accad. dei Lincei*, 1905.

nuità. — L'incertezza di questa determinazione, considerando che nella formula del Child la x si trova alla 3ª potenza, non può portare, sempre secondo il Gianfranceschi, variazioni minori nel valore della velocità di quelle che possono derivare per la incertezza nella determinazione della forza col metodo di Thomson. Inoltre sia la formula del Thomson che quella del Child si fondano su una integrazione estesa a tutto il campo che va dal piatto alla fiamma, come se il numero di ioni fosse indipendente da x, ma invece la distribuzione dei ioni nel campo non è omogenea, sicche è arbitrario il non tenerne conto.

Per tutto questo, ed in particolare per evitare gli errori che possano derivare dalla complicata distribuzione degli ioni nel campo, il Gianfranceschi propone una nuova modificazione al metodo di Thomson, colla quale il valore della velocità si ricava della formula

$$K = \frac{4 \pi i}{\chi \frac{d \chi}{d x}}$$

dove i valori di χ e di $\frac{d \chi}{d x}$ sono quelli che si hanno sul piatto su cui si è misurata la corrente i. — Questa formula dà non già il valore medio di velocità tra fiamma e piatto come quella del Child, nè il valore medio in uno spazio qualunque fra due piani normali al campo come quella del Thomson, bensì il valore della velocità per gradiente unitario che gli ioni hanno alla distanza a cui si trova il piatto dalla fiamma, e ciò, secondo il Gianfranceschi, indipendentemente dalla distribuzione degli ioni compresi tra fiamma e piatto, ma in funzione soltanto della densità nello strato aderente al piatto stesso.

2. Senza entrare per ora in merito all' opportunità di applicare l' uno o l' altro dei metodi descritti, espongo quanto emerge da un attento esame dei risultati ottenuti.

a) Dato il genere di misure assai delicate, le sconcordanze rilevate dal Gianfranceschi fra i suoi risultati e quelli del Child non pregiudicherebbero certo la fiducia su alcuno dei

due metodi. Se però osserviamo che, in seguito ad un errore di calcolo sfuggito al Gianfranceschi nella riduzione della sua formula dalle unità elettrostatiche alle pratiche, i risultati di questi, per essere conformi ai dati di esperienza, devono venire tutti moltiplicati pel fattore 3, le sconcordanze cominciano a diventare un po' troppo sensibili.

b) Dalle considerazioni che fa il Child riguardo ai suoi risultati per l' intervallo da 1 a 6 cm. dalla fiamma, appare giustificato che i valori di K (la quale per definizione dovrebbe essere indipendente non solo da V ma anche dalla distanza x), decrescano alquanto col crescere di x, poichè col crescere di questa, e conseguentemente del tempo che gli ioni impiegano per giungere sul piatto collettore, la loro massa s' ingrandisce, con che viene diminuita la loro velocità effettiva. Se però osserviamo la variazione che K subisce per x dai 6 agli 8 cm., notiamo che essa è di tutt' altro ordine di grandezza, nè il Child sa giustificarla se non coll' ammettere cause d' errore nella determinazione stessa. La ora accennata spiegazione potrebbe anche valere a giustificare le variazioni di K col campo, ma dai dati che egli espone nella tabella IX del suo lavoro si rileva a questo riguardo una grande sconcordanza. Per la distanza di 6 cm. pare che sia la velocità degli ioni negativi che cresca col crescere del campo, mentre per la distanza di 4 cm. pare che sia la K positiva.

c) Se applichiamo la formula del Child ai dati di esperienza del Gianfranceschi relativi ai campi diversi (50 e 150 Volta) si ricavano per K valori che stanno fra loro come 1 sta a 30 [1]. Ora pur ammettendo in seguito alle considerazioni del

[1]) Dalle tabelle IV e V del lavoro di Gianfranceschi, relative l' una al campo di 50 e l'altra di 150 Volta, si trova che per la medesima distanza di 10 cm. tra fiamma e piatto collettore i valori per la i negativa sono rispettivamente $0{,}129 . 10^{-12}$ e $32{,}65 . 10^{-12}$. Applicando la formula del Child si ha nel primo caso

$$K = \frac{32\,\pi . 0.129 . 10^{-12} . 10^{11} . 10^{3}}{50^{2}} = 0{,}51 .$$

e nel secondo caso

$$K = \frac{32\,\pi . 32{,}65 . 10^{-12} . 10^{11} . 10^{3}}{150^{2}} = 14{,}5 .$$

Child che la K debba crescere col campo, un aumento di questo genere appare addirittura inverosimile.

Ma v è ancora di più.

d) Per le distanze dalla fiamma inferiori agli 8 cm., vale a dire precisamente in quell' intervallo in cui, come dicemmo, il Child ha eseguite le sue determinazioni pel calcolo della K, si riscontrano, secondo il Gianfranceschi, nella determinazione dell' intensità di corrente i e della distribuzione del potenziale V dei fenomeni molto singolari, di cui parleremo in seguito, in conseguenza dei quali non può estendere l' applicazione del suo metodo che per le distanze maggiori degli 8 cm.

Ora, per quanto abbiamo veduto nella descrizione dei tre metodi, le condizioni per la loro applicazione sono precisamente le medesime. Per l' esistenza di queste anomalie nell' intervallo dalla fiamma fino a circa 8 cm. da essa, deriverebbe dunque che anche il metodo di Child non sarebbe applicabile che per distanze maggiori, e quindi le misure del Child non dovrebbero essere attendibili.

Per questo complesso di cose, a cui a mio modo di vedere va aggiunto anche la considerazione che il tentativo di spiegazione che il Gianfranceschi espone per le anomalie riscontrate, come vedremo, non è esente da critica, si comprende quanto le nostre cognizioni sopra un argomento così importante restino scarse o dubbie.

Onde poter trarre qualche utile conclusione, io ho creduto opportuno intraprendere delle ricerche, anzitutto per farmi meglio un' idea della entità delle anomalie ricordate, e per cercarne nel caso una spiegazione più soddisfacente; indi applicare, per quanto è possibile, alle tre formule del Thomson, del Child e del Gianfranceschi, gli stessi dati di esperienza ottenuti colla medesima disposizione sperimentale, per confrontarne fra loro i valori che così si ricavano per la K.

Scopo della presente Memoria è quello di esporre i risultati delle mie esperienze e le conseguenze che ne ho tratte.

§ II.

Misure dell'intensità di corrente.

1. Colla disposizione che appare dalla fig. 2, dove A e B sono due piatti paralleli, l' uno di 20 cm. di diametro carico a 150 Volta, in comunicazione con una fiamma a gas F larga

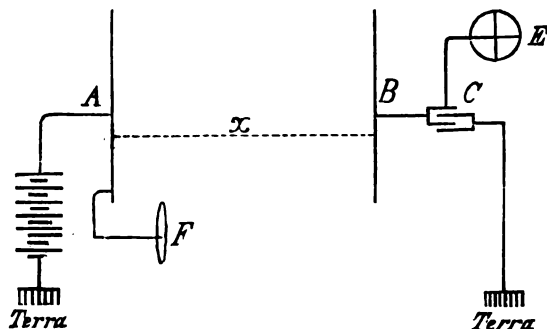



Fig. 3.

22 cm. ed a piccolo spessore, collocata un po' al disotto dei dischi in un piano distante 4 cm. da A, l' altro di 10 cm. di diametro circondato da un anello di guardia, ed in comunicazione coll' ago d' un elettrometro E e coll' armatura interna di un condensatore C, il dott. Gianfranceschi, studiando le variazioni che subisce la corrente di ioni che arriva su B col variare della distanza fra i due piatti, trova che quando i piatti sono lontani più di 12 cm. la corrente negativa supera la positiva, ma avvicinando i piatti, e precisamente fra i 12 e gli 11 cm. di distanza, la corrente positiva viene a superare la negativa per acquistare un valore quasi doppio alla distanza di 10 cm. Trova inoltre che la corrente negativa per la distanza fra i piatti di 11 cm. acquista un massimo per scendere poi rapidamente per distanze minori. Ciò egli rende a colpo d' occhio manifesto col diagramma della fig. 6 del suo citato lavoro, qui riportato nella fig. 3 (II).

A spiegare il massimo di corrente negativa il Gianfranceschi pensa che nell' intervallo compreso fra la fiamma ed il piano verticale, nel quale avviene l' eguaglianza delle intensità di corrente (e che sarebbe nel suo caso ad 11 cm. e mezzo da A), esistano ioni di entrambi i segni, e di preferenza rimangano in quel campo gli ioni positivi più lenti degli altri. Ciò poi sarebbe, secondo lui, anche la causa della superiorità della corrente positiva sulla negativa in quel campo, sicchè quest' ultima non diviene maggiore della prima se non quando lo spazio è libero di ioni positivi.

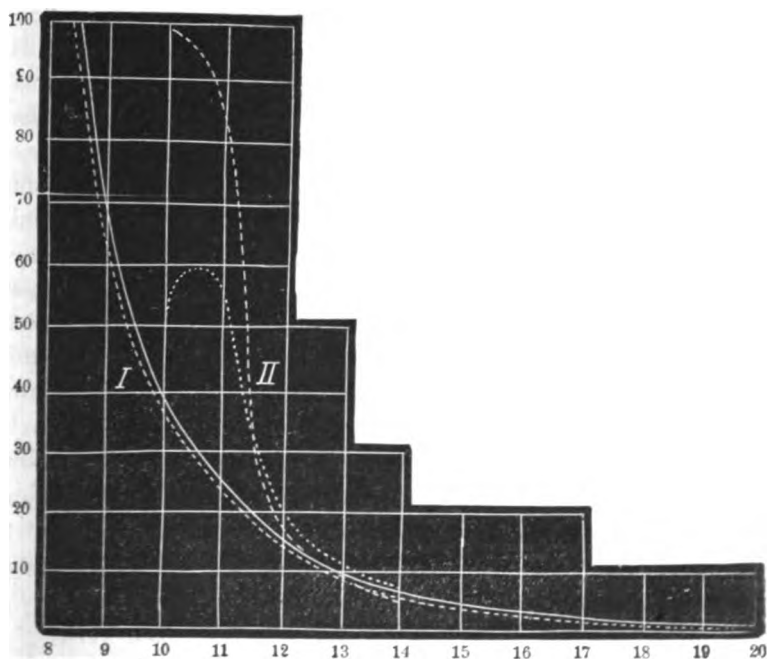



Fig. 3.

A mio modo di vedere questa ipotesi non si presta a sufficienza per spiegare le anomalie descritte; d' altra parte poi non mi pare troppo lecito l' ammettere che fino alla distanza di 11 cm. e mezzo da A, ossia a 7 cm. e mezzo dalla fiamma, possano trovarsi degli ioni dello stesso segno di A; e tanto

meno poi pensando che la fiamma, per essere in comunicazione con A epperciò carica dello stesso segno di A, deve avere indubbiamente tendenza essa stessa ad assorbire gli ioni di segno contrario.

Ho creduto che si potesse decidere in merito alla validità dell'ipotesi dal Gianfranceschi osservando come collo sperimentare con campi di intensità diversa avrebbe di conseguenza variato l'intervallo entro cui si verificano le anomalie nell'intensità di corrente. Secondo quella ipotesi, questo intervallo, che nel caso descritto dal Gianfranceschi, e cioè per un campo di 150 Volta, si estendeva fino a 7 cm. e mezzo dalla fiamma, avrebbe dovuto modificarsi con l'intensità del campo, e precisamente restringersi coll'aumentare di quello e viceversa. Il dott. Gianfranceschi, che ha pure operato con campi di diversa intensità, non parla di avere notato queste modificazioni, che la sua ipotesi lasciava prevedere.

2. Nelle esperienze intraprese a questo scopo, non mi fu possibile operare su di una fiamma delle identiche dimensioni di quella usata dal Gianfranceschi. Data la debole pressione del gas nel mio laboratorio non potevo ottenerla altro che larga 15 cm. La collocavo a 4 cm. da A parallelamente ai piatti ed alquanto al disotto, in modo da non entrare fra i medesimi con la parte luminosa, ed in comunicazione con A mediante un filo metallico.

Conseguentemente, onde avvicinarsi il più possibile alle condizioni di esperienza in cui si era posto il Gianfranceschi, dovetti ridurre anche in proporzione il diametro dei piatti; ma tutto ciò non poteva portare alcun pregiudizio, e nemmeno l'avere sostituito all'elettrometro un sensibilissimo elettroscopio, con cui potevo apprezzare senza difficoltà il mezzo Volta.

Per sperimentare, caricato A (vedi fig. 2) ad un certo potenziale, mettendolo in comunicazione con un estremo di una pila di cui l'altro estremo era al suolo, e collegato B al sistema costituito dall'elettroscopio e dal condensatore, tenevo B per un certo tempo al suolo insieme coll'anello di guardia, indi lo isolavo, seguendo con un cronometro il salire della foglia. Dividendo l'aumento di potenziale che subiva B in un secondo per la sua superficie di cm.^{2}, e moltiplicando il prodotto

per la capacità del sistema si aveva l'intensità di corrente che giungeva su B a quella data distanza.

Nelle mie esperienze preliminari constatai della incostanza nei risultati, e ciò per due cause di errore:

L'una, la penetrazione di carica nel dielettrico della bottiglia di Leyda in comunicazione con B e coll'elettroscopio, in causa della quale i valori del potenziale a cui giungeva B dopo un certo tempo diventavano crescenti col diminuire dell'intervallo fra esperienza ed esperienza.

L'altra, il fatto che una gran quantità di quegli ioni, che per la corrente ascendente provocata dalla fiamma non riusciva a cadere nè su B nè sull'anello di guardia, girava dietro all'anello stesso, e quivi quegli ioni, a seconda del loro numero ed in modo diverso fra esperienza ed esperienza, producevano quel fenomeno che già ebbi occasione di mostrare in un mio recente lavoro [1]), cioè agivano con le loro cariche per influenza sul sistema. Che queste fossero effettivamente le cause perturbatrici, lo provò il fatto che col sostituire al primitivo anello di guardia un altro anello di diametro circa il triplo, ed alla bottiglia di Leyda un condensatore ad aria, i risultati riuscirono concordanti in modo soddisfacente.
Le prime esperienze che eseguii con A carico a 61 Volta mi mostrarono come per tutto l'intervallo da 20 a 9 cm. fra i piatti, valori del potenziale a cui giungeva B dopo due secondi e mezzo erano per A negativo sempre maggiori che non quando A era positivo, e per dippiù sempre crescenti.

Dedotte da questi valori le velocità di carica B, ossia gli aumenti del potenziale in 1" alle diverse distanze, e moltiplicati pel quoziente $\frac{6{,}22.\ 10^{-12}}{38{,}46}$ della capacità in Fanday del sistema per la superficie di B in cm.^{2}, ho ottenuto i valori dell'intensità di corrente che riporto nella seguente

[1]) A. Bernini, « Fenomeni d'influenza prodotti dai ioni emessi da una fiamma posta in un campo elettrico. » *Nuovo Cimento*, serie 5ª, vol. VII, maggio 1909.

TABELLA I.

Distanza fra i piatti in cm.	Intensità della corrente in Ampère	
	Fiamma negativa	Fiamma positiva
20	$1,54 .- 10^{13}$	$1,40 . 10^{-13}$
19	2,08 »	1,95 »
18	2,58 »	2,41 »
17	3,42 »	3,35 »
16	4,34 »	4,10 »
15	5,88 »	5,72 »
14	7,46 »	7,37 »
13	10,50 »	10,00 »
12	15,34 »	14,41 »
11	26,18 »	25,02 »
10	38,07 »	36,34 »
9	68,60 »	65,21 »

Per le distanze fra i piatti inferiori ai 13 cm., cioè all'incirca in quell'intervallo in cui avrebbero dovuto verificarsi le anomalie nell'intensità della corrente, la foglia del mio elettroscopio saliva un po' rapidamente, sicchè, specialmente alle minime distanze, la determinazione veniva resa un po' difficile. Trovai opportuno perciò controllare i valori ottenuti per quelle distanze, ad all'uopo aumentai la capacità del sistema aggiungendo un altro condensatore ad aria munito di vite micrometrica, con cui potevo accostare i dischi mano a mano che si diminuiva la distanza tra A e B.

Riuscii così ad ottenere che la foglia avesse all'incirca la stessa velicità di salita anche per le distanze 8, 7 e 6 cm. fra i piatti, ossia fino alla distanza di 2 cm. dalla fiamma.

Tenendo conto delle variazioni di capacità che in tal modo si apportavano al sistema, ho calcolato la intensità di corrente, ottenendo i risultati della seguente

TABELLA II.

Distanza fra i piatii in cm.	Intensità di corrente in Ampère	
	Fiamma negativa	Fiamma positiva
12	$16,20.10^{-13}$	—
11	25,20 »	—
10	37,10 »	$35,90.10^{-13}$
8	69,80 »	65,60 »
9	137,20 »	134,88 »
7	358,40 »	350,12 »
6	1269,70 »	1209,30 »

di cui quelli relativi alle distanze 12, 11, 10 e 9 concordano molto bene coi corrispondenti della tabella precedente.

Dall' esame di questi dati e dalle curve I del diagramma (fig. 3) costruite con valori proporzionali a queste correnti per confronto colle curve II di Gianfranceschi non risulterebbero, per un campo di 61 Volta, confermate le anomalie da questi descritte. L' intensità di corrente negativa risultò sempre maggiore della positiva, senza raggiungere mai nessun massimo.

3. Nè diversamente ebbi a constatare con campi di intensità diversa. Infatti, con A carico una volta a 31 un'altra a 121 Volta, ottenni per la i i valori che raccolgo nella seguente

TABELLA III.

Distanza fra i piatti in cm.	Intensità di corrente per campo di 31 V.		Intensità di corrente per campo di 121 V.	
	Fiamma negativa	Fiamma positiva	Fiamma negativa	Fiamma positiva
20	0,327.10^{-13}	0,269.10^{-13}	6,80.10^{13}	5,20.10^{-13}
19	0,451 »	0,400 »	—	—
18	0,546 »	0,507 »	11,81 »	10,27 »
17	0,712 »	0,699 »	—	—
16	1,00 »	0,964 »	19,28 »	17,90 »
15	1,41 »	1,36 »	—	—
14	1,82 »	1,75 »	34,75 »	31,13 »
13	2,51 »	2,42 »	—	—
12	3,43 »	3,39 »	67,31 »	103,60 »
11	5,50 »	5,41 »	—	—
10	8,32 »	8,12 »	174,08 »	160,20 »
9	15,37 »	15,00 »	319,00 »	305,00 »
8	32,88 »	31,00 »	606,22 »	591,00 »
7	82,21 »	77,30 »	1408,30 »	1412,20 »
6	295,50 »	261,00 »	5124,35 »	4923,00 »

e le curve che con essi si potrebbero costruire mostrerebbero un andamento perfettamente analogo alle curve I.

4. Volendo pur trovare quelle condizioni di esperienza che mi dessero modo di accertare alcuna delle anomalie riscontrate dal Gianfranceschi, pensai di modificare la mia diposizione sperimentale sia abbassando di più la fiamma rispetto ai dischi od innalzandola in modo da portarla colla parte luminosa all'altezza di quelli, sia variandone le dimensioni, sia togliendo la comunicazione fra esso ed il disco A, o mettendola al suolo.

Per brevità non sto a riportare i risultati delle esperienze che eseguii colla massima cura in tutte queste diverse condi-

zioni. Dico soltanto che in nessuno caso mi fu dato accertare andamenti per l'intensità di corrente diversi da quello sopra descritto.

Potei invece dai miei risultati dedurre:

a) Che a parità di altre condizioni i valori della *i* sia positiva che negativa diventano più piccoli coll'aumentare della superficie dei dischi rispetto alla fiamma.

b) Che per fiamma più larga di B l'intensità di corrente è maggiore se la fiamma è tutta appena sotto al livello dei dischi, di quello che non sia quando la parte luminosa si trova fra questi compresa, ed il contrario invece accade per fiamma meno larga di B.

c) Che i valori minimi per l'intensità di corrente a parità di campo e distanza fra i piatti si hanno colla fiamma isolata e scarica, e più specialmente quando questa si trova sotto i dischi.

Credo ovvie le spiegazioni di questi risultati.

§ III.

Misure per la determinazione della distribuzione del potenziale.

Per la determinazione del potenziale fra i piatti feci uso, come già il Child ed il Gianfranceschi, del getto d'acqua, il quale, com'è noto, assume il potenziale del campo nel punto in cui comincia a separarsi in goccioline.

Le esplorazioni fatte generalmente ad ogni centimetro sull'asse dei due piatti mettendo l'acqua in comunicazione con un elettrometro, per quanto eseguite colla massima cura mi davano risultati le cui differenze fra una serie di esperienze e l'altra raggiungeva comunemente il 4 o il 5 per cento, ed in alcuni casi saliva fino al 7 %, ciò che non è però da meravigliare dato il genere di misure. Siccome dal confronto fra i risultati ottenuti cambiando il segno del potenziale della fiamma e di A le differenze erano dello stesso ordine di grandezza, ed ora in eccesso ora in difetto, così ho creduto oppor-

tuno prendere le medie complessive dei risultati per ciascuna distanza dei piatti, e servirmi di queste per la costruzione delle curve dei potenziali.

Nelle tabelle che seguono raccolgo solamente i dati per quelle distanze per le quali riporto infine i valori delle velocità ricavati coi 3 metodi.

TABELLA IV.

Pot. A = 61 Volta

Distanze dal piatto A	Distanze fra i piatti in cm.				
	20	16	12	10	8
cm. 3	61	61	61	61	61
» 4 fiamma	61	61	61	61	61
» 4,5	61	61	60	59,6	59
» 5	61	60,5	58	56,8	53,8
» 6	59	57	54,2	49	39,5
» 7	57	53,2	47,2	39	23
» 8	54,2	49	40,8	27	0
» 9	51,2	44,5	32	15	—
» 10	48,2	39,5	23	0	—
» 11	45	33,8	12,8	—	—
» 12	41	27,5	0	—	—
» 13	37	20,2	—	—	—
» 14	32,5	14,8	—	—	—
» 15	28,5	7	—	—	—
» 16	24	0	—	—	—
» 17	19,2	—	—	—	—
» 18	13,5	—	—	—	—
» 19	7,5	—	—	—	—
» 20	0	—	—	—	—

TABELLA V.

Distanze dal piatto A in cm.	Distanze fra i piatti in cm.					
	Pot. A = 31 Volta			Pot. A = 121 Volta		
	20	12	8	20	12	8
3	31	31	31	121	121	121
4 fiamma	31	31	31	121	121	121
4,5	31	30,7	29,5	121	119	118
5	31	30,2	27	121	116	106
6	30,5	27,5	19,5	116	105	78
7	30	25	11,3	—	—	44
8	29	21	0	105	80	0
9	28,2	16,5	—	—	61,5	—
10	26,9	10	—	55,3	45	—
11	25	7	—	—	24,2	—
12	23	0	—	40,5	0	—
13	21	—	—	—	—	—
14	19	—	—	60	—	—
15	16,5	—	—	56,5	—	—
16	14	—	—	46	—	—
17	11	—	—	36,5	—	—
18	8	—	—	25	—	—
19	4,5	—	—	14	—	—
20	0	—	—	0	—	—

Del resto pure il Child non trova differenze sensibili fra le curve ottenute con fiamma carica positivamente e quelle ottenute con fiamma negativa.

Invece il Gianfranceschi, nello spazio molto vicino alla fiamma, e soltanto quando questa è carica negativamente,

trova che il potenziale è sempre alquanto maggiore del potenziale della fiamma.

Secondo lo stesso, questo fatto troverebbe la sua giustificazione nell' altro, che sulla fiamma la forza elettrica è nulla, quindi ad un punto di zero per la curva delle forze deve corrispondere un massimo per quella dei potenziali.

Senonchè l' essere sulla fiamma nulla la forza elettrica non giustifica affatto un massimo che sia superiore al potenziale della fiamma e di A; nè si comprende che ciò debba accadere solo quando la fiamma è carica negativamente.

Dai miei risultati appare che il potenziale del piatto A e della fiamma ad esso collegata non viene mai superato; però si conserva costante anche per qualche millimetro verso B, specialmente quando questo è lontano.

Di ciò verrà tenuto conto nell'applicazione della formula del Child.

§ IV.

Determinazione dei valori di $\frac{dV}{dx}$ e di $\frac{d^2V}{dx^2}$.

Per determinare i valori della forza nell' intervallo tra fiamma ed il piatto B ho costruito le curve dei potenziali mediante i dati delle tabelle IV e V, indi ho ricavato col calcolo grafico le curve derivate prima di quelle.

Perchè le determinazioni riescissero il meglio possibile esatte, nel diagramma delle curve dei potenziali ogni centimetro delle ascisse rappresentava 0,5 cm. di distanza fra i piatti, ed ogni centimetro lungo l' asse delle ordinate rappresentavano due Volta. I valori della forza così ricavati sono poi stati, perciò, moltiplicati per quattro.

Nella seguente tabella riporto i valori di $\frac{dV}{dx}$ relativi al campo di 61 Volta coi quali sono state costruite le curve che ho riportate nel diagramma della fig. 5 ridotte ad $^1/_4$, come quelle dei potenziali (fig. 4).

Fig. 4
Curve dei potenziali

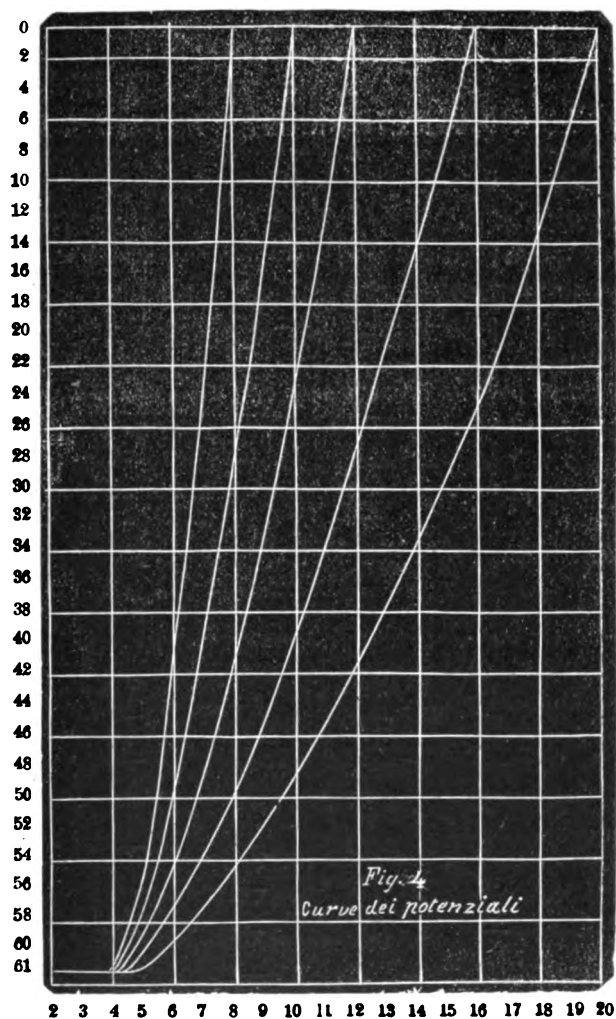
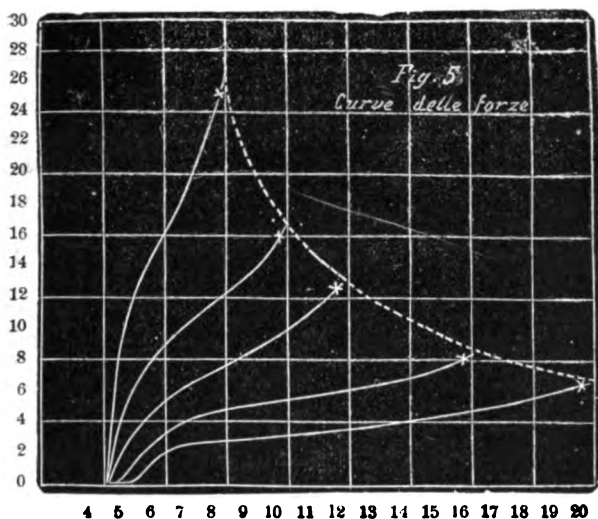



TABELLA VI.

Pot. di A = 61 Volta

Distanze dal piatto A in cm.	Distanze fra i piatti in cm.				
	20	16	12	10	8
4	—	—	—	—	—
4,5	—	—	—	4,48	7,52
5	—	2,40	4,76	6,52	12,68
6	2,2	3,48	5,48	9,20	15,92
7	2,46	3,88	6,40	10,68	20,56
7,5	—	—	—	—	23,24
8	2,78	4,44	7,68	12,28	26,02
9	3,06	4,84	8,86	13,48	—
9,5	—	—	—	15,60	—
10	3,24	5,48	10,00	16,4	—
11	3,72	6,04	11,70	—	—
11,5	—	—	12,42	—	—
12	4,02	6,12	13,50	—	—
13	4,36	6,64	—	—	—
14	4,44	6,92	—	—	—
15	4,49	7,62	—	—	—
15,5	—	7,99	—	—	—
16	5,00	8,36	—	—	—
17	5,28	—	—	—	—
18	5,66	—	—	—	—
19	6,40	—	—	—	—
19,5	6,61	—	—	—	—
20	6,82	—	—	—	—

2. Per ricavare le derivate delle forze, che rappresentano valori proporzionali alle densità degli ioni per ogni piano di livello, ho costruito sulla stessa scala delle curve dei potenziali e coi valori della tabella VI e di quelle relative ai campi di 31 e 121 Volta, che qui non ho per brevità riportato, le curve delle forze; ed ho operato su queste come avevo operato sulle curve dei potenziali. Nella seguente tabella riporto i valori delle densità relative al campo di 61 Volta, coi quali sono state costruite le curve della fig. 6.

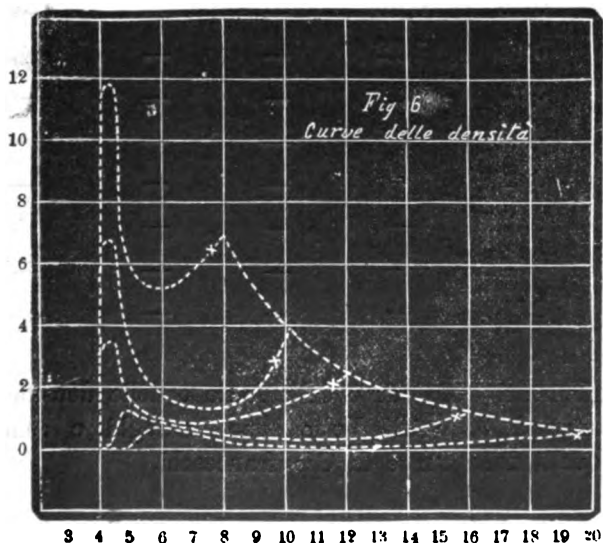



TABELLA. VII.

Distanze dal piatto A in cm.	Distanze fra i piatti in cm.				
	20	16	12	10	8
4	—	—	—	—	—
4,5	—	—	3,18	6,84	11,60
5	—	1,376	1,52	3,236	5,84
6	0,70	0,85	1,00	1,82	5,28
7	—	0,512	0,99	1,48	5,88
7,5	—	—	—	—	6,36
8	0,27	0,42	1,068	1,38	7,00
9	0,20	0,39	1,184	1,80	—
9,5	—	—	—	2,96	—
10	0,10	0,388	1,376	3,90	—
11	0,08	—	1,696	—	—
11,5	—	—	2,036	—	—
12	0,06	0,322	2,40	—	—
13	0,07	0,342	—	—	—
14	0,10	0,596	—	—	—
15	0,13	0,96	—	—	—
15,5	0,18	1,12	—	—	—
16	0,20	2,248	—	—	—
17	0,35	—	—	—	—
18	0,42	—	—	—	—
19	0,502	—	—	—	—
19,5	0,541	—	—	—	—
20	0,562	—	—	—	—

Gli andamenti delle curve delle forze e delle densità relative ai campi di 31 e 121 Volta sono analoghi e concordanti con quelli delle curve di Gianfranceschi.

§ V.

Applicazione dei dati di esperienza alle tre formule relative ai tre metodi.

1. Come furono espresse da principio le tre formule si riferivano ad unità elettrostatiche. I nostri dati invece sono espressi in unità pratiche; sicchè è necessario ridurre le tre formule in unità pratiche.

Dalla formula del Thomson:

$$K = \frac{8\pi i (x_2 - x_1)}{\chi_2^2 - \chi_1^2},$$

si ottiene

$$300\,K = \frac{8\pi i \,.\, 3 \,.\, 10^9 \,.\, (x_2 - x_1)}{\left(\frac{1}{300}\right)^2 \cdot (\chi_2^2 - \chi_1^2)},$$

da cui:

$$K = \frac{72\pi i \,.\, 10^{11} (x_2 - x_1)}{\chi_2^2 - \chi_1^2}. \tag{1}$$

Dalla formula del Child:

$$K = \frac{32\pi i x^3}{V^2_x},$$

si ricava:

$$K = \frac{32\pi i \,.\, 10^{11} x^3}{V^2_x}. \tag{2}$$

Dalla formula di Gianfranceschi:

$$K = \frac{4\pi i}{\chi \frac{d\chi}{dx}},$$

si ottiene:

$$300\,K = \frac{4\pi i \,.\, 3 \,.\, 10^9}{\left(\frac{1}{300}\right)^2 . \chi \frac{d\chi}{dx}},$$

e quindi

(3)
$$.K = \frac{12 \pi i . 10^{11} . 3}{\chi \frac{d \chi}{d x}},$$

e non soltanto

$$K = \frac{12 \pi i . 10^{11}}{\chi \frac{d \chi}{d x}},$$

come ricavò erroneamente il Gianfranceschi.

Di tutta la serie dei risultati ottenuti per la velocità colla formula del Thomson ho riportato qui per brevità solamente quelli corrispondenti agli intervalli $(x_2 - x_1)$ che più mi interessavano, e cioè quelli corrispondenti al massimo intervallo, onde confrontarli con quelli ricavati dalle formule del Child, e quelli corrispondenti all' intervallo dell' ultimo centimetro per confrontarli con quelli ricavati colle formule di Gianfranceschi; inoltre qualche valore per gli intervalli intermedî per giudicare dell' andamento.

Nel calcolo di K colla formula del Child, in cui ha grande influenza il valore della distanza x che vi entra alla 3ª potenza, basandomi sui risultati ottenuti nella valutazione del potenziale, ho tenuto conto di quei tratti verso il piatto B lungo i quali si conservava inalterato il potenziale della fiamma, ed ho misurate le distanze x a cominciare da quei punti il cui potenziale accennava a decrescere. Questi tratti, a parità di distanza fra A e B, subivano delle leggere variazioni a seconda della intensità del campo; ma io ho creduto di non commettere errore sensibile coll'apportare le medesime correzioni nei 3 casi da me studiati. Le distanze fra i piatti, diminuite dei 4 cm. che vanno da A alla fiamma, furono per ciò così ridotte:

Distanze fra i piatti con fiamma a 4 cm. da A	20	18	16	14	12	10	8	6
Valori di x applicati	15	13	11,2	9,6	7,8	6	4	2

Nel calcolo di K colla formula di Gianfranceschi per χ e $\frac{d \chi}{d x}$ ho introdotto le medie dei valori corrispondenti all' ul-

timo centimetro, o meglio quelli corrispondenti alla distanza di $^1/_2$ cm. da B e che appariscono segnati con croce nelle figure. Ciò consiglia il Gianfranceschi stesso, poichè è evidente che sull' intensità di corrente influiscono maggiormente questi valori che non quelli che la forza e la densità acquistano proprio sul piatto.

2. Per mostrare come ho dedotto i valori per le velocità riportate nelle tabelle che seguono, dò qui un esempio, riferendomi ai dati relativi al campo di 61 Volta e per la distanza di 20 centimetri fra i piatti.

Applicando la formula del Thomson per l' intervallo da 20 e 19 cm., poichè il valore della i negativa (vedi tabella I) è $1{,}54.10^{-13}$ Ampère, ed i valori della forza a 20 ed a 19 cm. sono rispettivamente (vedi tabella VI) 6,82 e 6,40, si ha per la K negativa

$$\overline{K} = \frac{72\,\pi \,.\, 1{,}54 \,.\, 10^{-13} \,.\, 10^{11} \,.\, (20 - 19)}{(6{,}82)^2 - (6{,}40)^2} = 0{,}52 \,.$$

La velocità per l' intervallo (20-6) invece diventa

$$\overline{K} = \frac{72\,\pi \,.\, 1{,}54 \,.\, 10^{-13} \,.\, 10^{11}\, (20\text{-}6)}{(6{,}82)^2 - (2{,}2)^2} = 1{,}11 \,.$$

Quest' ultimo valore è evidentemente quello più adatto pel confronto col risultato che si ricava applicando la formula del Child

$$\overline{K} = \frac{32\,\pi \,.\, 1{,}54 \,.\, 10^{-13} \,.\, 10^{11} \,.\, 15^3}{61^2} = 1{,}38 \,.$$

Il primo invece più adatto pel confronto della K ricavata col metodo di Gianfranceschi. Con questo poichè dalle tabelle VI e VII si ha che i valori per χ e $\frac{d\chi}{dx}$ a 19,5 cm. sono rispettivamente 6,61 e 0,541 si ha che

$$\overline{K} = \frac{12\,\pi \,.\, 1{,}54 \,.\, 10^{-13} \,.\, 10^{11} \,.\, 3}{6{,}61 \,.\, 0{,}541} = 0{,}48 \,.$$

Le tabelle che seguono comprendono tutti i risultati che si ricavano coi dati di esperienza riportati nella presente Me-

moria. Le abbreviazioni T. C. G. stanno ad indicare i valori di K ottenuti rispettivamente colle tre formule del Thomson, del Child e del Gianfranceschi, ed i valori sotto C e G si riferiscono alle distanze indicate sotto x_2.

La VIII si riferisce alla velocità degli ioni negativi. La IX alla velocità degli ioni positivi.

$\overline{K}$ TABELLA VIII.

		Pot. di A=61 Volta			Pot. di A=31 Volta			Pot. di A=121 Volta		
x_2	x_1	T	C	G	T	C	G	T	C	G
20	19	0,518	—	—	0,508	—	—	0,673	—	—
	16	0,622	—	—	—	—	—	—	—	—
	12	0,92	1,38	0,48	—	1,17	0,42	1,06	1,61	0,53
	10	0,92	—	—	0,87	—	—	—	—	—
	6	1,11	—	—	1,09	—	—	1,41	—	—
16	15	0,79	—	—	—	—	—	—	—	—
	10	1,46	1,63	0,582	—	—	—	—	—	—
	5	1,60	—	—	—	—	—	—	—	—
12	11	0,87	—	—	0,81	—	—	0,91	—	—
	8	1,10	1,84	0,65	1,06	1,69	0,72	1,37	2,25	0,80
	5	1,47	—	—	1,56	—	—	1,99	—	—
10	9	0,9	2,25	0,908	—	—	—	—	—	—
	6	1,7			—	—	—	—	—	—
8	7	1,26	2,38	1,07	0,902	2,18	0,97	1,28	2,65	1,16
	5	1,81			1,36			1,85		

$\overset{+}{K}$ Tabella IX.

		Pot. di A = 61 Volta			Pot. di A = 31 Volta			Pot. di A = 121 Volta		
x_3	x_4	T	C	G	T	C	G	T	C	G
	19	0,44	—	—	0,433	—	—	0,59	—	—
	16	0,58	—	—	—	—	—	—	—	—
20	12	—	1,26	0,43	—	1,03	0,40	0,91	1,18	0,46
	10	0,83	—	—	0,80	—	—	—	—	—
	6	1,01	—	—	0,96	—	—	1,28	—	—
	15	0,74	—	—	—	—	—	—	—	—
16	10	1,33	1,54	0,55	—	—	—	—	—	—
	5	1,50	—	—	—	—	—	—	—	—
	11	1,85	—	—	0,76	—	—	0,86	—	—
12	8	1,08	1,80	0,60	0,98	1,66	0,69	1,28	1,99	0,73
	5	1,44	—	—	1,50	—	—	1,82	—	—
10	9	0,85	2,10	0,90	—	—	—	—	—	—
	6	1,63			—	—	—	—	—	—
8	7	1,24	2,30	1,01	0,88	2,06	0,90	1,11	2,58	1,10
	5	1,81			1,28			1,61		

§ VI.

Considerazioni sui risultati e sui metodi.

1. Dai dati riferentisi alle misure di i e di V, si deduce come le anomalie riscontrate dal Gianfranceschi non pare sussistano, e che nel suo caso molto probabilmente potevano es-

sere provocate da qualche causa di errore nella disposizione sperimentale; cause di errore che però nemmeno i miei tentativi descritti hanno potuto suggerire.

I risultati del Child quindi non possono essere sospetti di inesattezza derivante da quelle. Inoltre il metodo di Gianfranceschi può essere esteso anche alle piccole distanze.

2. L'accordo invero sorprendente che si rileva nei risultati per la K, tenuto conto del significato un po' diverso che questa assume nei tre metodi, sta a dire che quando le esperienze siano condotte colla cura dovuta, le cause di errore e le difficoltà inerenti a ciascun metodo arrecano un pregiudizio molto relativo, e che quindi tutti e tre si prestano egregiamente per la determinazione di K.

Per riconoscere però un tale accordo è necessario confrontare i risultati C e G rispettivamente con quelli T per $(x_2 - x_1)$ massimo e minimo. I valori relativi ai due metodi C e G si devono anzi considerare come i valori limiti a cui si può giungere applicando il metodo di Thomson per $(x_2 - x_1)$ variabile.

3. Poichè dai 20 ai 6 cm. circa dalla fiamma la variazione della temperatura non superava i 30 gradi, questa non poteva avere influenza sensibile sui risultati ottenuti col metodo di Gianfranceschi e tanto meno con quelli ricavati col metodo del Thomson. Altrettanto però non è lecito asserire riguardo ai valori ottenuti coll'altro metodo, secondo il quale le x_2 delle tabelle VIII e IX comprendono tutto il tratto che va dai 6 cm. dalla fiamma fino alla fiamma stessa, nel quale la temperatura media è assai elevata. Si deve anzi ritenere che gli elevati valori di K ricavati con questo metodo, e specialmente quelli relativi ai valori piccoli di x_2 oltre che alla ragione suesposta debbansi, in parte, anche ai diversi valori della temperatura.

4. Riportando su di un sistema di assi coordinati, in cui le ascisse rappresentino le distanze dalla fiamma, i risultati C e G esposti nelle tabelle VIII e IX, assieme a quelli che per brevità non ho riportato, si rileva come l'andamento con cui la K cresce col diminuire delle distanze, abbia un andamento un po' diverso a seconda del metodo.

L'andamento di K sia positiva che negativa relativo al metodo del Child, sarebbe rappresentabile ancorchè grossolanamente mediante tre linee rette A' B' C' (fig. 7) all'incirca parallele fra loro, e ciascuna relativa a un diverso valore del campo; mentre l'andamento di K relativo al metodo di Gianfranceschi sarebbe rappresentabile piuttosto con tre curve ABC, le quali mostrano le concavità in alto.

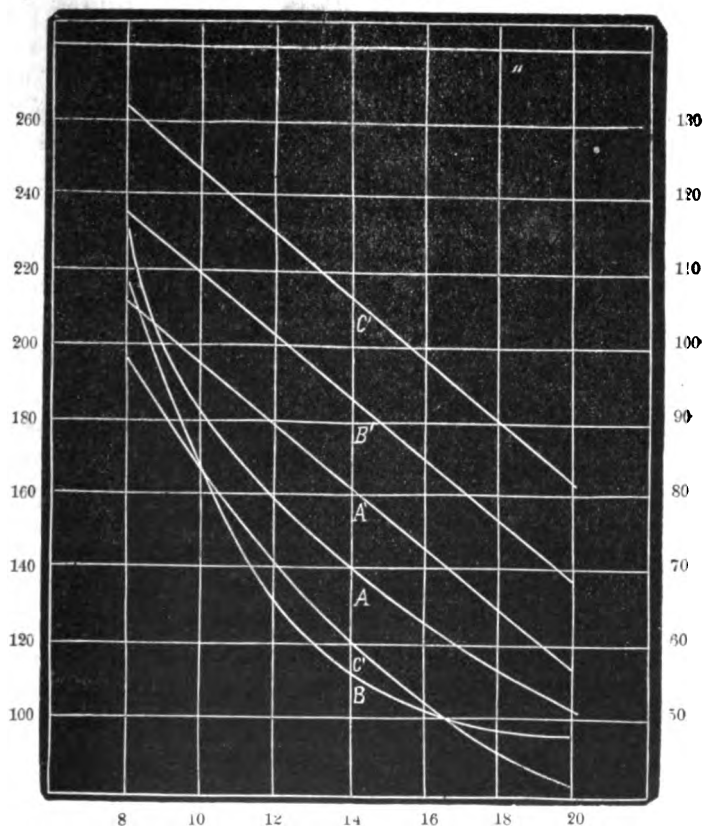



Fig. 7.

Più degno di nota però appare il fatto che, mentre le ABC sono ben distinte e piuttosto distanti fra loro, le A'B'C' sono molto più addossate l'una all'altra.

Questo starebbe a significare che, mentre col metodo di Child il campo ha una certa influenza sulla K, come in certi

casi e senza rendersene ragione constatò anche il Child stesso, col metodo di Gianfranceschi il campo ha una influenza assai più lieve.

Se ci può essere lecito spiegare questa lieve influenza nel metodo di Gianfranceschi colla stessa ragione che si era addotta per giustificare le variazioni di K colla distanza (vale a dire col fatto che quanto più è lungo il tempo durante il quale gli ioni rimangono sospesi nell'aria, tanto minore per il loro aumento di massa ne diventa la velocità effettiva) ciò non apparirebbe sufficiente, per giustificare le variazioni maggiori della K col metodo del Child, per le quali diventerebbe come necessaria l'ipotesi di un'altra causa di errore.

Mi riserbo di trattenermi sopra tale questione quando avrò occasione di riferire su altre esperienze che ho in corso a proposito della emissione di ioni per parte delle fiamme.

Aggiungo invece che, oltre alla causa sopra accennata circa l'aumento di K col campo, un'altra se ne deve notare per quanto la sua importanza possa essere lieve, la quale riguarda tutti e tre i metodi.

Essa è dovuta alle variazioni nella differenza del potenziale che nascono tra fiamma e piatto collettore nel periodo di tempo necessario, perchè il collettore assuma quel potenziale, da cui si deduce la misura della intensità di corrente. Queste diminuzioni nella differenza del potenziale, che sono le medesime per ogni campo, hanno indubbiamente una influenza maggiore sui campi deboli che non sui campi più intensi: e tale influenza agisce evidentemente sulla velocità effettiva degli ioni proprio in conformità alle accennate variazioni di K. Vi sarebbe dunque una ragione di più per concludere col Child che nessuna delle formule per la determinazione di K è veramente esatta.

5. Riguardo ai valori che si ottengono facendo il rapporto fra le K negative e positive raccolte nelle precedenti tabelle, ed anche fra quelli che per brevità non ho riportato, non è possibile dedurre nessuna legge di variazione nè per effetto della distanza, nè del campo. Il rapporto fra le K oscilla in generale fra un massimo corrispondente a 1,42 ad un minimo di 1.06.

6. Se si congiungono insieme i punti corrispondenti ai valori delle forze e delle densità misurati sul piatto B, si otterrebbero, secondo i dati di Gianfranceschi due curve con una leggera concavità in basso. Secondo i dati miei invece, i quali abbracciano anche un intervallo maggiore, si hanno, come si vede pure dalle fig. 5 e 6, due curve colla concavità in alto. Ciò credo debba apparire assai più logico di quanto non si dedurrebbe dai dati di Gianfranceschi.

7. Una causa di errore che il Gianfranceschi, come vedemmo, nota sussistere nei metodi del Thomson e del Child è dovuta a ciò, che in quelli viene supposta omogenea la distribuzione degli ioni tra fiamma e piatto collettore, mentre dalle curve della fig. 6 questa risulta assai complicata. Invece sempre secondo il Gianfranceschi, col suo metodo viene girata la difficoltà che insorge dalla complicata distribuzione degli ioni, perchè si risparmia di tenerne conto, non entrando nella sua formula che gli elementi $\frac{dV}{dx}$ e $\frac{d\chi}{dx}$ misurati sul piatto collettore.

Tale conclusione però a mio modo di vedere non è esatta, perchè i valori di $\frac{dV}{dx}$ e di $\frac{d\chi}{dx}$, ancorchè misurati sul piatto, sono dedotti dall'andamento delle curve dei potenziali e delle forze, le quali sono tutt'altro che indipendenti dalla suddetta distribuzione.

Se la causa di errore viene con questo metodo eliminata, non è già dunque perchè si possa fare a meno di tenerne conto, bensì perchè se ne tiene in certo modo il dovuto conto.

Se poi l'appunto si può muovere a questo riguardo al metodo del Child, non è sempre lecito farlo pel metodo di Thomson.

Infatti, se con questo metodo restringiamo l'intervallo $(x_2 - x_1)$ all'ultimo centimetro, non è più il caso di pensare alla influenza della non omogenea distribuzione degli ioni in quell'intervallo.

Che se ciò non ostante questa fosse pur tale da avere influenza sensibile sul valore di K, non andrebbe esente nemmeno il valore di K ricavata col metodo di Gianfranceschi,

in cui si conviene di applicare non già i valori di χ e di $\frac{d\chi}{dx}$ misurati sul piatto, ma la media di quelli relativi all'ultimo centimetro.

Ringrazio vivamente il Prof. A. Pochettino per l'aiuto di consigli e di mezzi.

Dall' Istituto tecnico di Sassari.

SULL' INDUZIONE MAGNETICA DI UN INVOLUCRO ELLISSOIDICO.

NOTA DI E. DANIELE.

Il problema dell' induzione magnetica di un involucro sferico sotto l' influenza di un campo uniforme è risolto da F. Neumann [1]) con un procedimento, che si può semplificare notevolmente quando si parta dalla forma data da Kirchhoff al problema dell' induzione magnetica, invece che da quella data da Poisson [2]). Seguendo la prima di queste due vie, si ha poi anche il vantaggio di poter estendere abbastanza facilmente il metodo allo spazio limitato, non da due sfere concentriche, ma da due ellissoidi *omofocali*. Anzi si può fare di più: dall' induzione dell' involucro ellissoidico sotto l' influenza di un campo uniforme, si risale subito alla soluzione del problema per l' involucro, nell' ipotesi che la funzione potenziale del magnetismo inducente si riduca, nello spazio occupato dall' involucro, ad un polinomio armonico qualunque. La forma da darsi alla soluzione è suggerita da quella che trovai in una Nota precedente per l' ellissoide pieno [3]), ed è fondata ancora sull' impiego delle *ellissoidali armoniche* di Morera.

Ho dedicato il § 1° di questo breve lavoro ad esporre la soluzione del problema dell' induzione magnetica per l' invo-

[1]) « Vorl. ü. d. Th. des Magnetismus etc., » §§ 21, 22; Leipzig, Teubner, 1881. La soluzione di F. Neumann è pure riprodotta dal Duhem nelle « Leçons sur l' électricité et le magnétisme »; t. II, p. 138 e segg.

[2]) V. p. es. Duhem: op. cit., t. II, pp. 117-124.

[3]) « Sul problema dell' induzione magnetica di un ellissoide a tre assi »; *N. Cimento*, (6), t. I, (1911).

lucro, supposto portato in un campo uniforme: ho creduto opportuno di trattare separatamente questo caso particolare, non solo a causa della sua importanza fisica, ma anche per mettere in rilievo la grande semplicità del metodo impiegato in confronto con quello applicato da F. Neumann all' involucro sferico. Il caso generale di un campo inducente, la cui funzione potenziale è un polinomio di grado qualunque, è trattato nel § 2°: l' esposizione è un pò sommaria, perchè in buona parte è la ripetizione di calcoli e di ragionamenti che già dovetti fare a proposito dell' ellissoide pieno.

§ 1°: Magnetizzazione dell' involucro ellissoidico in un campo uniforme.

1. Diciamo E ed E' le due superficie, rispettivamente esterna ed interna, che limitano l' involucro; i loro semiassi, $a\ b\ c$, $a'\ b'\ c'$, sian legati dalle relazioni

$$a'^2 - a^2 = b'^2 - b^2 = c'^2 - c^2 = \delta\,,$$

per cui δ indicherà una quantità negativa.

Porremo

$$(1)\qquad U = \int_0^\infty (N-1)\frac{ds}{R(s)}\,,\quad V = \int_\sigma^\infty (N-1)\frac{ds}{R(s)}\,,$$

$$N = \frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s} + \frac{z^2}{c^2+s}\,,$$

$$R(s) = \sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}\,,$$

e per σ s' intenderà la radice maggiore dell' equazione in s: $N = 1$: U e V differiscono solo per uno stesso fattore costante dai valori della funzione potenziale, risp. all' interno ed all' esterno di E, di una massa che riempia E con densità costante.

Analogamente, posto

$$U' = \int_0^\infty (N' - 1) \frac{d s'}{R'(s')}, \quad V' = \int_{\sigma'}^\infty (N' - 1) \frac{d s'}{R'(s')},$$

$$N' = \frac{x^2}{a'^2 + s'} + \ldots., \quad R'(s') = \sqrt{(a'^2 + s') \ldots.},$$

U′ e V′ forniscono a meno di un fattore costante, i valori, all' interno ed all' esterno di E′, di una massa omogenea che riempia E′, supponendo che σ' sia la radice maggiore dell' equazione in $s' : N' = 1$.

Osserviamo subito che cambiando la variabile s' nell' altra

$$s = \delta + s',$$

le U′ e V′ prendono la forma

$$(1') \qquad U' = \int_\delta^\infty (N - 1) \frac{d s}{R(s)}, \quad V' = \int_\sigma^\infty (N - 1) \frac{d s}{R(s)}.$$

2. Le due superficie E ed E′ dividono tutto lo spazio infinito in tre regioni, che chiameremo S_e S_i $S_{e'}$: la prima, esterna ad E, — la seconda, compresa fra E ed E′, la terza, interna ad E′; S_e ed $S_{e'}$ costituiscono complessivamente lo spazio esterno all' involucro. In quelle tre regioni definiremo tre funzioni di x y z, che diremo Q_e Q_i $Q_{e'}$, colle seguenti formole:

$$(2) \begin{cases} Q_e = \alpha \dfrac{\partial V}{\partial x} + \beta \dfrac{\partial V}{\partial y} + \gamma \dfrac{\partial V}{\partial z} \\ Q_i = \alpha'_i \dfrac{\partial V'}{\partial x} + \beta'_i \dfrac{\partial V'}{\partial y} + \gamma'_i \dfrac{\partial V'}{\partial z} + \alpha_i \dfrac{\partial U}{\partial x} + \beta_i \dfrac{\partial U}{\partial y} + \gamma_i \dfrac{\partial U}{\partial z} \\ Q_e' = \alpha' \dfrac{\partial U'}{\partial x} + \beta' \dfrac{\partial U'}{\partial y} + \gamma' \dfrac{\partial U'}{\partial z}; \end{cases}$$

colle α β γ intendiamo dodici costanti per ora indeterminate. Dalle formule di posizione (1) e (1′), col notare che U e U′ sono dei polinomii in x y z di 2° grado, risulta per le funzioni Q_e Q_i $Q_{e'}$ questa proprietà: tutte e tre le funzioni

sono armoniche nei rispettivi spazi in cui furono definite, inoltre la $Q_{e'}$ è nulla all' infinito.

Ci proponiamo ora di determinare le costanti introdotte nelle (2) in modo che le tre funzioni si continuino attraverso le superficie E ed E'. Quanto a V e V', esse rappresentano la stessa funzione, salvo che, dovendo la prima essere calcolata in punti di S_e e la seconda in punti di S_i, i valori di σ da porsi al limite inferiore degli $\int$ che figurano nelle (1) e (1') saranno positivi per la V (variando da 0 a ∞), e negativi per la V' (variando da 0 a δ). Ma sulla superficie E la σ assume in ogni caso il valore 0: le V e V', e così pure le loro derivate, prendono ivi gli stessi valori, ed hanno la forma di polinomii. Complessivamente tanto Q_e quanto Q_i si riducono, su E, a polinomii di 1° grado, e affinchè siano l' una la continuazione dell' altra, bisognerà che quei due polinomii riescano identici.

Anche su E' le due funzioni Q_i e $Q_{e'}$ si riducono a due polinomii lineari, perchè su questa superficie σ prende il valore costante δ; per cui volendo che Q_i e $Q_{e'}$ si riattacchino con continuità attraverso E, bisognerà ancora identificare quei due polinomii.

Se allora osserviamo che si ha in generale:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x \int_{\sigma}^{\infty} \frac{1}{a^2 + s} \frac{ds}{R}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 2x \int_{\sigma}^{\infty} \frac{1}{a^2 + s} \frac{ds}{R},$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x \int_{\sigma}^{\infty} \frac{1}{a^2 - s} \frac{ds}{R}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -2x \int_{\sigma}^{\infty} \frac{1}{a^2 - s} \frac{ds}{R}$$

colle analoghe formule per le derivate rispetto ad y e a z, e se si pone:

$$U = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{a^2 + s} \frac{ds}{R}, \quad A = [illegible]$$

la condizione [illegible] Q_i, Q_e, $Q_{e'}$ [illegible] continuarsi

attraverso ai due ellissoidi E ed E' conduce al seguente sistema di equazioni nei coefficienti α β γ:

$$(3)\quad \begin{cases} \alpha = \alpha'_i + \alpha_i, \qquad \beta = \beta'_i + \beta_i, \qquad \gamma = \gamma'_i + \gamma_i \\ A'\alpha'_i + A\alpha_i = A'\alpha', \ B'\beta'_i + B\beta_i = B'\beta', \ C'\gamma'_i + C\gamma_i = C'\gamma'. \end{cases}$$

Con B C B' C' si debbono intendere gli integrali che si ottengono da A e A' scambiando a con b e poi con c.

3. Supposte verificate le (3), si possono pensare le (2) come rappresentanti un' unica funzione Q, continua in tutto lo spazio, nulla all'infinito e armonica sia entro lo spazio occupato dall' involucro, sia all' esterno.

Facciamo ora l' ipotesi che l' involucro sia occupato da una massa magnetizzabile, omogenea ed isotropa, e si trovi sotto l'influenza di un campo magnetico uniforme, la cui funzione potenziale sia

$$\varphi = \xi x + \eta y + \zeta z\,, \quad (\xi, \eta, \zeta \text{ costanti})\,.$$

Affinchè la Q si possa considerare come la funzione potenziale del magnetismo indotto, basterà che soddisfi alle condizioni generali riscontrate or ora, e di più verifichi, su entrambe le superficie E ed E', la nuova condizione:

$$(4)\qquad (1 + 4\pi k)\frac{\partial Q}{\partial n_i} + \frac{\partial Q}{\partial n_e} + 4\pi k \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} = 0\,;$$

dove k indica il coefficiente di magnetizzazione, mentre n_i e n_e indicano la normale alla superficie contorno di S_i diretta all' interno od all' esterno di S_i.

Nella (4) sono comprese due equazioni: la prima si riferisce all' ellissoide E, ed in essa $\frac{\partial Q}{\partial n_i}$ e $\frac{\partial Q}{\partial n_e}$ vanno calcolate partendo risp. da Q_i e da Q_e; la seconda è relativa alla superficie E', e quelle due derivate si calcoleranno partendo risp. da Q_i e da $Q_{e'}$.

Ed ora si hanno facilmente le seguenti formole.

sulla superficie E:

$$\frac{d}{d n_i}\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{2 A p x}{a^2}, \quad \frac{d}{d n_i}\frac{\partial V'}{\partial x}=-\frac{2 p x}{a^2}\left(A-\frac{2}{a b c}\right),$$

$$\frac{d}{d n_e}\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{2 p x}{a^2}\left(A-\frac{2}{a b c}\right);$$

sulla superficie E':

$$\frac{d}{d n_i}\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{2 A p' x}{a'^2}, \quad \frac{d}{d n_i}\frac{\partial V'}{\partial x}=\frac{2 p' x}{a'^2}\left(A'-\frac{2}{a' b' c'}\right),$$

$$\frac{d}{d n_e}\frac{\partial U'}{\partial x}=-\frac{2 A' p' x}{a'^2};$$

p e p' indicano le distanze del centro comune dei due ellissoidi E ed E' dai loro piani tangenti.

Sostituendo in (4), il primo membro di questa diventa, per l'ellissoide E, un polinomio lineare omogeneo in x y z moltiplicato per p, e per l'ellissoide E' un polinomio analogo moltiplicato per p'. La (4) dà quindi luogo a due terne di equazioni nelle incognite α β γ; le prime equazioni di ciascuna terna sono:

$$(5)\quad \begin{cases} \left(A-\dfrac{2}{abc}\right)\alpha-(1+4\pi k)\left\{\left(A-\dfrac{2}{abc}\right)\alpha'_i+A\alpha_i\right\}=2\pi k\,\xi \\ A'\alpha'-(1+4\pi k)\left\{\left(A'-\dfrac{2}{a'b'c'}\right)\alpha'_i+A\,\alpha_i\right\}=2\pi k\,\xi\,, \end{cases}$$

e si ottengono le altre due coppie scambiando le grandezze relative all'asse x con quelle relative all'asse y e all'asse z.

4. I coefficienti incogniti introdotti nelle (2) sono in totale dodici, e altrettante sono le equazioni a cui devono soddisfare: cioè le sei del sistema (3) e le sei contenute in (5) e nei due sistemi analoghi. Mediante queste equazioni le incognite risultano perfettamente determinate.

Sostituiamo difatti in (5) ad α e α' i loro valori forniti dalle (3); si otterranno due equazioni lineari in α_i e α'_i, che dànno:

$$\alpha_i = \frac{2\pi k \xi A'}{\Delta} \left\{ 4\pi k \left(\frac{\Omega' - \Omega}{A' - A} - 1 \right) + \frac{\Omega'}{A' - A} \right\}$$

$$\alpha'_i = -\frac{2\pi k \xi A'}{\Delta} \frac{\Omega}{A' - A} ;$$

avendo posto:

$$\Omega = \frac{2}{a\, b\, c} = A + B + C , \quad \Omega' = \frac{2}{a'\, b'\, c'} = A' + B' + C' ,$$

$$\frac{\Delta}{A'} = 16\pi^2 k^2 A \left(1 - \frac{\Omega' - \Omega}{A' - A} \right) -$$

$$- 4\pi k \frac{A\,\Omega' - A'\,\Omega}{A' - A} - (1 + 4\pi k) \frac{\Omega\,\Omega'}{A' - A}$$

Risalendo alle (3), si hanno poi subito α e α'; mentre un calcolo identico a quello ora fatto permetterà di trovare le β e le γ. Resta così provato che la funzione potenziale del magnetismo indotto nell'involucro è la funzione Q rappresentata dalle (2).

Dai valori trovati per le α e dagli analoghi per le β e le γ, e dall'esame di $Q_{e'}$ e di Q_i risulta: 1°) che nella cavità dell'involucro, cioè nello spazio $S_{e'}$, si ha, dopo la magnetizzazione dell'involucro, un campo ancora uniforme, ma non coincidente in direzione con quello inducente; 2°) la massa dell'involucro *non* si magnetizza uniformemente, come invece avviene per l'ellissoide pieno. Questi risultati sono conformi a quelli ottenuti da F. Neumann per l'involucro sferico.

§ 2°: La funzione potenziale del campo inducente assume nello spazio occupato dall'involucro i valori di un polinomio di grado qualunque.

5. Ammettiamo che il campo inducente sia dovuto alla presenza di masse, situate all'esterno dell'involucro (cioè all'infuori dello spazio S_i), la cui funzione potenziale prenda

in S_i i valori di un polinomio armonico di un grado qualunque m. La soluzione del problema dell'induzione è fornita dalle seguenti posizioni:

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
Q_e &= \sum_{\lambda\mu\nu} \alpha_{\lambda\mu\nu} \frac{\partial^r V_r}{\partial x^\lambda \, \partial y^\mu \, \partial z^\nu} \\
Q_i &= \sum_{\lambda\mu\nu} \beta'_{\lambda\mu\nu} \frac{\partial^r V_r}{\partial x^\lambda \, \partial y^\mu \, \partial z^\nu} + \beta U_0 + \sum_{\lambda\mu\nu} \beta_{\lambda\mu\nu} \frac{\partial^r U_r}{\partial x^\lambda \, \partial y^\mu \, \partial z^\nu} + \\
&\quad + \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)(\Pi_0 + \Pi_1 + \ldots + \Pi_{m-2}) + \\
&\quad + \left(1 - \frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2}\right)(\Pi'_0 + \ldots + \Pi'_{m-2}) \\
Q_e &= \alpha' U'_0 + \sum_{\lambda\mu\nu} \alpha'_{\lambda\mu\nu} \frac{\partial^r U'_r}{\partial x^\lambda \, \partial y^\mu \, \partial z^\nu}
\end{aligned}
\right.
$$

$$(\lambda + \mu + \nu = r \,, \quad r = 1, 2, \ldots, m) \,;$$

$$U_r = \int_0^\infty (N-1)^r \frac{ds}{R} \,, \qquad U'_r = \int_\delta^\infty (N-1)^r \frac{ds}{R} \,,$$

$$V_r = \int_\sigma^\infty (N-1)^r \frac{ds}{R} \,,$$

δ avendo il medesimo significato che ha nel § 1°; $\Pi_0 \, \Pi_1 \ldots$, $\Pi'_0 \, \Pi'_1 \ldots$ rappresentano polinomii omogenei dei gradi indicati dagli indici.

Cominciamo difatti a mostrare come le costanti incognite che compaiono nelle (6) siano tante quante le equazioni a cui vengono assoggettate, in base alle condizioni cui devono soddisfare le funzioni Q.

6. Le costanti che entrano in Q_e sono in totale

$$C = 3 + 6 + \ldots + \frac{(m+1)(m+2)}{2} \,,$$

mentre quelle di $Q_{e'}$ sono

$$C + 1 \,,$$

in causa del termine $\alpha' U'_0$ che figura in più. Quanto a Q_i abbiamo C coeff. β' e C coeff. β, poi

$$C' = 1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{m(m-1)}{2}$$

coeff. nei polimonii Π e altrettanti nei polimonii Π'; a questi aggiungendo il coeff. β del termine βU_0, otteniamo

$$2C + 2C' + 1$$

coefficienti. Le incognite che ci occorre di determinare sono adunque complessivamente:

$$4C + 2C' + 2 .$$

7. Facciamo il computo delle equazioni (tutte lineari) che debbono essere verificate dalle incognite. Queste equazioni sono di tre specie: le prime provengono dalla continuità che intendiamo imporre alla funzione Q attraverso le superficie E ed E'; — le seconde derivano dal fatto che Q_i e $Q_{e'}$ devono essere armoniche in S_i e $S_{e'}$ (la Q_e è già armonica senz' altro); — le terze infine provengono dalla (4).

La continuità attraverso E conduce a identificare due polinomii in $x\ y\ z$ di grado m: si hanno così

$$C + 1$$

condizioni. Altrettante relazioni fornisce la continuità attraverso E'.

L' armonicità di Q_i dà luogo, fra i coeff. β e quelli dei polimonii Π e Π', a C' equazioni; e ad altre C' fra i coeff. α' dà luogo l' armonicità di $Q_{e'}$.

Quanto alla (4) osserveremo che, mancando in Q_e ed in Q_i i termini con V_0, le derivate normali di Q, calcolate su E o su E', saranno uguali [1]) a prodotti di p o di p' per po-

[1]) Cfr. i primi tre numeri della mia Nota citata.

linomii in $x\ y\ z$ di grado m privi di termine costante; per conseguenza la (4) dà origine a $2\,C$ equazioni fra le costanti incognite. Il numero complessivo delle equazioni che così si trovano è dunque $4\,C + 2\,C' + 2$, cioè è uguale al numero delle incognite.

8. Queste equazioni non costituiscono un sistema omogeneo, in causa del termine $4\,\pi\,k\,\frac{d\,\varphi}{d\,n_i}$ nella (4), ed il determinante dei coefficienti non può essere nullo, come si vede ripetendo il ragionamento fatto al n. 6 della mia Nota citata: si conclude che la funzione potenziale del magnetismo indotto nell'involucro si può effettivamente mettere sotto la forma (6).

Nel caso particolare che il campo inducente sia uniforme ($m = 1$), mancano in Q_i tutti i polinomii Π e Π', che compaiono soltanto per $m \geq 2$; inoltre il calcolo delle incognite darebbe $\beta = \alpha' = 0$. Si ricade così nelle (2), che si sono già dimostrate direttamente.

SUL CALCOLO DEI NUMERI DI TRASPORTO REALI.

O. SCARPA [1]).

Se gli ioni, nelle soluzioni degli elettroliti, sono aggregati con molecole del solvente *(idratati)* i numeri di trasporto *reali*, cioè i rapporti fra le quantità di ioni-grammo trasportati, per il passaggio della corrente, nell'intorno di un elettrodo, e la quantità di ioni-grammo che contemporaneamente sono scaricati sul medesimo elettrodo, devono differire, in generale, dai numeri di trasporto calcolati in base alle variazioni di concentrazione che, durante l'elettrolisi, avvengono negli spazi anodico e catodico (numeri di Hittorf).

E, in una nota precedente [2]), ho calcolata la equazione:

$$n_{cr} = \frac{n_c - \frac{N}{M} a}{1 - \frac{N}{M} (a + c)}$$ che permette di ricavare i secondi in funzione dei primi, e dei valori corrispondenti alle singole idratazioni.

[1]) *Rendiconti della Società Chimica Italiana*, Vol. III, fascicolo V e VII, 1911.

[2]) *Rendiconti della Società Chimica Italiana*, Sez. Napoli, Vol. III, pag. 142, 1911. In questa equazione

n_{cr} indica il numero di trasporto *reale* del catione.

n_c » » di Hittorf » »

N il numero di grammo-cationi esistenti nella soluzione prima della elettrolisi per ogni M molecole grammo del solvente indipendentemente dal valore della dissociazione elettrolitica.

c il numero di molecole grammo del solvente aggregate (idratanti) (in media) ognuno dei grammo-cationi trasportati durante l'elettrolisi nello spazio catodico.

a id. per ognuno dei grammo-anioni, trasportati nello spazio anodico.

Tale equazione, siccome le quantità a e c hanno certamente un limite superiore (al crescere della diluizione) indica che, una volta questo raggiunto, la differenza fra i numeri di trasporto reali, e quelli di Hittorf, diminuisce al crescere della diluizione; e assumendo [1]) per a e c i dati ottenuti da Reinhold e Riesenfeld io ho dimostrato che tale differenza è ancora sensibile (in generale) alla concentrazione 0,01 n.; come indica la seguente tabella:

Jone	Numero di trasporto reale n_{cr}	Numero di Hittorf n_c	Differenza percentuale
H^+ nel HCl	0,824	0,828	— 0,5 %
K^+ nel KCl	0,493	0,493	—
Na^+ nel NaCl	0,389	0,386	+ 0,8 %
Li^+ nel LiCl	0,378	0,370	+ 2,0 %
Ag^+ nel $AgNO_3$	0,473	0,472	+ 0,2 %

Ma siccome è molto piccola la precisione delle misure dei numeri di Hittorf specialmente alle concentrazioni maggiori

[1]) Ricordo che i valori delle idratazioni degli ioni furono fin'ora dedotti soltanto da Reinhold e Riesenfeld (*Zeit. Phys. Chem.* 66, 1909, 672) e da Washburn (ibid. 513) con metodi assolutamente differenti e indipendenti, ottenendo i seguenti risultati comparabili:

Cationi	Valori di c		Anioni	Valori di a	
	Rein e Ries	Washburn		Rein e Ries	Washburn
H^+	0	5	OH^-	11	—
K^+	22	21	Cl^-	21	20
Na^+	71	34	Br^-	20	—
Li^+	158	50	J^-	20	—
Ag^+	37	—	NO_3^-	25	—
Cu^{++}	112	—	SO_4^{--}	36	—

o dell'ordine della suaccennata [1]), e d'altra parte i metodi usati da Washburn [2]) e da Reinhold e Riesenfeld [3]) per calcolare le idratazioni degli ioni hanno condotto a risultati non ancora perfettamente sicuri, ho creduto utile di tentare il calcolo dei numeri di trasporto reali con un metodo indipendente dalla conoscenza dei suddetti valori.

Dalla teoria di Kohlrausch è infatti facile dedurre un metodo generale di calcolo dei numeri di trasporto dei diversi ioni nei vari elettroliti, in funzione di quello di un dato ione in un elettrolita prestabilito. E per ricavare una equazione applicabile nella grande maggioranza dei casi ho usato i seguenti simboli [4]).

Indico con $M_m R_n$ l'elettrolita campione, capace, nella dissociazione completa, di fornire m ioni M di valenza a e n ioni R di valenza b.

Indico poi con $N_p R_q$ un secondo elettrolita avente con il primo in comune l'ione R, e capace, nella dissociazione completa, di fornire p ioni N di valenza a', e q ioni R di valenza b.

Sieno ancora: U, V, V' le mobilità limiti degli ioni-equivalenti dei due elettroliti, e n_R e n'_R i numeri di trasporto del ione R nei due elettroliti, pure alla diluizione limite, e λ_∞ e λ'_∞ le rispettive conduttività molecolari limiti.

Ciò posto, applicando la teoria di Kohlrausch, e indicando con K una costante dipendente dalle unità di misura, si deducono le equazioni:

$$1) \quad \begin{cases} \lambda_\infty = K\,m\,a\,(U+V) = K\,n\,b\,(U+V) \\ \lambda'_\infty = K\,p\,a'\,(U+V') = K\,q\,b\,(U+V') \end{cases}$$

[1]) Un esempio è dato dalle ricerche di Bogdan, che sono fra le più accurate. Tale A. ha trovato p. e. per l'idrogenione nell'HCl a concentrazioni dell'ordine della suaccennata i valori: 0,823, 0,827, 0,831, 0,827, 0,833, 0,825, 0,824, 0,830, 0,822 ecc. in serie comparabili di misure.

[2]) *Zeit. Phys. Chem.*, 66, 1909.

[3]) Ibid.

[4]) Sono perciò esclusi i casi in cui si hanno, nella dissociazione completa, più di due specie di ioni, come avviene p. e. per i solfati acidi ecc. Ma è facile di estendere pur ad essi la presente trattazione.

$$2)\qquad \begin{cases} n_R = \dfrac{U}{U+V} = K\dfrac{U\,b\,n}{\lambda_\infty} \\ n'_R = \dfrac{U}{U+V'} = K\dfrac{U\,b\,q}{\lambda'_\infty} \end{cases}$$

e quindi ne deriva la:

$$3)\qquad n'_R = n_R\,\frac{q}{n}\,\frac{\lambda_\infty}{\lambda'_\infty}$$

e poichè tale equazione permette di calcolare i numeri di trasporto, alla diluizione limite, di tutti gli elettroliti aventi con quello $M_m\,R_n$ l'ione R in comune, seguitando a operare similmente, è possibile di dedurre da ognuno di questi, quelli degli altri ioni negli elettroliti aventi con essi un altro ione in comune, ed estendere così, passo passo, il calcolo a tutti gli ioni in tutti gli elettroliti dei quali sono note le conduttività molecolari limite.

Siccome poi la equazione 3) è fondata sull'ipotesi che il numero di trasporto corrisponde esattamente alla sua definizione (in funzione delle mobilità degli ioni) *essa conduce evidentemente ai valori reali dei numeri di trasporto,* i quali però, alla diluizione limite, debbono coincidere numericamente con quelli di Hittorf[1]); e perciò essa richiede che sia noto il *valore reale* del n. di t. di quel dato ione in quell'elettrolita che fu assunto per campione.

Se però si tratta di elettroliti binari nei quali non sia possibile la dissociazione multipla non dando essi luogo a ioni primari aggregati con molecole dello stesso elettrolita, e si indicano cen α e α' rispettivamente i due gradi di dissociazione del campione, e di quello in esame, e con λ e λ' le due conduttività molecolari in condizioni di eguale concentrazione ionica (e perciò di eguale idratazione dell'ione in comune), si deducono le equazioni:

[1]) Supponendo che non intervenga l'idrolisi, od altri fenomeni secondari, od alterare l'andamento delle misure.

1') $$\begin{cases} \lambda = K d \alpha (U + V) \\ \lambda' = K d \alpha' (U + V') \end{cases}$$

2') $$\begin{cases} n_R = \frac{U}{U + V} = K \frac{U d \alpha}{\lambda} \\ n'_R = \frac{U}{U + V'} = K \frac{U d \alpha'}{\lambda'} \end{cases}$$

ove d indica la valenza dei loro singoli ioni, e quindi la:

3') $$n'_R = n_R \frac{\alpha'}{\alpha} \frac{\lambda}{\lambda'}$$

la quale permetterebbe di calcolare il numero di trasporto reale del ione R in qualunque elettrolito binario in tutte le condizioni di diluizione, purchè fosse noto quello dello stesso ione in un altro elettrolito, nelle stesse condizioni di concentrazione ionica, e purchè le quantità α e α' non sieno state dedotte con il metodo elettrolitico, il quale, presupponendo la indipendenza delle mobilità degli ioni dalla concentrazione delle soluzioni, conduce implicitamente ad ammettere la costanza dei numeri di trasporto, al variare della diluizione.

Fondamento di questo metodo di calcolo dei numeri di trasporto reali, è perciò la conoscenza del *numero di trasporto reale* di un ione in un dato elettrolita, condizione a cui non sembra « *a priori* » facile di soddisfare. Ma io ho potuto risolvere il problema scegliendo, per questo scopo, quello dell'ione cloro nel Cloruro di Potassio in soluzione centinormale.

Avviene infatti che essendo l'anione del Cloruro di Potassio quasi altrettanto mobile del catione, e possedendo essi ioni, con grande probabilità (come indicano i risultati concordi di Washburn e Reinhold e Riesenfeld), circa la stessa idratazione, il numero di trasporto reale, del catione o dell'anione, coincide per esso alle concentrazioni dell'ordine delle centinormali con il numero di Hittorf, il quale d'altra parte è noto, in tal caso, con grande precisione.

Dalle accuratissime misure di Bogdan [1]), eseguite sotto l'autorevole guida dello Jahn, si deducono infatti per tali concentrazioni i valori (medi di parecchie serie di esperienze):

$$n_c = 0{,}497 \qquad n_a = 0{,}503 \ .$$

In quanto poi alle conduttività limiti necessarie per i calcoli, non è evidentemente possibile di assumerne i valori ottenuti sommando le mobilità dei due ioni, essendo queste calcolate, alla lor volta, in base ai numeri di trasporto; ma è necessario assumere i migliori valori sperimentali, i quali però, in taluni casi, possono venire convenientemente corretti riferendoli a quelli più sicuri, applicando il principio della costanza dei valori della differenza delle λ_∞ per coppie di elettroliti aventi a due a due un ione in comune [2]).

E perciò io ho assunto tutti i valori dati dalle recenti e accuratissime misure di Noyes e dei suoi allievi [3]), e in base a queste, applicando il principio suesposto, ho dedotto quando fu possibile quelle di altri elettroliti (p. e. del KNO_3, del K_2SO_4 ecc.); e nei casi rimanenti ho adottato i valori dati da Kohlrausch [4]) per le concentrazioni 0,0001 n.

Così operando ho calcolato i numeri della seguente tabella tutti riferiti alla temperatura di 18°, e, per facilitare i confronti, ho in essa riportato pur i migliori valori fin' ora noti dei numeri di Hittorf (n_H) alle maggiori diluizioni sperimentate, nonchè le differenze percentuali con quelli reali da me calcolati, e l'indicazione del senso secondo cui tali numeri di Hittorf variano al crescere della diluizione.

[1]) *Zeit. Phys. Chem.* 37, 1901 (Jahn).
[2]) Ad esempio per le coppie MR e NR, MS e NS.
[3]) *Carnegie Institution.* Washington 1907, n. 63.
[4]) Kohlrausch und Holborn. « Leit. der Elektrolyte ». Leipzig 1898.

Jone	Elettrolita	λ_∞			Numero di trasporto reale ($V = \infty$)	Numero [1] di Hittorf alla diluizione V	Diluizione V (litri)	Differenza percentuale ($n_R - n_H$)	Senso della Variazione dei numeri di Hittorf con la diluizione
		Noyes	teorico (da Noyes)	Kohl.					
H+	HCl	379,0	—	—	0,827	0,829 N.	475	— 0,24 %	dimin.
	HNO_3	377,0	—	—	0,830	0,837 »	455	— 0,83 %	dimin.
						0,800 B.	20	+ 2,0 %	—
	H_2SO_4	2×383,0	—	—	0,818	0,807 K.	20	+ 1,3 %	cresce
						0,865 S.	17	— 5,9 %	cresce
Na+	NaCl	109,0	—	—	0,398	0,396 J.	100	+ 0,5 %	cresce
	$NaNO_3$	—	107,0	(103,7)	0,406	0,371 B.	20	+ 8,7 %	?
	Na_2SO_4	—	2×113,0	(110,5)	0,384	0,366 H.	7	+ 4,6 %	cresce
	NaOH	216,5	—	—	0,200	0,201 B.	25	— 0,5 %	?
						0,190 K.	20	+ 5 %	cresce
K+	KCl	130,1	—	—	**0,497**	**0,497** J.	100	—	—
	KJ	—	—	130,3	0,496	0,494 K.	100	+ 0,4 %	cresce
	KNO_3	—	128,1	(124,7)	0,503	0,503 K.	10	0,0	dimin.
	K_2SO_4	—	2×134,1	(2×132,8)	0,483	0,493 N.	5	— 2,1 %	dimin.
	$KClO_3$	—	—	120,2	0,538	0,538 H.	14	0,0	dimin.
	KOH	—	237,5	(234,0)	0,273	0,258 Ku.		+ 5,5 %	?
						0,265 K,	10	+ 2,9 %	cresce

[1]) Secondo le esperienze e i dati di Noyes (N.), Bein (B.), Kohlrausch (K.), Stark (S.), Jahn (J.), Hittorf (H.), Kushell (Ku.), Bukschensky (Bu.); vedi perciò oltre le fonti già citate; Landolt und Bornstein. *Phys. Chem.*, Tabellen,

Jone	Elettrolita	λ_∞			Numero di trasporto reale ($V = \infty$)	Numero [1] di Hittorf alla diluizione V	Diluizione V (litri)	Differenza percentuale ($n_R - n_H$)	Senso della Variazione dei numeri di Hittorf con la diluizione
		Noyes	teorico (da Noyes)	Kohl.					
NH_4^+	NH_4Cl	130,7	—	—	0,498	0,493 B. 0,494 K.	100	+ 1,0 % + 0,8 %	cresce
Li^+	LiCl	—	—	100,7	0,348	0,330 J.	100	+ 5,1 %	cresce
Ag^+	$AgNO_3$	115,8	—	—	0,453	0,470 J.	100	— 3,7 %	dimin.
Ca^{++}	$CaCl_2$	—	—	2 × 115,2	0,444	0,447 B. 0,417 B.	100 20	— 0,6 % + 6,7 %	cresce »
Sr^{++}	$SrCl_2$	—	—	2 × 118,7	0,448	0,440 B.	100	+ 1,8 %	cresce
Ba^{++}	$BaCl_2$	—	—	2 × 120,5	0,456	0,447 Bu	100	— 2,0 %	dimin.
Mg^{++}	$MgSO_4$	2 × 114,1	—	—	0,403	0,459 B. 0,344 H.	20 13	— 14 % + 14,6 %	? cresce
Cu^{++}	$CuSO_4$	—	—	2 × 113,3	0,398	0,375 J.	100	+ 5,7 %	cresce
Zn^{++}	$ZnSO_4$	—	—	2 × 109,3	0,377	0,336 Ku.	100	+ 10 %	cres. (H)

[1]) Secondo le esperienze e i dati di Noyes (N.), Bein (B.), Kohlrausch (K.), Stark (S.), Jahn (J.), Hittorf (H.), Kushell (Ku.), Bukscheusky (Bu.); vedi perciò oltre le fonti già citate: Candolt und Bornstein. *Phys. Chem.*, Tabéllen.

Per eseguire razionalmente i confronti fra i valori così calcolati, e i numeri sperimentali, bisogna tener conto dell'ordine di grandezza degli errori di cui possono essere affetti entrambi.

In quanto ai secondi bisognerebbe però discutere, caso per caso, le singole esperienze, cosa non sempre possibile; ma in quanto ai primi, usando la equazione generale dell'errore massimo relativo che si deduce dalla 3):

$$\frac{d\,n'_R}{n'_R} = \frac{d\,n_R}{n_R} + \frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{d\lambda'}{\lambda'}$$

e ponendo:

$$\frac{d\,n_R}{n_R} = \frac{1}{1000}, \quad \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{d\lambda'}{\lambda'} = \frac{1}{1000}$$

valori il cui ordine di grandezza corrisponde a quelli possibili nelle misure più accurate, si ricava:

$$\frac{d\,n'_R}{n'_R} = \frac{3}{1000}$$

quantità assai piccola, e certamente inferiore agli errori di cui sono ordinariamente affetti i numeri di Hittorf.

Ma evidentemente un tale errore cresce per gli elettroliti che non hanno alcun ione in comune con il campione, e perciò ben più caute debbono essere, per essi, le conclusioni.

Ciò posto, osservando la tabella, si arriva alla conclusione che: *il senso della differenza fra i numeri di trasporto (reali) calcolati per la diluizione limite in base alle misure di conduttività e a quelli degli ioni nel cloruro di potasssio* (0,01 n.), *e i numeri di Hittorf, quali sono stati misurati a diluizioni inferiori alla limite, coincide sempre con il senso secondo cui, i secondi, variano al crescere della diluizione.*

E poichè questo risultato si accorda perfettamente [1]) con la teoria che sopra ho ricordata, ne deriva non soltanto un maggior peso per i valori dei numeri di trasporto reali calcolati con il metodo che ho indicato, ma, implicitamente, anche una nuova conferma alle teorie fondamentali di Arrhenius e di Kohlrausch.

Napoli — Laboratorio di Elettrochimica
della R. Scuola Sup. Politecnica.

[1]) In realtà, sarebbe necessario di dimostrare che i numeri di trasporto da me calcolati sono i limiti verso cui tendono i numeri di Hittorf al crescere della diluizione. Ma disgraziatamente una tal trattazione non è ancora possibile (in modo rigoroso) poichè spesso mancano i dati necessari, e più spesso ancora quelli noti (specialmente alle maggiori diluizioni) sono affetti da errori tali da rendere falsa o illusoria ogni estrapolazione.

OSSERVAZIONI SU TALUNI FENOMENI DI RILASSAMENTO.

NOTA DEL DOTT. PAOLO ROSSI [1]).

Il concetto di rilassamento fu introdotto, com'è noto, dal Maxwell [2]), il quale considerando da un punto di vista generale e molto semplice i fluidi vischiosi giunse alla conclusione che l'attrito interno di tali sostanze si può esprimere mediante il prodotto del modulo di rigidità per un'altra grandezza, caratteristica di ciascuna sostanza, ch'egli chiamò tempo di rilassamento. Quest'ultima grandezza poi non è che quella costante avente le dimensioni di un tempo, che compare nell'espressione della legge esponenziale, secondo cui, nell'ipotesi del Maxwell, diminuisce col tempo la tensione interna del mezzo vischioso, se sottoposto a deformazione costante.

Partendo dallo stesso ordine di idee, il Kundt in un suo lavoro sulla birifrangenza dei liquidi vischiosi in moto [3]) suggerisce un metodo basato su detto fenomeno ottico per la determinazione del tempo di rilassamento, nell'ipotesi che la differenza fra i due indici, ordinario e straordinario, sia in ogni istante proporzionale alla tensione corrispondente nel mezzo vischioso in esame, tensione che tende a sparire gradatamente.

Ora, come risulta da due note da me pubblicate sulla doppia rifrazione accidentale del caucciù [4]) si può per questa sostanza ritenere come approssimativamente verificata una legge di proporzionalità fra la tensione ed il corrisponente effetto di

[1]) Estratto dal *Rend. della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli*, Fasc. 5° e 6°, Maggio e Giugno 1911.

[2]) *Phil. Mag.*, vol. 35, pag 129 e 185 (1868).

[3]) *Wied. Ann.*, *13*, 110 (1881).

[4]) *Rend. R. Acc. di Napoli*, Serie III, Vol. XVI (1910), pag. 125 e 142. Ed anche *N. Cim.* Vol. XX, pag. 226 e 268, II sem. 1910.

birifrangenza; in particolare poi quando si sottopone una lamina a deformazione costante, descrescono per il rilassamento la tensione e la birifrangenza in modo da mantenersi sempre costante col tempo il rapporto fra i valori che misurano la tensione e l'effetto ottico corrispondente.

Sarebbe quindi lecito applicare a questa sostanza il metodo del Kundt per la determinazione della costante di rilassamento, se le tensioni ed i corrispondenti effetti di birifrangenza diminuissero nel caucciù sottoposto a deformazione costante secondo la legge esponenziale ammessa dal Maxwell.

Per risolvere la questione basta riferirsi ai dati riportati nella seconda delle note citate, riguardanti il rilassamento delle lamine con deformazione costante, e propriamente basta riferirsi ai ritardi di fase δ che possono nel caso in discussione misurare la birifragenza, essendo costante lo spessore. Ora se per ogni coppia di determinazioni successive di δ si calcola il rapporto $\frac{\log \delta/\delta'}{t'-t}$, rapporto che sarebbe proporzionale alla velocità di rilassamento, ossia all'inversa del tempo di rilassamento, si trova che invece di mantenersi almeno approssimativamente costante, esso diminuisce rapidamente col progredire del tempo, come si vede nelle seguenti tabelle:

TABELLA I (Para calandra con olio ossidato e cera)

t (ore)	0	1	3	18
δ	225	216	207	187
$\frac{\log \delta/\delta'}{t'-t}$	—	0.0177	0.0093	0.0029

TABELLA II (Foglia segata grigia)

t (ore)	0	0.9	1.9	16.7
δ	1070	1052	1044	1020
$\frac{\log \delta/\delta'}{t'-t}$	—	0.0082	0.0033	0.0007

TABELLA III (Foglia segata non vulcanizzata)

t (minuti)	0	1	2	4	7	167	1097	2547
δ	910	790	710	620	537	274	188	162
$\frac{\log \delta/\delta'}{t'-t}$	—	0.0614	0.0463	0.0299	0.0155	0.0019	0.0002	0.00004

TABELLA IV (Foglia non vulcanizzata)

t (ore)	0	0.7	1.7	3.7	17.5
δ	150	119	101	90	73
$\frac{\log \delta/\delta'}{t'-t}$	—	0.1437	0.0419	0.0135	0.0052

Secondo lo Schwedoff [1]) non sarebbe propriamente la tensione che diminuisce seguendo una legge esponenziale, bensì la differenza fra il valore di questa tensione ed il valor limite, differente da zero, che essa avrebbe dopo un tempo infinitamente lungo, cioè si avrebbe secondo questo Autore:

$$[a] \qquad F - f = (F_0 - f)\, e^{-\beta t}$$

se si denotano con F_0, F ed f i valori della tensione iniziale, della attuale e di quella limite rispettivamente.

Lo Schwedoff per verificare la sua teoria sperimentò sopra una soluzione acquosa di gelatina al 5 per mille e trovò un buon accordo fra le previsioni teoriche ed i risultati dell'esperienza.

Ora nell'ipotesi che questa legge valga anche per il caucciù, se δ e δ' sono i ritardi di fase ottenuti in due determinazioni successive e corrispondenti ai valori t e t' del tempo e se si denota con δ_∞ il valor limite per $t = \infty$, si dovrebbe

[1]) *J. d. Phys.*, 2. S., VIII, p. 341 (1899). — Congrès internat. de Physique. Paris 1900, t. I, p. 478.

avere, essendo applicabile il metodo del Kundt nel caso del caucciù,

$$[b] \qquad \frac{\log \frac{\delta - \delta_\infty}{\delta' - \delta_\infty}}{t' - t} = \text{costante}.$$

Invece anche le poche determinazioni da me fatte bastano per escludere che possa essere soddisfatta questa relazione. Mi riferisco alla tabella III e faccio osservare che il valore limite δ_∞ dovrebbe essere certamente inferiore a 162; sostituendo dunque questo valore a δ_∞ e denotando per brevità con d le differenze che si ottengono sottraendo il valore stesso dalle δ, sarà evidentemente in ogni caso $d < \delta - \delta_\infty$. Di più è facile dimostrare che, essendo $d' > d$, si ha

$$\frac{d}{d'} > \frac{\delta - \delta_\infty}{\delta' - \delta_\infty}$$

e che la differenza fra i due membri di questa disuguaglianza cresce col diminuire di d' e di δ'

Ne segue che se la [b] fosse soddisfatta il rapporto anologo $\frac{\log d/d'}{t' - t}$ dovrebbe crescere col diminuire di d'.

Calcolando invece in base ai dati della tabella III i valori di questo ultimo rapporto, si vede che questi diminuiscono rapidamente col diminuire di d' come risulta dalla seguente tabella:

Tabella V.

t (minuti)	0	1	2	4	7	167	1097
d	748	628	548	458	395	112	26
$\frac{\log d/d'}{t' - t}$	—	0.076	0.059	0.039	0.021	0.0034	0.0007

Dunque nel rilassamento del caucciù non solo non è soddisfatta la semplice relazione esponenziale del Maxwell, ma nemmeno l'altra suggerita dallo Schwedoff e da questo Autore trovata valida per una soluzione acquosa di gelatina.

Volendo ora prendere in considerazione le altre sostanze, da me studiate dal punto di vista della doppia rifrazione accidentale e del comportamento elastico [1]), vale a dire le gelatine ed il celluloide, la questione diventa più complessa in quanto che per dette sostanze non si verifica sempre una proporzionalità fra la tensione ed il corrispondente effetto di birifrangenza; può darsi dunque che sia diversa la legge di rilassamento della tensione elastica da quella relativa all' effetto ottico, ma anche ammesso che per una di tali sostanze valga per i due fenomeni una legge della stessa natura, per es. la legge esponenziale del Maxwell, è da aspettarsi che la costante di rilassamento determinata con metodi ottici non coincida con quella che si può ottenere, direttamente od indirettamente, in base allo studio delle proprietà meccaniche della sostanza.

Il Reiger [2]), mentre erano ancora in corso le mie esperienze, fece rilevare che bisogna distinguere un tempo di rilassamento che egli chiama ottico da quello meccanico, poichè per una sostanza da lui presa in esame egli mostrò che si debbono ammettere due valori differenti per dette costanti. Il Reiger però non determinò direttamente entrambe le costanti, ma arrivò a questa conclusione seguendo un procedimento indiretto basato su talune considerazioni da lui svolte in un precedente lavoro sulla propagazione nei liquidi delle deformazione di scorrimento. (loco cit., p. 51).

In detto lavoro per sottoporre a verifica tanto la teoria dell' attrito interno dei liquidi, quanto quella che considera i liquidi come mezzi elastici soggetti a rilassamento, l' A. stabilisce per ciascuna di queste teorie le equazioni fondamentali relative alla propagazione, in seno ad un liquido vischioso, d' un sistema di onde trasversali prodotte per es. mediante un piatto oscillante. Sperimentando poi su liquidi come l' acqua e l' olio d' oliva aventi un tempo di rilassamento molto piccolo, trova che per questi liquidi la teoria dell' attrito interno meglio corrisponde ai risultati sperimentali, essendo affatto insen-

[1]) *Rend. R. Acc. di Napoli.* Serie III, Vol. XVI (1910), pag. 181 e 206.

[2]) *Ann. d. Phys.*, *31*, p. 93 (1910).

sibile l' influenza che può avere il piccolissimo tempo di rilassamento: la teoria del rilassamento per questi liquidi avrebbe un interesse puramente teorico, in quanto che essa avrebbe importanza solo nel caso di ondulazioni molto rapide ed allora l' assorbimento sarebbe estremamente grande. Naturalmente diverso è il caso in cui il tempo di rilassamento è piuttosto grande, relativamente al periodo di vibrazione.

Infatti il Reiger nelle sue considerazioni teoriche relative alla teoria del rilassamento arriva al risultato che solo nel caso d' un periodo di vibrazione molto grande rispetto al tempo di rilassamento si avrebbe per entrambe le teorie la stessa formula di dispersione cioè la stessa legge di dipendenza della velocità di propagazione dal periodo, mentre che per periodi dello stesso ordine di grandezza del tempo del rilassamento, la velocità di propagazione nella teoria del rilassamento sarebbe più piccola che nell' altra; nell' ipotesi poi che il tempo di rilassamento sia molto grande rispetto al periodo di vibrazione, secondo la teoria in parola la velocità di propagazione non dipenderebbe se non in misura assai piccola dal periodo, valendo approssimativamente la relazione $v^2 = \frac{N}{\rho}$, dove ρ denota la densità ed il modulo di rigidità N sarebbe nella teoria del Maxwell dato dal rapporto $\frac{\eta}{T}$ fra il coefficiente di viscosità ed il tempo di rilassamento.

Ora il Reiger, sperimentando sopra una miscela di colofonia (80 p.), toluolo (20 p.) ed una piccola quantità di cera (0.5 p.), da una parte ha determinato T, mediante l'esame della birifrangenza, ed $\frac{\eta}{\rho}$ direttamente, ricavando così un valore di v uguale a 0,04 cm. al sec.; d' altra parte invece, generato un sistema di onde con un piatto oscillante, ha trovato che esse si propagano d' un tratto di 2 cm. in meno di 0, 2 sec. vale a dire con una velocità superiore a 10 $\frac{\text{cm.}}{\text{sec.}}$

Per ciò egli conchiude che il tempo di rilassamento ottico non coincide con quello meccanico.

Ora io voglio far rilevare che i risultati sperimentali da me ottenuti nello studio del rilassamento delle gelatine e del celluloide (V. note citate), nell' ipotesi che si possa parlare per queste sostanze di costanti di rilassamento, costituiscono una prova *diretta* che vi sono dei casi in cui le due costanti sono molto diverse fra di loro; inoltre anche il senso della differenza è il medesimo di quello relativo alla esperienza fatta dal Reiger, vale a dire il tempo di rilassamento ottico risulta *maggiore* di quello meccanico.

Nel caso preso in esame dal Reiger risultò infatti la velocità di propagazione delle onde prodotte dal piatto oscillante di un ordine di grandezza notevolmente maggiore di quello ricavato indirettamente col metodo ottico: ora essendo v^2 inversamente proporzionale a T, si deduce in riguardo all' effetto meccanico un valore di T più piccolo che non per l' effetto ottico.

Quanto ai miei risultati non può nascere alcun dubbio nel caso delle gelatine. In quelle semplicemente acquose il continuo essicamento non solo riesce a mascherare il rilassamento ottico, ma fa aumentare col tempo la birifrangenza della lamina di cui si mantiene costante la deformazione, mentre l' esistenza d' un rilassamento meccanico è mostrato fra l' altro dal fatto che sotto un carico costante, l' allungamento di dette gelatine aumenta col tempo. Nelle gelatine contenenti glicerina intervengono pure variazioni del contenuto acquoso, le quali impediscono di fare uno studio della legge di rilassamento, però dette variazioni sono abbastanza piccole perchè queste gelatine, sottoposte a deformazione costante, presentino in modo evidente un rilassamento ottico assai più lento di quello meccanico. Nella tabella VI della Nota riguardante le gelatine [1]) è dato un esempio in cui durante 6 giorni e mezzo circa si ebbe una diminuzione della birifrangenza di poco superiore al 6°/₀ mentre la tensione diminuì quasi del 60 °/₀.

Nello studio del celluloide non venne cimentata nussuna lastra ad un deformazione costante, però in base al comportamento presentato da una lastra sotto un carico costante si puó

[1]) *Rend. R. Acc. di Napoli.* S. III. Vol. XVI (1910), pag. 190.

prevedere quello che si otterrebbe, mantenendo costante la deformazione, almeno per ciò che riguarda il confronto fra il rilassamento ottico e quello meccanico.

Non avendosi per il celluloide una grande deformabilità può ritenersi che, mantenendo invariato il peso tensore, rimanga costante anche il carico relativo all' unità di sezione. Ora in queste condizioni, come appare dalla tabella V dell' ultima delle Note citate, aumenta sia l' allungamento della lastra che l' effetto della doppia rifrazione. Quanto al progredire della deformazione della lastra, esso è evidentemente una conseguenza del rilassamento meccanico, ma il crescere della birifrangenza, avendosi un peso tensore costante, mostra che nell' ipotesi di voler ottenere una birifrangenza invariata basterebbero carichi sempre più piccoli coll' andare del tempo, vale a dire che se un rilassamento ottico esiste, esso è più lento di quello meccanico. Si potrebbe invece ammettere che per entrambi valga una stessa legge, qualora l' effetto ottico non subisse nè aumenti nè diminuzioni finchè si mantiene costante il carico unitario.

Coucludendo: nel caucciù il rilassamento ottico e quello meccanico procedono di pari passo, vale a dire che nel caucciù sottoposto ad una deformazione costante la tensione ed il corrispondente effetto di birifrangenza diminuiscono col tempo sempre nello stesso rapporto; però non si può parlare d' un tempo di rilassamento caratteristico di questa sostanza, non essendo soddisfatta nè la relazione esponenziale del Maxwell, nè quella analoga stabilita dallo Schwedoff.

In riguardo alle gelatine ed al celluloide i risultati da me ottenuti in precedenti esperienze dimostrano *in modo diretto* che per tali sostanze il rilassamento ottico non procede colla stessa velocità di quello meccanico, come era stato mostrato in modo indiretto dal Reiger per una miscela di colofonia e toluolo, essendo in tutti questi casi il rilassamento ottico considerevolmente più lento di quello meccanico, qualunque sia la legge con cui i due fenomeni procedono.

Napoli — Istituto Fisico della R. Università.

SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

Continuazione della Nota pubblicata a pag. XIX.

Hanno pagato la quota 1910 i Soci:

Amaduzzi Lavoro
Alippi Tito
Drago Ernesto
Gallarotti Arturo

Hanno pagato la quota 1911 i Soci:

Amerio Alessandro
Arnò Riccardo
Bartorelli Antonio
Ercolini Guido
Florio Fortunato
Maggi Gian Antonio
Palagi Ferdinando

Attilio Mariotti, *gerente responsabile.*

Pubblicazione mensile

Anno LVII - Serie VI - Vol. II - 2° Sem. - Fasc. 10°

Ottobre 1911
Pubblicato il 15 Ottobre

IL NUOVO CIMENTO

FONDATO DA C. MATTEUCCI E R. PIRIA
E CONTINUATO DA E. BETTI E R. FELICI

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

INDICE:

PISA
STABILIMENTO TIPOGRAFICO TOSCANO
Ditte: Vannucchi-Galileiana-Pieraccini
1911

E. Leybold's Nachfolger, Cologne

ESPOSIZIONE INTERNAZIONALE D'ARTI E MESTIERI

TORINO 1911.

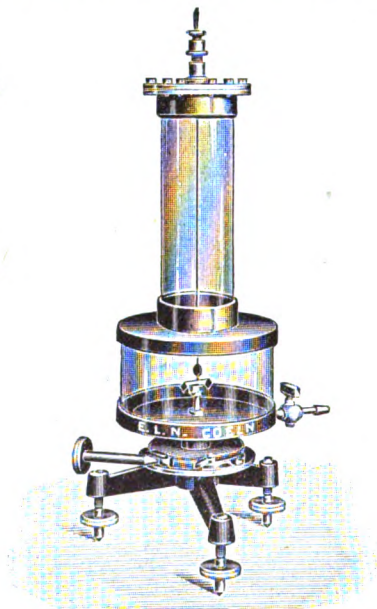
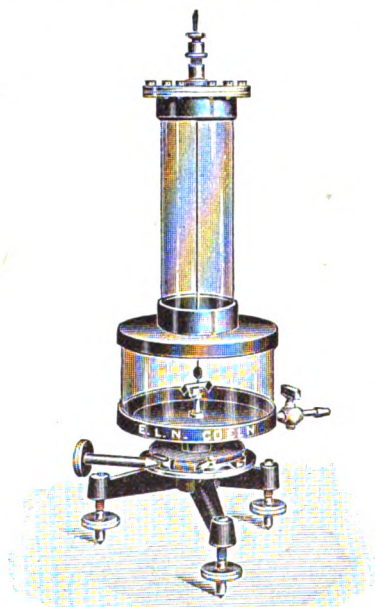
Sezione germanica: Meccanica di precisione e Ottica; Posto 17 e Galleria delle Meraviglie dell'Elettricità.

Nuove costruzioni d'apparecchi di proiezione orizzontali e verticali.

Pompe a vuoto di Gaede delle quali abbiamo fornito fino ad oggi più di 4500 esemplari.

Bolometri.

Ponti di misura.

Selettori di linee.

Apparecchio per la dimostrazione della pressione della luce secondo Amerio

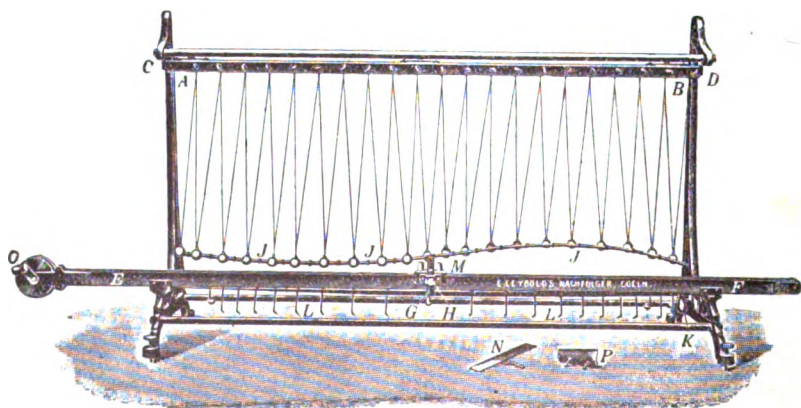
NOVITÀ!

Nuovo pendolo doppio di Righi per la dimostrazione della sovrapposizione di due oscillazioni del pendolo.

Commutatori di corrente ad alto isolamento.

Commutatori di dimostrazione secondo Magri.

Apparecchio idrostatico universale.

Gran Premio dell'Esposizione Universale di Bruxelles nel 1910.

Apparecchio a onde di Mach.

CONTRIBUTO ALLO STUDIO DELL'INFLUENZA DELLO STATO MAGNETICO SOPRA I FENOMENI TERMO-ELETTRICI.

U. BORDONI.

Nel corso di una precedente ricerca [1]), volta a precisare qualitativamente e quantitativamente l'influenza della magnetizzazione longitudinale sulla conduttività termica delle aste di ferro e di acciaio, lo scrivente ebbe campo non solo di constatare (ciò che altri avevano già accertato) come sul comportamento delle coppie termoelettriche comprendenti ferro, acciaio o nichel avesse influenza lo stato magnetico; ma anche di notare come l'andamento del fenomeno non sembrasse, specie per l'acciaio, conforme a ciò che era stato annunciato (Houllevigue). Nacque così l'idea di intraprendere in proposito delle ricerche che valessero a chiarire questi dubbi; i loro risultati principali, qui riportati, furono già comunicati verbalmente ai soci di Roma della Società di Fisica fin dal febbraio u. s.

1. — Di studî relativi a coppie nelle quali entra il ferro, l'acciaio ed il nichel, i corpi ai quali si sono dovute limitare le presenti ricerche, sono a conoscenza dello scrivente quelli di Lord Kelvin [2]), di Strouhal e Barus [3]), di Ewing [4]), di Bachmetjew [5]), di Battelli [6]), di Chassagny [7]) e di Houllevi-

[1]) *Nuovo Cimento*, serie V, vol. XX, settembre 1910.
[2]) W. Thomson. « On the Electrodynamic qualities of metals ».
[3]) *Wied. Ann.*, 14, p. 54, (1881).
[4]) *Trans. R. Soc.*, London, 1886, II, p. 361.
[5]) *Wied. Ann.*, 43, p. 723, (1891).
[6]) *Atti R. Istituto Veneto*, 1893, serie VII, v. 4.° p. 1452 e segg.
[7]) *C. R.*, Parigi, 1893, v. 116, p. 977.

CONTRIBUTO ALLO STUDIO DELL'INFLUENZA DELLO STATO MAGNETICO SOPRA I FENOMENI TERMO-ELETTRICI.

U. BORDONI.

Nel corso di una precedente ricerca [1]), volta a precisare qualitativamente e quantitativamente l'influenza della magnetizzazione longitudinale sulla conduttività termica delle aste di ferro e di acciaio, lo scrivente ebbe campo non solo di constatare (ciò che altri avevano già accertato) come sul comportamento delle coppie termoelettriche comprendenti ferro, acciaio o nichel avesse influenza lo stato magnetico; ma anche di notare come l'andamento del fenomeno non sembrasse, specie per l'acciaio, conforme a ciò che era stato annunciato (Houllevigue). Nacque così l'idea di intraprendere in proposito delle ricerche che valessero a chiarire questi dubbi; i loro risultati principali, qui riportati, furono già comunicati verbalmente ai soci di Roma della Società di Fisica fin dal febbraio u. s.

1. — Di studî relativi a coppie nelle quali entra il ferro, l'acciaio ed il nichel, i corpi ai quali si sono dovute limitare le presenti ricerche, sono a conoscenza dello scrivente quelli di Lord Kelvin [2]), di Strouhal e Barus [3]), di Ewing [4]), di Bachmetjew [5]), di Battelli [6]), di Chassagny [7]) e di Houllevi-

[1]) *Nuovo Cimento*, serie V, vol. XX, settembre 1910.
[2]) W. Thomson. « On the Electrodynamic qualities of metals ».
[3]) *Wied. Ann.*, 14, p. 54, (1881).
[4]) *Trans. R. Soc.*, London, 1886, II, p. 361.
[5]) *Wied. Ann.*, 43, p. 723, (1891).
[6]) *Atti R. Istituto Veneto*, 1893, serie VII, v. 4.° p. 1452 e segg.
[7]) *C. R.*, Parigi, 1893, v. 116, p. 977.

gue [1]; nel quale ultimo lavoro si trova un breve cenno riassuntivo di quasi tutte le ricerche precedenti.

Ora, riguardo al comportamento del ferro, dal complesso dei lavori appare che:

Nelle coppie ferro-rame la magnetizzazione longitudinale del filo o dell'asta di ferro produce, indipendentemente dal suo senso, un aumento di f. e. m.; in altri termini nella scala termoelettrica il ferro magnetizzato è più vicino all'antimonio del ferro non magnetizzato (cioè è *termoelettrico positivo* rispetto quest'ultimo).

Per ciò invece che riguarda l'acciaio, appare dalle esperienze di Houllevigue (le sole che ci siano) che non solo il fenomeno ha entità assai maggiore che nel ferro; ma che l'acciaio magnetizzato è sempre *termoelettrico negativo* rispetto quello non magnetizzato. In certe condizioni, la magnetizzazione produrrebbe nelle coppie acciaio-rame delle diminuzioni di f. e. m. assai maggiori di un centinaio di microvolt.

Ora, intanto, le esperienze di Houllevigue alle quali si riferiscono queste ultime conclusioni sono state fatte, si può dire, per caso. L'Houllevigue credeva difatti (memoria citata p. 526, nota a piè di pagina) di sperimentare sopra del ferro; e fu solo posteriormente alle esperienze ed ai calcoli che immaginò dovesse trattarsi di acciaio per il fatto che il materiale era suscettibile di tempera. Le conclusioni stesse si appoggerebbero dunque sopra esperienze fatte su di un'*unica* qualità di acciaio di cui è ignota sia la composizione (o notizie equivalenti), sia lo stato di crudezza o di ricottura. È sembrato dunque allo scrivente ch'esse non fossero accettabili senz'altro; o, per dir meglio, che *non fossero sufficienti ad individuare il comportamento di un materiale, quale l'acciaio,* di cui si hanno tante varietà diverse; tanto più ch'esse contraddicevano a quanto lo scrivente aveva avuto occasione di osservare a più riprese in occasione di altri studi.

Ma un'osservazione d'indole diversa può farsi a *tutte* le ricerche citate. L'esperienza ha confermato ciò che l'intuizione lasciava facilmente prevedere, cioè che l'entità del fe-

[1] *Ann. de chimie et de physique,* serie VII, vol. 7°, p. 495 (1896).

nomeno magneto-termo-elettrico dipende simultaneamente dalla temperatura dei giunti e dallo stato magnetico dei corpi. La conoscenza completa della forma di questa dipendenza, richiede perciò una doppia serie di esperienze, volte a studiare separatamente l' influenza delle due variabili del fenomeno: ebbene, in tutti i lavori citati, lo stato magnetico del materiale è individuato mediante *il valore del campo magnetico nel quale il corpo è stato immerso.* Ora non occorrono molte parole onde persuadersi che questo modo di individuazione non solo è affatto insufficiente, ma può avere conseguenze impreviste. È difatti noto, che quando in un campo magnetico viene introdotto ad es. del ferro, questo nel magnetizzarsi reagisce sul campo nel senso di diminuirne l'intensità. Sicchè, intanto, *il campo al quale si trova realmente sottoposto il corpo è minore di quello preesistente;* in certi casi, dipendentemente dalle particolarità del circuito magnetico, la differenza può essere addirittura enorme. *Ma ciò che veramente individua lo stato magnetico di un corpo, è l'intensità della sua magnetizzazione;* e questa dipende a sua volta, non solo dal campo *realmente esistente*, ma altresì dalla *permeabilità magnetica* del materiale, notoriamente variabile da un campione all'altro. Per dedurre dunque questa intensità di magnetizzazione, in mancanza di misure dirette, dal valore del campo magnetico preesistente, occorrerebbe conoscere (a prescindere da difficoltà di calcolo pressochè insormontabili) una serie di dati, relativi non solo alle dimensioni degli apparecchi impiegati per la produzione del campo ed alle dimensioni e posizione delle coppie termoelettriche studiate, ma anche alle qualità magnetiche dei vari materiali: dati che mancano quasi del tutto (specie questi ultimi) nelle citate ricerche.

Ma non basta. Dall'ipotesi che lo stato magnetico sia individuato dal valore del campo preesistente, segue che per sperimentare entro limiti molto estesi, sembra sufficiente far variare entro limiti molto estesi questo valore del campo nel quale si introduce il materiale: e questo può non essere sempre esatto. Per riferirci ad un esempio concreto, in uno dei lavori più accurati, quello di Houllevigue, si utilizzava il campo magnetico esistente fra le faccie polari di un grosso

elettromagnete a ferro di cavallo faccie, aventi la forma di quadrati di 13 cm. di lato, parallele, distanti l'una dall'altra cm. 14,5. In mezzo, normalmente alle faccie, si collocava l'elemento ferro od acciaio delle coppie, sotto forma di un filo lungo soli 10 cm. e del diametro di mm. 0,5. Ora prima dell'introduzione della coppia, la reluttanza principalissima del circuito magnetico era costituita evidentemente dall'enorme intraferro di cm. 14,5; con l'introduzione del materiale magnetico si offriva una via facilissima a parte delle linee d'induzione: sicchè anche per i valori più piccoli del campo usati di Houllevigue (13-15 gauss) la magnetizzazione del ferro era già intensa.

Lo stesso procedimento si prestava poi male per la produzione di magnetizzazioni molto energiche, a causa dell'esistenza costante di un intraferro di oltre 4 cm. fra le faccie polari ed il materiale magnetico delle coppie. In sostanza, malgrado il campo fra le faccie polari potesse assumere valori molto diversi, la magnetizzazione delle coppie rimaneva costantemente compresa fra valori non troppo distanti. Lo scrivente ha calcolato approssimativamente che in una delle serie di esperienze di Houllevigue (memoria citata, pag. 522) l'ordine di grandezza dell'intensità di magnetizzazione deve aver variato solo fra 800 e 1400 unità c. g. s.

Un'altra cosa ancora si può osservare. Nella maggior parte delle esperienze, per determinare la posizione relativa nella scala termoelettrica del materiale magnetizzato e del materiale non magnetizzato, non potendo sempre sperimentare direttamente su di una coppia *materiale magnetizzato - materiale non magnetizzato,* si è ricorso generalmente allo studio delle variazioni della f. e. m. di coppie costituite dal materiale magnetico (magnetizzato o no) e da un metallo non magnetico (generalmente il rame). Ora questo modo di procedere, presuppone implicitamente che il metallo non magnetico non abbia alcuna parte nella variazione: supposizione certamente ragionevole, ma da sottoporsi indubbiamente al controllo sperimentale.

Sicchè le ricerche delle quali verrà qui accennata la condotta ed i risultati hanno avuto per intento:

A) Verificare la *non influenza* della natura del materiale non magnetico sull'entità del fenomeno magneto-termo-elettrico.

B) Sperimentare su varie qualità di ferro, di acciaio e di nichel entro limiti di temperatura e di magnetizzazione longitudinale estesi il più possibile, allo scopo di *determinare l'andamento del fenomeno in funzione delle sue vere variabili* (temperature dei giunti della coppia e intensità di magnetizzazione del materiale), individuando in modo più completo che non fosse stato fatto anteriormente, il comportamento dei vari materiali e *specialmente dell'acciaio.*

Metodo ed apparecchi impiegati.

2. — Il dispositivo che ha permesso di sperimentare entro limiti molto estesi di temperatura e di magnetizzazione longitudinale è una opportuna modificazione di quello già usato in altra occasione dallo scrivente [1]).

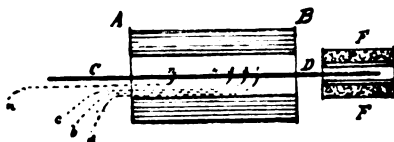



Fig. 1.

Si immagini (fig. 1) una lunga asta CD del materiale da sperimentare, collocata secondo l'asse di un grosso rocchetto magnetizzante AB, ma con l'estremo D impegnato entro un forno elettrico F. Si supponga inoltre di aver praticato nell'asta un certo numero di piccolissimi forellini 1, 2, 3, 4,..... *n* entro i quali penetrino, saldate, le estremità di altrettanti sottili fili metallici (elettricamente isolati appena usciti dai forellini) *a* 1, *b* 2, *c* 3,.... *n n*, di rame ad es. Se si fa funzionare regolarmente il forno F per un tempo abba-

[1]) *N. Cimento*, settembre 1910.

stanza lungo, le temperature delle varie sezioni dell'asta, decrescenti da D verso C, finiscono, sotto certe cautele, col rimanere stazionarie. È allora chiaro che il circuito *n n* 1 *a*, ad es., comprende due giunti termoelettrici (*n* ed 1) a temperatura diversa; sicchè collegando gli estremi *n* ed *a* con un conveniente dispositivo potenziometrico, si potrà misurare la differenza di potenziale dovuta alla differenza delle forze elettromotrici aventi sede nei giunti ferro-rame 1 ed *n*. Se adesso si invia una corrente nel rocchetto magnetizzante, varieranno le f. e. m. dei due giunti a causa dell'esistenza del fenomeno da studiare; ma poichè la sua entità dipende anche dalla temperatura, le variazioni non si equilibreranno e si potrà constatare che la nuova differenza di potenziale è diversa dalla primitiva: la variazione misurata, sarà relativa al valore delle temperature dei due giunti 1 ed *n* ed all'intensità di magnetizzazione dell'asta, nel tratto 1 *n*. Inviando nel rocchetto correnti crescenti (e avendo cura di smagnetizzare le aste fra una esperienza e l'altra), si potrà studiare l'influenza sul fenomeno della sola intensità di magnetizzazione; operando invece con correnti di intensità costante ma riunendo successivamente al dispositivo potenziometrico le coppie di fili *n,a*; *n,b*; *n,c* etc. si potrà studiare la sola influenza della temperatura.

Le intensità di magnetizzazione corrispondenti a diversi valori della corrente magnetizzante andranno determinate direttamente con una conveniente serie di misure eseguite con l'asta calda; le temperature dei giunti risulteranno invece senz'altro dalle misure potenziometriche, una volta che sia stata determinata preventivamente, asta per asta, l'equazione della coppia termoelettrica costituita dall'asta e dal materiale di cui sono fatti i fili *n n*, *a* 1, *b* 2, etc.

Riassumendo, *lo studio di ogni asta* dovrà comprendere le seguenti serie di misure:

a) Misure magnetiche, volte a precisare le intensità di magnetizzazione regnanti nelle varie sezioni dell'asta in corrispondenza ai diversi valori della corrente magnetizzante (§ 6).

b) Determinazione dell'equazione della coppia formata dall'asta e dal materiale costituente i fili *n n*, *a* 1, etc., mediante misure di differenze di potenziale corrispondenti a note differenze di temperatura fra i giunti (§ 7).

c) Misure dell'entità del fenomeno magneto-termo-elettrico in corrispondenza a temperature ed a magnetizzazioni diverse (§§ 3, 4, 5).

Per verificare poi la *non influenza* della natura dei fili *nn*, *a* 1, *b* 2 .... sul fenomeno, basterà ripetere alcune delle serie di misure *c)* con le stesse aste, ma adoperando fili di metalli diversi (non magnetici).

Apparecchio per lo studio del fenomeno magneto-termo-elettrico — Riduzione delle cause d'errore.

3. — Affinchè le variazioni di differenza di potenziale constatabili col procedimento sommariamente descritto abbiano un significato, occorre intanto che sia uniforme quanto più è possibile la magnetizzazione del tratto di asta compreso nel circuito della coppia termoelettrica, cioè del tratto 1 *n* (fig. 1) compreso fra il primo e l'ultimo dei fili metallici: diversamente entrerebbe in giuoco anche una specie di effetto Thomson fra le varie parti diversamente magnetizzate. Inoltre, trattandosi spesso di dover apprezzare con sicurezza delle variazioni dell'entità di una frazione di microvolt, che potrebbero essere mascherate o simulate da minime variazioni di temperatura dei giunti (basterebbero pochi centesimi di grado) occorre disporre le cose in modo, da evitare che queste variazioni di temperatura possano prodursi, almeno nel breve tempo che intercede fra una misura potenziometrica fatta con l'asta allo stato neutro e la corrispondente misura fatta con l'asta magnetizzata. Queste due misure si debbono seguire quanto più rapidamente è possibile, anche per ridurre la causa di errore dovuta alla lieve alterazione, prodottasi in seguito alla magnetizzazione, della conduttività termica dell'asta: ciò che tende evidentemente a variare la distribuzione delle temperature e quindi la forza e. m. delle coppie. È infine neces-

sario che fra una esperienza e l'altra, l'asta possa essere smagnetizzata rapidamente ed in modo sufficientemente completo.

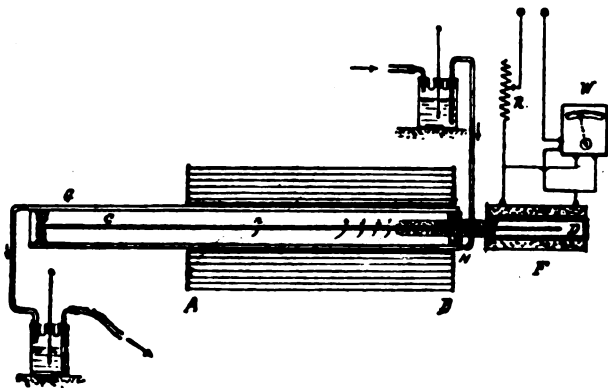



Fig. 2.

La fig. 2 rappresenta l'apparecchio effettivamente adoperato. Il rocchetto magnetizzante AB aveva le costanti:

Lunghezza totale	cm.	62.—
Diametro interno	»	7,2
» esterno	»	17,8
Numero degli strati		16
» delle spire		3242
» medio di spire per cm.		52,3
Diametro del filo di rame	cm.	0,25
Resistenza totale del rocchetto (15°)	ohm.	4,38

Quando le spire erano percorse dalla corrente di 1 ampere, il campo magnetico lungo l'asse del rocchetto aveva, in assenza delle aste, l'andamento illustrato dalla fig. 3, accertato mediante misure dirette (§ 6). E poichè le spire potevano sopportare per qualche minuto anche 30-35 ampere, si poteva disporre di campi prossimi ai 2000 gauss, in corrispondenza ai quali, data la forma allungatissima delle aste, si otteneva la quasi saturazione magnetica. La fig. 3 mostra pure che il campo così ottenuto era pressochè costante per una lunghezza

di oltre 40 cm.; si poteva dunque sperare che in questa zona anche le aste si magnetizzassero con grande uniformità: l'esperienza ha confermato questa previsione (§ 6) mostrando come l'uniformità fosse soddisfacente per un tratto, di lunghezza variabile dai 35 ai 45 cm., più che sufficiente per sperimentare con differenze di temperatura considerevoli.

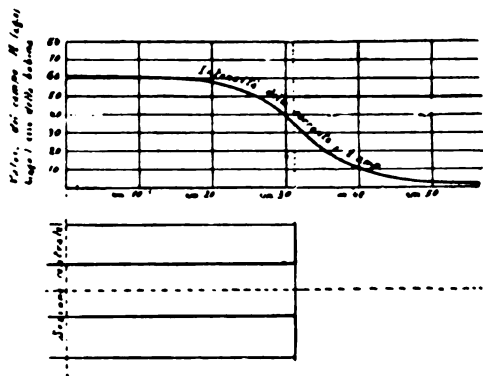



Fig. 3.

Il forno elettrico F era del tipo a resistenza (Heraus), formato da un tubo di porcellana refrattaria (diametro interno cm. 5, lunghezza cm. 30) sul quale erano avvolte 12 spire di un sottilissimo nastro di platino, largo circa 2 cm. Un accurato isolamento termico diminuiva la trasmissione di calore verso l'esterno, sicchè nell'interno del tubo si potevano raggiungere facilmente i 1300°. Per compensare il debole campo magnetico prodotto dalle spire di platino, uno dei fili che portavano la corrente al forno veniva avvolto esternamente sul forno stesso in senso inverso alle spire di platino; l'esperienza aveva mostrato che 18 giri erano sufficienti per la compensazione. Un vattometro di precisione Weston, W, opportunamente inserito, indicava l'energia assorbita dal forno; la quale per mezzo di un reostato R poteva venir mantenuta costante entro il 2 per mille.

Le aste CD del materiale da sperimentare, del diametro di qualche millimetro e della lunghezza di circa m. 1,50, en-

travano nel tubo di porcellana del forno per circa 20 cm. Al di fuori esse venivano fasciate accuratamente con amianto e lana minerale fino al punto nel quale cominciavano i forellini 1, 2, 3....; questo allo scopo di ottenere che fosse ancora alta la temperatura in corrispondenza del 1° forellino malgrado l'inevitabile distanza dal forno (imposta dall'opportunità di praticare i forellini nella zona di magnetizzazione uniforme). In qualche caso di esperienze sopra aste sottili di acciaio o di nichel, non bastando la copertura isolante, si ricorse all'espediente di introdurre la parte D dell'asta (cominciando poco dopo il forellino 1) entro un'altra asta più grossa di rame, forata assialmente (fig. 4) che entrava nel forno per qualche centimetro. Si ottennero così, in corrispondenza del forellino 1, delle temperature anche superiori ai 500°.

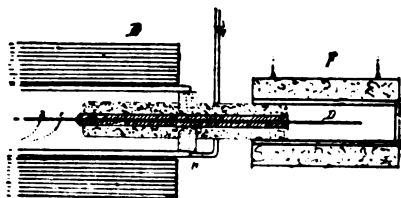



Fig. 4.

I forellini 1, 2, 3.... erano praticati a distanze tali da corrispondere, asta per asta, ad una scala di temperature convenientemente spaziata. L'andamento della temperatura era difatti grossolanamente rappresentabile con l'equazione

$$T = \theta\, e^{-ax}$$

essendo θ e T, rispettivamente, le differenze di temperatura sull'ambiente corrispondenti ad una sezione presa come origine (quella ad es. del forellino 1) e ad un'altra sezione distante di x dalla prima, ed essendo a una costante dipendente dalla natura e dalle dimensioni dell'asta. Ora nelle aste sperimentate il valore numerico di a non scese mai al disotto di 8 (intendendo di esprimere x in metri); sicchè ammesso che

nella sezione 1 l'eccesso di temperatura sull'ambiente fosse di 500°, esso veniva ridotto ad un massimo di circa 20° alla distanza di m. 0,40 (sezione corrispondente al forellino n). Si poteva dunque sperimentare senza difficoltà in corrispondenza a salti di temperatura (fra i due giunti della coppia) di circa 480° (forellino 1) o minori (forellini 2, 3....).

Per fissare i fili $a\,1$, $b\,2$,...., $n\,n$, nei corrispondenti forellini, il loro estremo veniva lavorato a vite e così pure l'interno dei forellini; si riempivano poi questi ultimi di stagno fuso e si avvitavano, a caldo, i fili (preventivamente stagnati) avendo cura di togliere poi accuratamente ogni eccesso di saldatura. I fili venivano dunque tenuti a posto dall'avvitatura e dallo stagno; quest'ultimo, fondendo durante le esperienze nei forellini più caldi, serviva tuttavia ad assicurare il contatto elettrico dei due metalli. Adoperando una filiera da orologiaio si riuscì, tranne che per certe qualità di acciaio, a ridurre il diametro dei forellini (e quindi quello dei fili corrispondenti) a soli 4 decimi di mm.

Ma per ottenere l'indispensabile stazionarietà della temperatura lungo l'asta, non bastava scaldarne un estremo in modo costante; occorreva altresì che l'asta si trovasse in un ambiente termicamente invariabile. A questo scopo l'asta era situata nell'interno di un lungo tubo d'ottone GH a parete doppia (fig. 2) infilato entro il rocchetto AB: nello spazio compreso fra le pareti si faceva circolare dell'acqua a temperatura iniziale costante, che proveniva da un serbatoio della capacità di circa 450 litri, situato nella stessa stanza da esperienze. Le costanti dei tubi erano:

Lunghezza totale comune ai due tubi concentrici	cm.	130,—
Diametro esterno del tubo esterno	»	7,—
Diametro interno del tubo interno	»	5,—
Spessore medio del mantello d'acqua	»	0,95
Capacità del sistema di tubi	circa cm.^{3}	2200,—

L'acqua veniva lasciata nel serbatoio per un paio di giorni, affinchè assumesse una temperatura uniforme (le variazioni diurne di temperatura della stanza, priva di finestre e

ben riparata, erano assai piccole); durante l'esperienza, la cui durata totale raggiungeva le 10-12 ore essa circolava fra i tubi GH: la portata, mantenuta accuratamente costante malgrado le variazioni di livello del serbatoio, variava a seconda della esperienza, fra 8 e 12 cm.^{3} al secondo. Prima e dopo i tubi GH, l'acqua passava per due bottiglie di Woulff a tre tubulature: dei termometri Baudin che pescavano nell' acqua servivano a controllare la costanza delle temperature iniziale e finalė dell' acqua, la cui differenza, a causa dell'elevata temperatura dell' estremo D dell' asta, raggiungeva talvolta qualche grado. L'asta CD veniva dunque a trovarsi in un ambiente a temperatura costante bensì in ogni punto col tempo, ma non uniforme; per lo scopo delle esperienze questo non aveva tuttavia alcuna importanza.

Una prima serie di misure preliminari fu volta a studiare la stazionarietà delle temperature ottenibili con l' apparecchio indicato. Si riconobbe così che occorrevano almeno 8 ore affinchè le variazioni di temperatura dell'asta si rallentassero in guisa da permettere le esperienze; ma che le esperienze dovevano assolutamente esser fatte di notte, per evitare gli effetti delle oscillazioni diurne di tensione della corrente stradale alimentante il forno F; oscillazioni piccole e frequenti che non era possibile correggere completamente con la manovra continua del reostato R. La pratica dimostrò che tali oscillazioni diventavano trascurabili fra l'una e mezza e le quattro del mattino. Nelle prime prove si avvertirono inoltre lente irregolarità, per quanto piccole, nell'andamento della temperatura dell'asta; dopo qualche tentativo esse furono eliminate introducendo ed estraendo l'acqua simultaneamente da varie aperture praticate nelle parti terminali del tubo GH: le cause erano dunque, probabilmente, delle irregolarità di circolazione del mantello d'acqua. Si giunse così a realizzare esperienze ad andamento regolarissimo; ma con tutto ciò, più d'una volta si dovettero interrompere, per il sopraggiungere di irregolarità dovute a cause non precisate, delle serie di misure che sembravano avviate regolarmente.

Ripetute prove dimostrarono poi ampiamente che il mantello d'acqua proteggeva in modo completo le aste, contro il

calore proveniente dalla bobina magnetizzante quando era percorsa da corrente. Del resto la bobina cominciava a scaldarsi in modo apprezzabile solo per correnti superiori a 5-6 amp. mantenute per qualche minuto; e poichè la serie dei valori crescenti opportunamente dell' intensità di magnetizzazione, comprendeva generalmente (§ 6) una sola corrente di intensità maggiore a quel limite, si fece sempre la relativa esperienza per ultimo, in guisa da eliminare anche l'ombra di qualsiasi dubbio di perturbazione.

Magnetizzazione e smagnetizzazione delle aste.

4. — La fig. 5 rappresenta lo schema dei collegamenti elettrici adottati per la magnetizzazione delle aste con correnti di intensità variabile e per la necessaria smagnetizzazione.

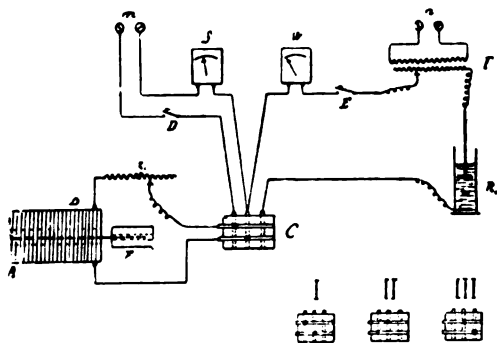



Fig. 5.

La corrente continua necessaria alla magnetizzazione era fornita da una batteria di 60 grandi accumulatori collegati ai morsetti m; essa era indicata da un amperometro Siemens, S, di precisione e poteva essere regolata mediante un grande reostato metallico R_1. Per inviare dunque la corrente nel rocchetto magnetizzante AB bastava, regolato R_1, mettere nel commutatore svizzero C le spine nella posizione I o nella po-

sizione II (posizioni corrispondenti a magnetizzazione delle aste in senso contrario) e chiudere l'interruttore D.

La smagnetizzazione delle aste veniva ottenuta lanciando nel rocchetto AB una corrente alternata regolarmente decrescente. Serviva a tale scopo un trasformatore Siemens, T, da 3 kilowatt, a rapporto di trasformazione variabile quasi con continuità ed un reostato a liquido R_2. Questo circuito a corrente alternata era attaccato al commutatore svizzero C nel modo indicato in figura; sicchè per smagnetizzare l'asta bastava mettere le spine nella posizione III, chiudere l'interruttore E e far decrescere la corrente alternante partendo dal suo valore massimo che era, nelle condizioni realizzate, di circa 15 ampere.

Alcune prove preliminari (col metodo del § 6) mostrarono che se il decrescimento della corrente alternante aveva la durata di circa mezzo minuto, l'intensità di magnetizzazione residua nell'asta era di qualche unità c. g. s.; per lo scopo di queste ricerche la smagnetizzazione poteva dunque ritenersi sufficiente.

Dispositivo potenziometrico — Misura rapida dell'entità del fenomeno magneto-termo-elettrico — Sensibilità ottenuta — Correzioni e precauzioni.

5. — Per misurare in modo *rapido* ma *preciso* la variazione di f. e. m., della coppia, dovuta alla magnetizzazione dell'asta, il procedimento migliore parve quello di far uso del dispositivo potenziometrico chiaramente indicato nella fig. 6. I relativi apparecchi erano situati in una stanza diversa da quella dell'apparecchio di cui la fig. 5, a distanza tale che il *galvanometro non fosse influenzato dalla bobina* AB. Manovrando la spira di un commutatore svizzero C i fili *a, n*; *b, n*; *c, n* delle varie coppie termoelettriche comprendenti l'asta e corrispondenti a differenze di temperature diverse, potevano essere collegati successivamente ai pozzetti 3, 4 del commutatore K (a pozzetti di mercurio).

Riunendo 1 con 3 e 2 con 4 si metteva in opposizione, attraverso un galvanometro G, la f. e. m. della coppia ter-

moelettrica con la differenza di potenziale esistente fra i punti A, B, spostabili, di un circuito alimentato da una pila costante P (una Daniell-Raoult costituita da due recipienti collegati da un tubo ad U capovolto).

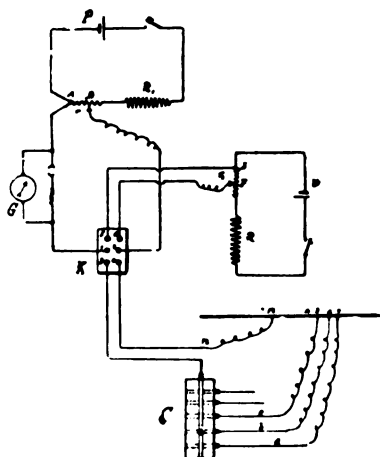



Fig. 6.

Riunendo invece i pozzetti 1 e 5, 2 e 6 si metteva in opposizione la differenza di potenziale esistente fra A e B con quella esistente fra E ed F, dovuta ad un elemento campione Weston la cui f. e. m. era:

$$e = 1{,}01890 + 0{,}000005\,(t - 20^0)\,.$$

È chiaro che mediante tre confronti preliminari fra le pile P e W, eseguiti variando convenientemente le resistenze note r_1, R_1, r_2, R_2, si potevano calcolare le tre costanti incognite dei due elementi: resistenza interna del Weston, f. e. m. e resistenza interna del Daniell-Raoult; sicchè si poteva dedurne con esattezza la differenza di potenziale esistente fra A e B in corrispondenza ad ogni valore di r_1.

Si procedeva allora come segue: Situata la spina del commutatore C in guisa da includere ad es. la coppia *n n* 1 *a* e collegati i pozzetti 1-3; 2-4, si equilibrava, variando r_1, la

f. e. m. della coppia (con l'asta *non magnetizzata*). Dalla lettura di r_1 si poteva intanto dedurre la f. e. m. e quindi *la differenza di temperatura* fra i giunti n ed 1.

Fatta anche la lettura al galvanometro, si lanciava la corrente magnetizzante nel rocchetto A B (fig. 2, 5) e si tornava a leggere al galvanometro; la differenza fra le due letture era dovuta appunto alla variazione di f. e. m. della coppia causata dalla magnetizzazione dell'asta. Da questa differenza, nota la costante del galvanometro e le resistenze delle varie parti del circuito, si deduceva immediatamente la variazione di f. e. m. in microvolt; il *segno* della differenza indicava naturalmente il *senso* della variazione.

Questo procedimento risultò preferibile all'altro di equilibrare nuovamente la f. e. m. della coppia dando ad r_1 un conveniente valore r'_1 e di dedurre la variazione di f. e. m. dalla differenza $r'_1 - r_1$, a causa del tempo molto minore che richiedeva.

Riducendo difatti al minimo il tempo intercedente fra le due letture al galvanometro (in pratica non occorreva più di 30 secondi) si otteneva di ridurre pressochè nulla l'influenza della variazione di conduttività termica dell'asta e quella delle variazioni di temperatura delle varie parti del circuito che avessero potuto occasionalmente prodursi malgrado le precauzioni prese in proposito.

Si tenne però accuratamente conto della lentissima e regolare variazione di stato termico dell'asta la quale andava avvicinandosi asintoticamente allo stato di regime. A tale scopo bastava, una volta fatta la prima lettura al galvanometro (asta non magnetizzata) seguire il lentissimo spostarsi della scala e fare una seconda lettura dopo un tempo determinato, 30 secondi ad es.; magnetizzare subito l'asta e fare una terza lettura dopo altri 30 secondi dalla 2ª lettura; finalmente fare una 4ª lettura dopo altri 30 secondi. La media fra le differenze tra la 1ª e 2ª e la 3ª e 4ª lettura, era evidentemente la correzione da portare (col suo segno) alla differenza fra la 2ª e la 3ª lettura, individuante l'entità del fenomeno magneto-termoelettrico. Naturalmente le misure erano considerate come concludenti solo quando la correzione

risultava relativamente piccola. Se sussisteva qualche dubbio sul valore della variazione, si smagnetizzava l' asta col procedimento descritto; si attendeva finchè l' andamento dello stato termico dell' asta, lievemente turbato dal calore svoltosi per isteresi e per correnti vorticose durante la smagnetizzazione, fosse tornato regolare (il galvanometro mostrava che era sufficiente attendere dai 10 ai 15 minuti) e si ripeteva la misura.

Come galvanometro si adoperò prima un Siemens-Halske astatico, con magneti a campana; con i quattro rocchetti in parallelo aveva una resistenza di 378,2 ohm a 15° e le deviazioni di una parte (scala a m. 1,50) indicava, nelle condizioni nelle quali era montato, il passaggio di una corrente di $3,62 . 10^{-10}$ ampere nel circuito esterno del galvanometro.

Ora poichè si regolava la resistenza R_1 (fig. 6) in guisa che per equilibrare la f. e. m. delle varie coppie occorresse dare ad r_1 valori vicini alla resistenza del galvanometro, la resistenza totale del circuito, comprendente: *galvanometro resist.* r_1, *coppie termoelettrica, e fili di connessione* si manteneva sempre prossima ai 700 ohm; e quindi la deviazione di una parte, corrispondeva ad una variazione di f. e. m. della coppia prossima sempre a:

$$700 \times 3,62 \times 10^{-10} = 0,25 \text{ microvolt}$$

e calcolabile esattamente volta per volta.

Adoperando il galvanometro di notte, come già è stato accennato a proposito del forno elettrico (§ 3), nel qual caso il suo equipaggio mobile non era più turbato dalle correnti tramviarie della città, era facile apprezzare esattamente $^1/_5$ di parte, cioè determinare le variazioni di f. e. m. delle coppie a meno di $\frac{1}{20}$ di microvolt.

Successivamente però, si impiegò un galvanometro tipo Deprez-D' Arsonval che fu trasformato in laboratorio in microgalvanometro.

Si cominciò col sostituire la bobina mobile con un' altra fatta con filo di rame da mm. 0,2 dimensionata in modo che l' intraferro non fosse troppo grande. Mediante corte sospen-

sioni in nastrino di bronzo (larghezza mm. 0,2, spessore mm. 0,01) si ottenne, senza aumentare troppo la durata d'oscillazione, che la deviazione di una parte (scala a m. 1,50) corrispondesse ad una corrente di 5.10^{-9} ampere. La bobina aveva una resistenza (a 15°) di ohm 59,3; la resistenza r_1 si manteneva intorno ai 40 ohm (variando convenientemente R_1), sicchè la resistenza totale del circuito del galvanometro era vicina ai 100 ohm; e la deviazione di una parte corrispondeva ad una variazione di f. e. m. di circa:

$$100 \times 5 \times 10^{-9} = 0,50 \text{ microvolt.}$$

La sensibilità sarebbe stata dunque minore di quella ottenibile col Siemens senza un artificio che riuscì completamente, suggerito dalla grande stabilità della posizione di riposo del galvanometro. Si sostituì cioè lo specchietto piano collegato all'equipaggio mobile con uno specchio sferico; e si fece cadere l'immagine di un filo sottile (nero in campo luminoso), riflessa dallo specchio, sopra una speciale scala trasparente su vetro, situata a m. 1,50 ed ottenuta fotografando con la *riduzione ad* $\frac{1}{5}$ una ordinaria scala millimetrata e stampando la negativa su una lastra fotografica da diapositive.

Osservando questa scala, a divisioni così vicine, e l'immagine del filamento con una specie di microscopio a debole ingrandimento (una diecina di diametri), si potè constatare come la stabilità delle posizioni dell'equipaggio mobile fosse ancora soddisfacentissima [1]), analoga a quella del Siemens adoperato di notte.

Buonissime erano pure le divisioni della scala (cioè molto sottili ma ben visibili) ottenute per riproduzione fotografica; si incontrò invece qualche difficoltà per ridurre sufficientemente sottile, ma distinta, l'immagine del filo che serviva di indice. Siccome i fili metallici, anche del diametro di 5 cen-

[1]) Per evitare quelle vibrazioni della bobina mobile, intorno ad un asse orizzontale, che spesso disturbano le letture, è sufficiente *centrare bene* le sospensioni.

tesimi di millimetro, davano immagini troppo larghe, dopo aver provato dei fili di vetro, di seta, di ragno ed anche delle righe tracciate col diamante su di una lastrina di vetro, si riconobbe che dal duplice punto di vista della sottigliezza e della visibilità era preferibile l'impiego di fili sottilissimi della così detta *composizione Chatterton*, ottenuti col procedimento di cui in una nota che segue la presente memoria. Si ottenne così un ottimo microgalvanometro, adoperabile occorrendo anche di giorno, di sensibilità nettamente quintupla di quella già accennata; l'apprezzamento del quinto di parte corrispondeva perciò all'apprezzamento di circa $\frac{1}{50}$ di microvolt; nelle condizioni nelle quali era adoperato occorrevano però circa 25 secondi perchè la deviazione dell'equipaggio mobile fosse praticamente completa. La costante del microgalvanometro rimase realmente costante solo dopo qualche giorno dal montaggio, in causa probabilmente del lento assestamento delle sospensioni.

Per evitare possibili f. e. m. occasionali aventi sede nei vari giunti del circuito del galvanometro e capaci di turbare l'esattezza delle misure, si fece in modo che questi giunti fossero a due a due vicini e disposti in modo che l'identica variazione di temperatura desse origine a f. e. m. eguali e di senso opposto; si ritenne perciò sufficiente fasciarli con lana e curare che nella stanza non avvenissero variazioni rapide di temperatura.

Per il commutatore k al quale questa precauzione non era applicabile, si rimediò collocandolo entro una adatta scatola di cartone semi-chiusa e manovrando i ponticelli di comunicazione con una pinza di legno.

Misure magnetiche — Grado di uniformità delle magnetizzazioni ottenute.

6. — Le misure dell'intensità di magnetizzazione nelle varie sezioni di ogni asta furono fatte col metodo del galvanometro balistico invertendo la corrente magnetizzante, con

le aste calde come nelle esperienze di cui nei § 3 e 4. La bobina indotta, capace di essere tenuta per qualche diecina di secondi anche in punti dell' asta a temperatura superiore ai 500° senza soffrirne troppo, fu fatta (fig. 7) con una specie di rocchetto di mica ed amianto, a parete doppia (spessore del mantello d' aria esistente fra i tubi concentrici di mica: circa ³/₄ di mm.).

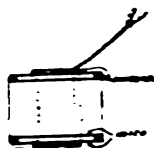



Fig. 7.

Le eliche di filo di rame rivestito in seta erano abbondantemente paraffinate allo scopo di rallentarne (a causa della massa maggiore e del calore occorrente alla fusione della paraffina) il riscaldamento. Di queste bobine indotte se ne fecero tre (diametri interni rispettivamente mm. 3.5; mm. 7; mm. 11: numero di giri del filo di rame da mm. 0.1 rispettivamente 705; 302; 213) allo scopo di adattarle ai diversi diametri delle aste sperimentate.

Fig. 8.

In serie col galvanometro balistico, del tipo Deprez D'Arsonval, di notevole sensibilità (1 parte della scala corrispondeva al passaggio di 3×10^{-9} coulomb), e con la bobina indotta, potevano essere messi, a seconda del bisogno, da 25000 a 200000 ohm, in guisa da permettere una misura molto approssimata del flusso Φ attraversante la bobina indotta, quale che ne fosse l'entità. Da questo flusso si deduceva l'intensità di magnetizzazione I per mezzo dell'equazione:

$$\Phi = H S' + 4 \pi I S$$

essendo S la sezione dell'asta, S' quella media della bobina indotta ed essendo H il campo magnetico esistente in quel punto *prima* dell'introduzione dell'asta (deducibile dalla fig. 3 nota la corrente magnetizzante). La sostituzione, *in questo caso,* del campo realmente esistente col campo preesistente, era ampiamente giustificata dalla piccolezza relativa del termine H S' il quale superò molto raramente l'1 % di Φ.

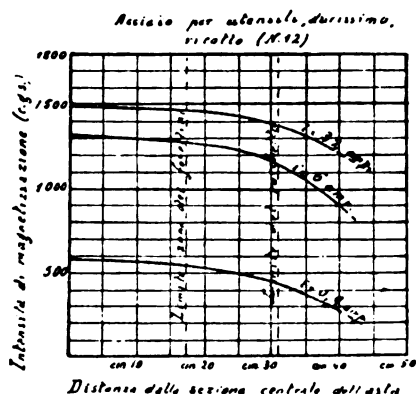



Fig. 9.

In base ai risultati di queste misure si determinò, asta per asta, quale doveva essere la serie dei valori della corrente magnetizzante corrispondenti ad intensità di magnetizzazione convenientemente spaziate. Così per una delle aste, di

ferro, quella che verrà indicata in seguito col n°. 1, si adoperò la scala di correnti:

amp. 0,020; 0,040; 0,070; 0,14; 0,7; 4,—; 32—;

corrispondente ad intensità di magnetizzazione, della zona centrale dell' asta, prossime rispettivamente a:

250; 500; 750; 1000; 1250; 1400 e 1600 unità c. g. s.

Allo scopo di dare un'idea concreta del grado soddisfacente di uniformità di magnetizzazione raggiunta nella parte centrale dell' asta, quella che faceva parte delle coppie termoelettriche, si riportano qui nelle figure 8, 9 e 10, metà delle curve di magnetizzazione relative ad un' asta di ferro, una di acciaio duro ed un' altra di nichel.

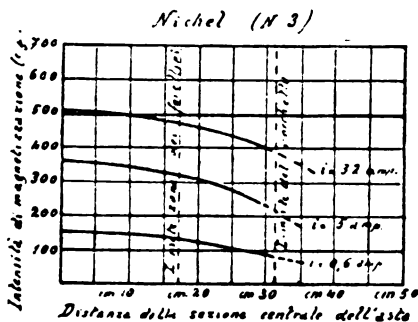



Fig. 10.

Equazione delle coppie termoelettriche — Loro determinazione.

7. — La determinazione dell'equazione delle singole coppie formate da un filo di rame (o di altro metallo non magnetico) e da ognuna delle aste, era necessaria al duplice scopo di poter poi dedurre senz' altro (§ 5) da una misura potenziometrica le differenze di temperatura fra i giunti praticati nelle aste in corrispondenza ai forellini e di individuare termoelettricamente il materiale delle aste.

A tale scopo, un estremo A delle aste (fig. 11), saldato ad un filo *a* dell' altro metallo, rame ad es., penetrava per alcuni cm. entro una cavità praticata entro un recipiente B di lamiera di zinco, contenente circa 4 litri di acqua e avvolto esternamente con flanella. Un termometro a mercurio T_1 indicava la temperatura dell' acqua che si riteneva eguale a quello della giuntura termoelettrica A. Dall' altra parte dell' asta si praticava, a circa 4 cm. dall' estremo, un forte assottigliamento per circa 2 cm.; alla parte rimasta grossa C si attaccava l' altro filo *b* per mezzo di un morsetto a vite, dello stesso metallo, che veniva anche saldato all'asta, e lo si introduceva nell' interno del forno elettrico F (di cui nella fig. 2 e nel § 3) in mezzo ai serbatoi di due termometri a mercurio T_2, T_3.

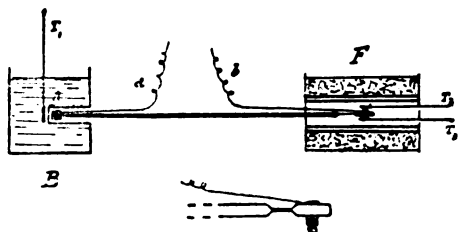



Fig. 11.

Per le temperature più elevate si usò un termometro Baudin ed un Siebert e Kuhn capaci tutti e due di giungere sino a 550°; per temperature più basse due altre coppie di Siebert e Kuhn giungenti rispettivamente a 350° ed a 150°. Il cambio dei termometri, tutti paragonati fra di loro (i confronti furono ripetuti varie volte nel corso delle misure) aveva lo scopo di evitare che rimanesse fuori del forno una parte notevole della colonna di mercurio. Le misure furono riferite tutte alle indicazioni del Baudin 0° — 550°.

L'assottigliamento parziale dell'asta diminuiva assai l'effetto raffreddante della parte residua e permetteva di ottenere così, date anche le dimensioni interne del forno (lunghezza cm. 30, diametro cm. 5), un riscaldamento uniforme dell' e-

stremo al quale era saldato il filo. Dato perciò che i due bulbi dei termometri e l'estremo dell'asta erano avvolti insieme con rete metallica, si poteva ritenere che la temperatura della giuntura fosse, con approssimazione bastevole per gli scopi della presente ricerca, eguale alla media delle indicazioni (sempre molto prossime) dei due termometri. La lunghezza delle aste, intorno a m. 1,50, rendeva inutile preoccuparsi dell'effetto che poteva avere il calore propagantesi da C verso A, sulla temperatura del giunto A situato in un ambiente a temperatura costante.

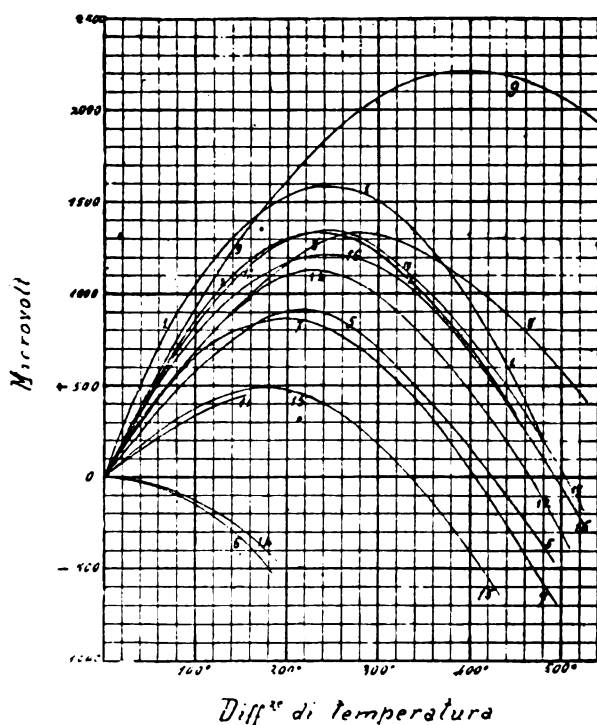



Fig. 12.

Anzichè però tentare la rappresentazione analitica precisa delle equazioni delle coppie, per differenze di temperatura comprese fra 0° e 500° circa, si ritenne più conveniente la

rappresentazione grafica (fig. 12, relativa a coppie rame-ferro e rame-acciaio; fig. 13, per coppie rame-nichel) qui riportata. I numeri delle curve si riferiscono ai numeri d'ordine delle aste: si vedano in proposito i paragrafi 9, 10, 11.

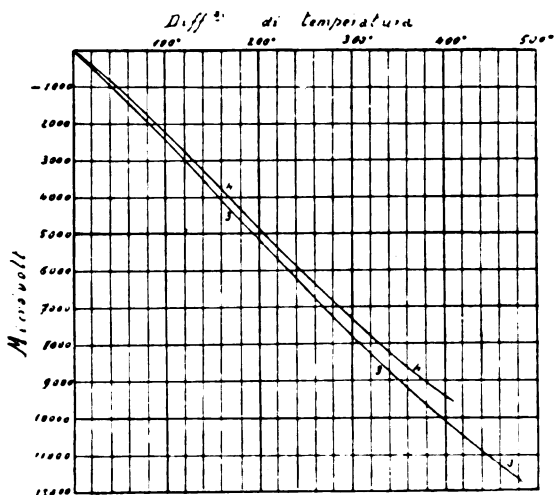



Fig. 13.

Una osservazione può farsi fin d'ora: che cioè le coppie rame-acciaio temperato (curve 6; 14) danno origine a forze elettromotrici di senso contrario a quelle che si verificherebbero, a parità di condizioni, in coppie rame-ferro o rame-acciaio non temperato. Questo andamento è stato messo fuori dubbio da ripetute misure estese fino a 180° — 190°; non si è andati oltre perchè l'acciaio si stempera. Su questa e su di un interessante fenomeno di *isteresi termoelettrica apparente* che presentano in certe circostanze le coppie rame-acciaio temperato, tornerà fra breve lo scrivente che sta effettuando in proposito alcune ricerche.

Il segno — relativo alle f. e. m. delle coppie Cu-Ni sta semplicemente ad indicare che, come è ben noto, il ferro ed il nichel si trovano nella scala termoelettrica, da parti opposte del rame: cioè che il ferro è termoelettrico positivo rispetto al rame come il rame lo è rispetto il nichel.

Risultati delle esperienze.

Con gli apparecchi ed i procedimenti descritti sono state studiate 30 aste diverse: 6 di ferro, 18 di acciaio e 6 di nichel.

In generale si cominciava col determinare l'equazione delle coppie *materiale da studiare — rame*; poi le curve di magnetizzazione; quindi si facevano le esperienze relative al fenomeno magneto-termoelettrico propriamente detto. Per queste ultime il riscaldamento dell'asta si cominciava verso le 4 del pomeriggio; le misure cominciavano verso l'una dopo mezzanotte. Si preferiva determinare le variazioni di forza elettromotrice prodotte da una medesima magnetizzazione, la più debole, su tutte le coppie corrispondenti ai vari forellini dell'asta, smagnetizzando l'asta, s'intende, fra una misura e l'altra; poi determinare la nuova serie di variazioni per una magnetizzazione più intensa, e così via.

È bene aggiungere che le misure potenziometriche con le aste non magnetizzate facevano bensì conoscere l'entità della differenza di temperatura fra il giunto più freddo (n) e i vari giunti 1, 2, 3.... successivamente studiati, ma non le temperature separate. A questo si rimediava determinando separatamente la temperatura del punto (n) per mezzo di una pinza termoelettrica costituita da un paio di mollette di rame crudo e di argentana che poteva venir collegata, in luogo delle altre coppie, ai pozzetti 3 e 4 del commutatore K (fig. 6).

A causa del tempo occorrente sia per le misure preliminari e di controllo, sia per quelle sulle numerose aste studiate, le esperienze si protrassero per oltre sei mesi. Se ne riportano qui i risultati.

Indipendenza del fenomeno magneto-termo-elettrico dalla natura del materiale non magnetico entrante nelle coppie e dal senso della magnetizzazione.

8. — Per chiarire questi due punti si ripetettero più volte le stesse serie di misure sopra alcune aste variando sia il senso della magnetizzazione (col commutatore C, fig. 5)

sia il metallo formante i fili *a, b, c..n* (fig. 1 e 2). Si usarono fili di rame, di argentana, di manganina e di zinco.

Nel limite delle esperienze effettuate (per la magnetizzazione si giunse quasi alla saturazione; le differenze di temperatura superarono talvolta i 500°), *il senso e l'entità delle variazioni di f. e. m. delle coppie risultarono del tutto indipendenti dal senso della magnetizzazione delle aste (longitudinale) e dalla natura dell' altro metallo costituente la coppia.*

Andamento del fenomeno nel ferro.

9. — Le esperienze hanno dato risultati concordanti, almeno qualitativamente, con quelli degli altri sperimentatori; essi sono riassunti nel modo più espressivo dalle curve delle figure 14, 15, 16, relative al comportamento di due delle più caratteristiche delle 6 aste di ferro sperimentate, quelle N. 1 e N. 2. La N. 1 era di ferro di Svezia eccezionalmente puro e dolce, accuratamente ricotto, diametro 6 mm.; l' altra era un tondino di ferro commerciale del diametro di 5 mm., della qualità che viene venduta a matasse, non ricotto. Nella fig. 12 le due curve 1, 2 sono relative appunto al comportamento delle due coppie relative ferro-rame.

In questi diagrammi (fig. 14, 15, 16) *ed in tutti quelli analoghi dei paragrafi seguenti, le ordinate sono sempre le variazioni di f. e. m. delle coppie materiale studiato-rame: le ascisse sono o l' intensità di magnetizzazione o la differenza di temperature fra le giunture delle coppie; in corrispondenza le curve sono relative a differenze di temperatura mantenute costanti (e quindi mostrano l' effetto di magnetizzazioni crescenti) od a magnetizzazioni costanti (e quindi mostrano l' effetto dell'accrescimento della differenza di temperatura fra i giunti). Le variazioni di f. e. m. sono considerate come positive quando indicano che il materiale magnetizzato è termoelettrico positivo* [1]) *rispetto quello non magnetizzato; negative in caso contrario.*

[1]) Cioè quando nella scala termoelettrica è più vicino all' antimonio.

[illegible] dalla [illegible] crescenti [illegible] decresce [illegible] differenze [illegible] tutte

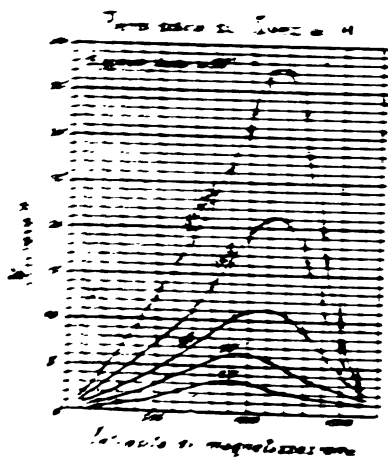



Fig. 14.

le aste: ha variato solo la posizione del massimo (nell'asta N. 2 si è verificato, fig. 16, per $I = 1250$ c. g. s.) e la forma delle curve. In tutte le curve $\Delta T =$ costante (fig. 14 e 16) si è notato il fatto della piccola influenza di deboli magnetizzazioni e del successivo rapido accrescimento seguito, al di là del massimo, da una vera caduta: in nessuna però la cosa è stata così netta come nell'asta N. 2.

Quanto poi, sempre nelle curve $\Delta T =$ costante, alla posizione del massimo corrispondente a diversi valori di ΔT, si è potuto notare che nei ferri molto puri e ricotti (come l'asta N. 1) il massimo tende a spostarsi verso magnetizzazioni crescenti col crescere di ΔT (nella fig. 14, quando da $\Delta T = 25°$ si passa a $\Delta T = 390°$, il valore di I corrispondente al massimo passa da 900 a 1150 unità c. g. s.); la tendenza è sempre meno marcata per qualità meno pure e può anche rovesciarsi sen-

sibilmente come mostra la fig. 16. Nè è da credere che questa diversità di andamento possa imputarsi a dubbiezze di misura; poichè si è constatato che continuando ad aumentare le impurità del ferro, passando cioè alla categoria *acciaio dolce, acciaio duro* e così via, aumenta progressivamente l'entità dello spostamento del massimo, ma appunto nel senso indicato dalla fig. 16 (§ 10).

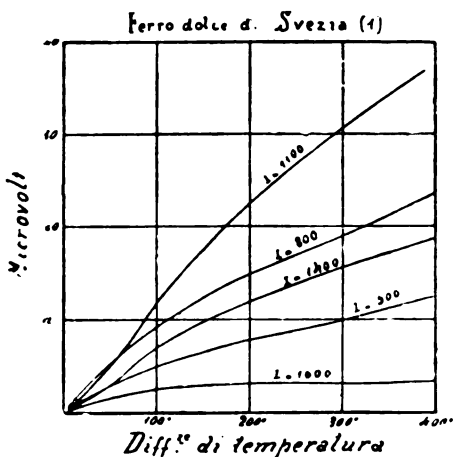
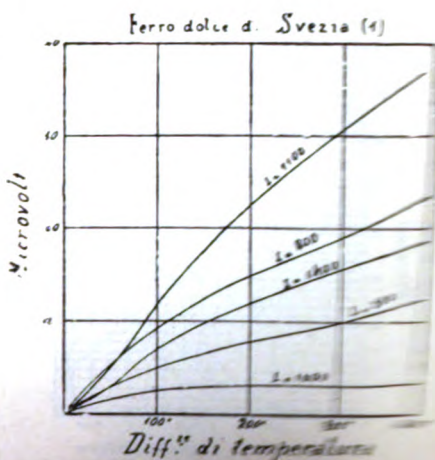



Fig. 15.

Potrebbe poi credersi, dall' esame della fig. 14, che l' influenza della magnetizzazione tendesse ad annullarsi precisamente in corrispondenza alla saturazione. Ora che questo avvenga *sempre,* per qualità di ferro più o meno puro (ed anche per gli acciai, § 10) è intanto *da escludere* assolutamente come mostra sia ad es. la fig. 16 sia altre curve qui non riportate per brevità. Ma risulta pochissimo probabile anche dalla fig. 14, se si osserva specialmente l' andamento delle curve corrispondenti a piccole differenze di temperatura; in esse, e nelle analoghe della fig. 16, non v' è alcuna tendenza ad incontrare l' asse delle ascisse in corrispondenza alla saturazione che ha luogo per il ferro dolce in prossimità di $I = 1675$ unità c. g. s.; e non è inutile osservare che le ultime serie di misure sono state fatte con $I = 1610$ u. c. g. s. circa.

È più verosimile, come risulta dallo studio dell' acciaio, che l' effetto della magnetizzazione tenda semplicemente ad annullarsi e forse a cambiare di segno col crescere di essa ; ma che nel ferro dolce la saturazione magnetica venga, per così dire, a fermare l'andamento del fenomeno. Riesce in proposito molto istruttivo il confronto delle fig. 14, 15, 16 con quelle analoghe relative all' acciaio (§ 10).

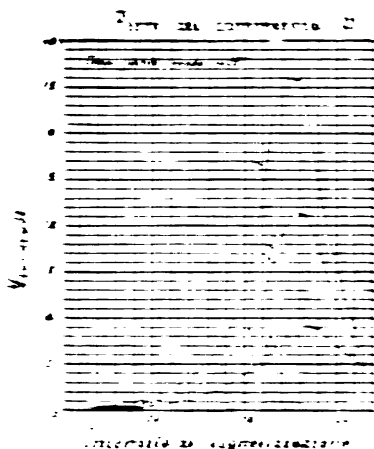



Fig. 16.

Sulla fig. 15 e su quella analoga ricavabile dalla 16 potrebbero farsi considerazioni equivalenti a quelle già esposte.

Le conclusioni principali sono dunque che :

1) Nelle coppie ferro-rame la f. e. m. cresce magnetizzando longitudinalmente il ferro ; il ferro magnetizzato è perciò termoelettrico positivo rispetto il ferro non magnetizzato. L' entità della variazione cresce sempre, a parità di magnetizzazione, col crescere della differenza di temperatura fra le giunture ; invece a parità di diff. di temp., la variazione cresce con l' intensità di magnetizzazione prima lentamente, poi più rapidamente fino ad un massimo (per I vicino a 1200 u. c. g. s.), al di là del quale l' entità della variazione diminuisce tanto più presto quanto maggiore è la differenza di temperatura fra le giunture.

Queste conclusioni valgono per diff. di temperatura fino ai 400° e per intensità di magnetizzazione fino alle 1630 unità c. g. s.

Andamento del fenomeno nell' acciaio.

10. — I risultati delle esperienze eseguite sopra 18 aste, *nettamente diversi da quelli ottenuti da Houllevigue,* dimostrano come il comportamento dell'acciaio si riattacchi a quello del ferro.

Per brevità si riproducono qui i diagrammi relativi alle sole aste seguenti, scelte fra le più caratteristiche.

Fig. 17.

Asta N. 5 — Acciaio semi-duro da utensili (Jackson e Co.), ricotto — fig. 17.
» N. 16 — » da molle, ricotto — fig. 18
» N. 17 — » » » crudo — » 23
» N. 6 — » » » temperato — » 24
» N. 7 — » pianoforte in matasse, ricotto — fig. 19
» N. 12 — » durissimo, ricotto — fig. 20
» N. 14 — » » , temperato — » 25
» N. 8 — » diamante (Allevard) ricotto — fig. 21
» N. 9 — » » (») crudo — » 26
» N. 11 — » » (») temp. (?) — » 27
» N. 15 — » speciale duriss. (Creusot), ricotto — » 22

Per questi diagrammi valgono le stesse spiegazioni e convenzioni fatte per il ferro (§ 9, in principio): si veda inoltre la fig. 12 per il comportamento termoelettrico di queste aste.

Fig. 18.

Nell'esaminare i risultati delle esperienze, occorre intanto tener presente che un medesimo acciaio può presentarsi in diversi stati; se ne possono generalmente distinguere tre, *necessariamente poco definiti.*

a) acciaio ricotto
b) » crudo
c) » temperato

Fig. 19.

Particolarmente istruttivo è l'esame ed il confronto dei diagrammi fig. 17, 18, 19, 20, 21, 22 relativi tutti ad acciaio

accuratamente ricotto, ma di qualità differente, e di comportamento meccanico sempre più diverso da quello del ferro.

Fig. 20.

Il primo, fig. 17, potrebbe quasi scambiarsi per un diagramma relativo al ferro (vedere fig. 14 e 16) se non fosse l'entità minore, a parità di circostanze, del fenomeno, il quale *ha però lo stesso segno,* e lo spostamento molto più marcato del massimo in corrispondenza a differenze crescenti di temperatura: spostamento il cui senso, comune a tutte le qualità di acciaio, è quello stesso riscontrato nel ferro commerciale; sicchè rimane giustificato quanto a questo proposito è stato detto nel § precedente.

Nei diagrammi figg. 18, 19 e 20 (acciai contenenti solo carbonio e traccie di silicio) l'entità e l'andamento del fenomeno sono poco diverse; ma lo spostamento dei massimi è sempre più notevole; e l'aver potuto spingere un pò più oltre la differenza di temperatura, ha permesso di constatare con grande evidenza che l'entità del fenomeno può, a parità di magnetizzazione, diminuire col crescere della differenza di temperatura fra le giunture. Così nel caso della fig. 20 e delle differenze di temperatura di 310° e di 450°, si vede che per magnetizzazioni inferiori alle 1000 unità c. g. s. il fenomeno ha avuto entità maggiore per la 2ª coppia; al disopra delle 1000 unità c. g. s. è accaduto nettamente il contrario.

Il confronto delle fig. 14 e 15 (la fig. 15 è ricavata dalla 14) mostra che mentre l'effetto di magnetizzazioni crescenti diventa massimo per I = 1150 c. g. s. circa e poi decresce rapidamente col crescere di I, niente di simile si può dire dell'effetto (a parità di I) dell'accrescimento delle differenze di temperatura fra le giunture. Questo si è verificato in tutte

Fig. 14.

le aste; ha variato solo la posizione del massimo (nell' asta N. 2 si è verificato, fig. 16, per I = 1250 c. g. s.), e la forma delle curve. In tutte le curve Δ T = costante (fig. 14 e 16) si è notato il fatto della piccola influenza di deboli magnetizzazioni e del successivo rapido accrescimento seguito, al di là del massimo, da una vera caduta; in nessuna però la cosa è stata così netta come nell' asta N. 2.

Quanto poi, sempre nelle curve Δ T = costante, alla p[illegible]
zione del massimo corrispondente a diversi valori di Δ T [illegible]
tuto notare che nei ferri molto puri e ricotti (come l'[illegible]
massimo tende a spostarsi verso magnetizzazioni [illegible]
crescere di Δ T (nella fig. 14, quando da Δ T [illegible]
a Δ T = 390°, il valore di I corrispondente [illegible]
sano da 900 a 1150 unità c. g. s.); la tenden[illegible]
marcata per qualità meno pure e può anche [illegible]

Queste conclusioni valgono per diff. di temperatura fino ai 400° e per intensità di magnetizzazione fino alle 1630 unità c. g. s.

Andamento del fenomeno nell' acciaio.

10. — I risultati delle esperienze eseguite sopra 18 aste, *nettamente diversi da quelli ottenuti da Houllevigue*, dimostrano come il comportamento dell'acciaio si riattacchi a quello del ferro.

Per brevità si riproducono qui i diagrammi relativi alle sole aste seguenti, scelte fra le più caratteristiche.

Fig. 17.

Asta	N. 5 —	Acciaio semi-duro da utensili (Jackson e Co.), ricotto	— fig. 17.
»	N. 16 —	» da molle, ricotto	— fig. 18
»	N. 17 —	» » » crudo	— » 23
»	N. 6 —	» » » temperato	— » 24
»	N. 7 —	» pianoforte in matasse, ricotto	— fig. 19
»	N. 12 —	» durissimo, ricotto	— fig. 20
»	N. 14 —	» » , temperato	— » 25
»	N. 8 —	» diamante (Allevard) ricotto	— fig. 21
»	N. 9 —	» » (») crudo	— » 26
»	N. 11 —	» » (») temp. (?)	— » 27
»	N. 15 —	» speciale duriss. (Creusot), ricotto	— » 22

Per questi diagrammi valgono le stesse spiegazioni e convenzioni fatte per il ferro (§ 9, in principio); si veda inoltre la fig. 12 per il comportamento termoelettrico di queste aste.

Fig. 18.

Nell'esaminare i risultati delle esperienze, occorre intanto tener presente che un medesimo acciaio può presentarsi in diversi stati; se ne possono generalmente distinguere tre, *necessariamente poco definiti.*

a) acciaio ricotto
b) » crudo
c) » temperato

Fig. 19.

Particolarmente istruttivo è l'esame ed il confronto dei diagrammi fig. 17, 18, 19, 20, 21, 22 relativi tutti ad acciaio

accuratamente ricotto, ma di qualità differente, e di comportamento meccanico sempre più diverso da quello del ferro.

Fig. 20.

Il primo, fig. 17, potrebbe quasi scambiarsi per un diagramma relativo al ferro (vedere fig. 14 e 16) se non fosse l'entità minore, a parità di circostanze, del fenomeno, il quale *ha però lo stesso segno,* e lo spostamento molto più marcato del massimo in corrispondenza a differenze crescenti di temperatura: spostamento il cui senso, comune a tutte le qualità di acciaio, è quello stesso riscontrato nel ferro commerciale; sicchè rimane giustificato quanto a questo proposito è stato detto nel § precedente.

Nei diagrammi figg. 18, 19 e 20 (acciai contenenti solo carbonio e traccie di silicio) l'entità e l'andamento del fenomeno sono poco diverse; ma lo spostamento dei massimi è sempre più notevole; e l'aver potuto spingere un pò più oltre la differenza di temperatura, ha permesso di constatare con grande evidenza che l'entità del fenomeno può, a parità di magnetizzazione, diminuire col crescere della differenza di temperatura fra le giunture. Così nel caso della fig. 20 e delle differenze di temperatura di 310° e di 450°, si vede che per magnetizzazioni inferiori alle 1000 unità c. g. s. il fenomeno ha avuto entità maggiore per la 2ª coppia; al disopra delle 1000 unità c. g. s. è accaduto nettamente il contrario.

Le figg. 17, 18, 19 nelle quali si è arrivato molto vicino alla saturazione magnetica (sino verso 1510 unità c. g. s.) mettono pure fuori di dubbio che il fenomeno non tende *sempre*

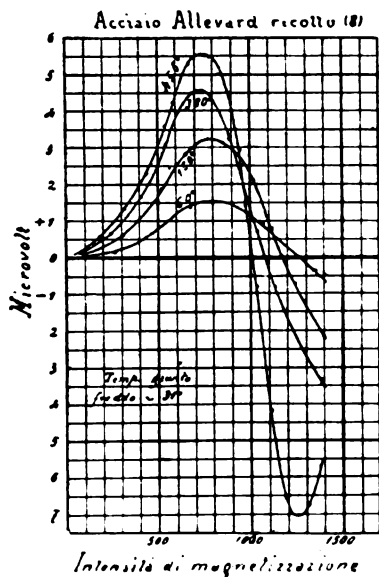



Fig. 21.

ad annullarsi con l'avvicinarsi dell'asta alla saturazione (si ricordi l'analoga osservazione fatta nel § precedente).

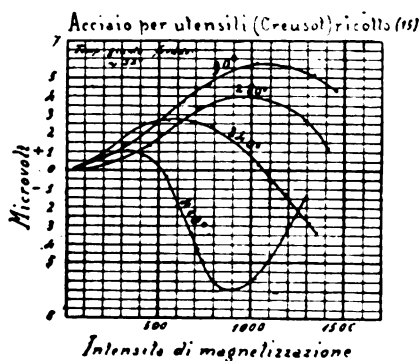



Fig. 22.

E la tendenza *vera* dell' andamento del fenomeno è ancora meglio illustrata dalle figg. 21 e 22 relative ad acciai contenenti non solo carbonio e silicio, ma percentuali crescenti di al-

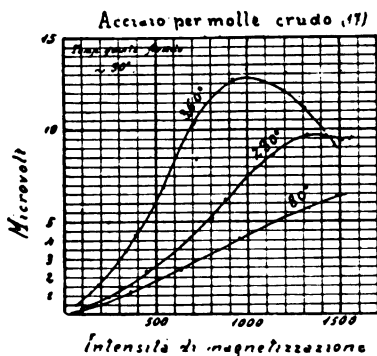



Fig. 23.

tri metalli (*tungsteno cromo e manganese*). Se difatti nella fig. 21 ci si fosse fermati ad I = 950 c. g. s. circa, si sarebbe

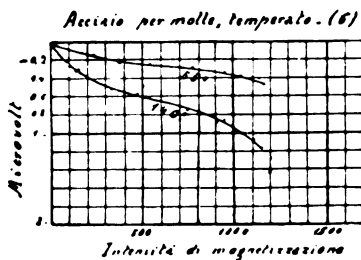



Fig. 24.

avuto un diagramma assai simile al precedente (fig. 20), fermato però verso I = 1450 c. g. s. L'aver spinta oltre la magnetizzazione, mostra che il fenomeno per magnetizzazioni crescenti tende ad annullarsi ed a cambiare rapidamente di segno, raggiungendo talvolta valori negativi maggiori in valore assoluto dei precedenti positivi. Nelle coppie corrispondenti a

differenze di temperatura più elevate si è ancora notata la tendenza ad una nuova inversione di senso del fenomeno; la cosa, già visibile nella curva $\Delta T = 455^0$ della fig. 21 e sospettabile nelle curve $\Delta T = 150^0$ e $\Delta T = 380^0$, è chiarissima nella curva $\Delta T = 410^0$ della fig. 22. In quest' ultima figura poi la tendenza al 1° cambiamento di segno è così pronunciata, che in essa si riscontra, appunto per questo, che lo spostamento dei massimi è enorme: si passa da $I = \sim 1080$ c. g. s. per $\Delta T = 90^0$ ad $I = 320$ c. g. s. per $\Delta T = 410^0$.

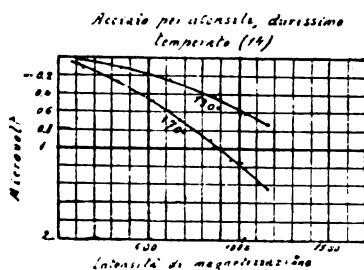



Fig. 25.

L'esperienza ha poi dimostrato che per le qualità usuali, non contenenti cioè che carbonio e minime traccie di silicio, gli *acciai ricotti* e quelli *crudi* si comportano poco diversamente; le differenze dipendono dal grado di incrudimento. (Si confrontino le figg. 18 e 23 relative alla stessa qualità di acciaio per molle). Il confronto, del resto, non può farsi che per temperature relativamente basse, per evitare che durante l'esperienza abbia a ricuocersi parzialmente anche l'acciaio crudo. Invece in acciai speciali le cose possono procedere molto diversamente. Un esempio istruttivo è quello offerto dall'acciaio *diamante* (Allevard) (contenente quasi il 6 % di tungsteno, il 0,6 % di carbonio e di manganese, e traccie di silicio) al quale si riferiscono le figg. 21, 26, e 27, e che non è suscettibile di tempera nel senso ordinario; poichè se si prova ad arroventarlo ed a raffreddarlo bruscamente, si ottiene dell' acciaio lievemente *meno duro* della qualità cruda che è messa in commercio. La non suscettibilità di tempera

è pure confermata dal comportamento della coppia acciaio-rame quale appare dalla fig. 12 (curva 11): non si riscontra difatti la caratteristica inversione di segno che fin dal principio presentano le curve 6 e 14 relative a coppie *rame-acciaio temperato*, che accompagna il cambiamento delle qualità meccaniche (aumento di durezza, di fragilità, cambiamento di colore, etc.). Ebbene, in questo *acciaio Allevard crudo* (fig. 26) il fenomeno ha mostrato un andamento assai diverso dalla qualità ricotta (fig. 21).

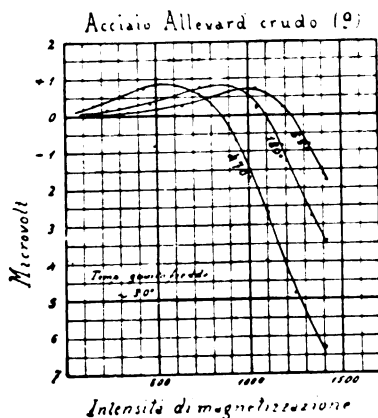



Fig. 26.

Comportamento intermedio fra i due ha presentato l' acciaio diamante sottoposto all' operazione di tempera (fig. 27).

Negli acciai veramente temperati di varie qualità, il fenomeno è stato sempre di segno negativo, come mostrano i due diagrammi fig. 24 e fig. 25, almeno nei limiti di magnetizzazione (fino ad $I = \sim 1300$ c. g. s.) e di temperatura ($\Delta T = \sim 170^0$) sperimentati. Il limite di temperatura si è tenuto basso per non ricuocere il materiale. Si è cioè trovato che la f. e. m. delle coppie rame-acciaio temperato cresceva con la magnetizzazione longitudinale; ma essendo l' acciaio temperato (al contrario del ferro) termoelettrico negativo rispetto al rame, (§ 7) questo indica che l'acciaio tem-

perato magnetizzato è termoelettrico negativo rispetto quello non magnetizzato.

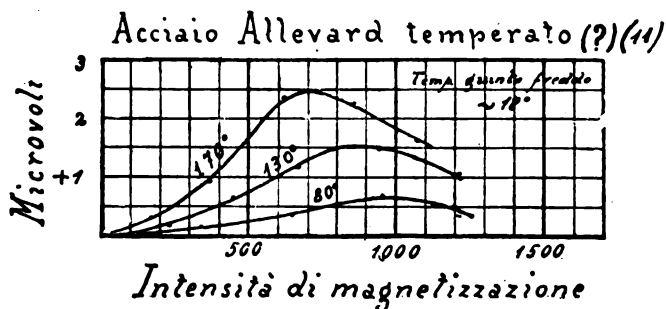



Fig. 27.

Dai diagrammi sin qui esaminati sarebbe facile ricavarne degli altri analoghi alla fig. 15, contenenti delle curve I = costante. Si riportano, a titolo d'esempio, nelle figg. 28 e 29, i diagrammi relativi alle aste N. 12 e N. 8, ricavati dalle figg. 20 e 21.

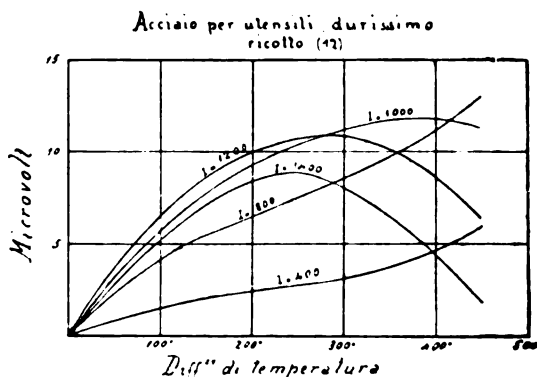



Fig. 28.

Riassumendo si può dire:

L'andamento nell'acciaio del fenomeno magneto-termoelettrico varia assai con la qualità e lo stato del materiale; se però si ordinano i materiali in una scala che vada dal

ferro dolce all' acciaio duro temperato, si osserva che i corrispondenti diagrammi si modificano progressivamente sempre nello stesso senso. Si passa cioè dall'andamento del ferro dolce (il ferro dolce magnetizzato è sempre termoelettrico positivo rispetto quello non magnetizzato) a quello dell' acciaio temperato (l'acciaio temp. magnetizzato è sempre termoelettrico negativo rispetto quello non magnetizzato) attraverso tutti gli andamenti intermedi.

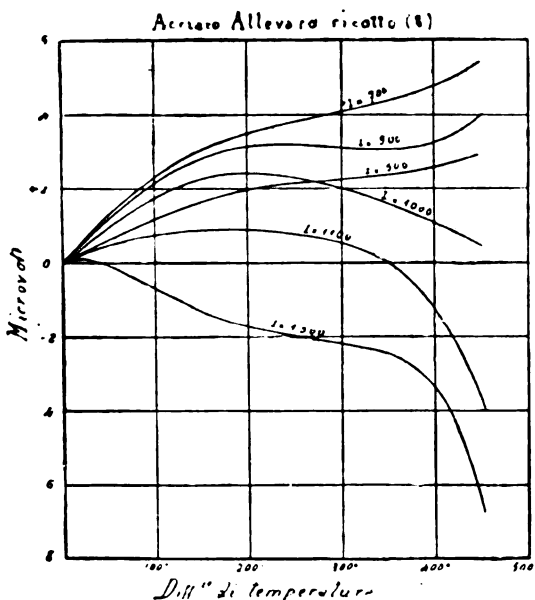



Fig. 29.

In generale la tendenza del materiale magnetizzato a diventare termoelettrico negativo rispetto quello non magnetizzato è tanto più grande quanto più esso è duro, intensamente magnetizzato e quanto più è grande la differenza di temperatura fra le giunture. L' entità del fenomeno è però sempre molto minore che nel ferro dolce; in nessun caso si sono constatate variazioni di f. e. m. superiori ai 12 — 15 microvolt, contrariamente alle esperienze di Houllevigue.

Queste conclusioni valgono per differenze di temperatura sino ai 470° e per intensità di magnetizzazione fino quasi alla saturazione (verso 1500 c. g. s.).

Andamento del fenomeno nel nichel.

11. — I vari campioni di nichel sperimentato hanno dato risultati sempre molto concordanti; si riportano perciò (figg. 30, 31, 32) solo i diagrammi relativi a due delle aste, quella N. 3 (tondino di nichel da 8 mm., di provenienza americana) e quella N. 4 (tratta da una matassa di filo di nichel da 3 mm. di provenienza tedesca). Per essi valgono sempre le convenzioni e le spiegazioni fatte per i diagrammi analoghi studiati nei §§ precedenti. Per il comportamento termoelettrico delle aste si veda la fig. 13.

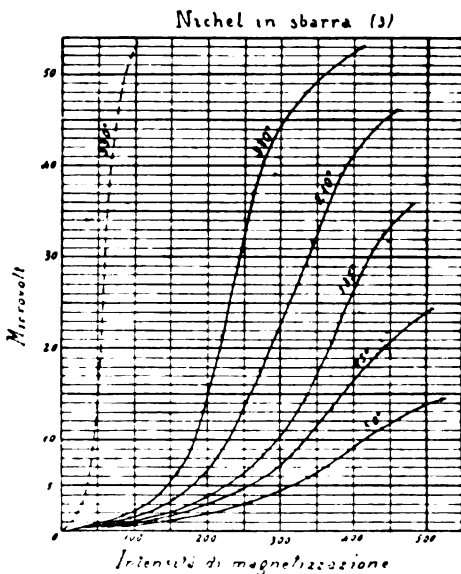



Fig. 30.

Si è dunque riscontrato che la f. e. m. delle coppie rame-nichel diminuisce in seguito alla magnetizzazione longi-

tudinale; da cui si deduce che *il nichel magnetizzato è termoelettrico positivo rispetto quello non magnetizzato.*

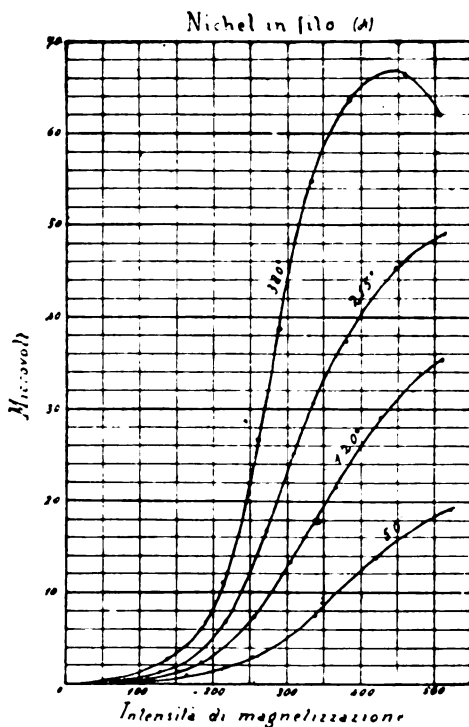



Fig. 31.

L' andamento del fenomeno è analogo a quello constatato nel ferro dolce; solo che avvenendo la saturazione relativamente presto, poco dopo I = 500 c. g. s., l' esistenza di un massimo è visibile solo per le curve relative a differenze considerevoli di temperatura (curva Δ T = 380° della fig. 31). I diagrammi rassomigliano cioè a quelli del ferro dolce o dell'acciaio dolce ricotto, ma interrotti verso I = 1000 — 1200 c. g. s. L' entità del fenomeno è però notevolmente maggiore.

Le curve delle figg. 30 e 31 indicano inoltre, tenuto conto della scala adottata per le ascisse e per le ordinate,

che la rapidità di variazione del fenomeno in funzione dell' intensità di magnetizzazione è assai maggiore che nel ferro e nell' acciaio; la curva tratteggiata della fig. 30 indica l' aspetto che assumerebbe la curva continua $\Delta T = 330^{\circ}$ della stessa figura adottando per le ascisse e le ordinate la stessa scala adottata per il ferro dolce (figg. 14, 16).

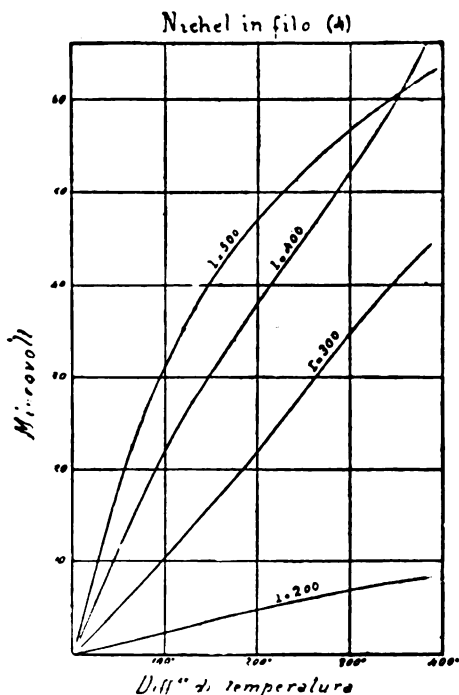



Fig. 32.

La figura 32, dedotta dalla fig. 31, dà l' aspetto delle curve I = costante per l' asta N. 4. Il loro andamento, pressochè rettilineo per magnetizzazioni piccole e medie, s' incurva in prossimità della saturazione magnetica.

Queste osservazioni valgono per ΔT fino ai 400° e per I sino a 500 c. g. s.

Una condizione alla quale debbono probabilmente soddisfare le ipotesi relative alla natura ed al meccanismo dei fenomeni magnetici.

12. — Fra gli effetti secondari dello stato magnetico dei corpi non v' è solo quello relativo alla variazione di posto nella scala termoelettrica che è stato studiato nelle pagine che precedono; ma ve ne ha tutta una serie relativa alla alterazione delle proprietà meccaniche, termiche, ottiche etc., dei corpi. La maggior parte di questi effetti sono stati ormai studiati e se ne conosce abbastanza bene l' andamento in funzione dell' intensità di magnetizzazione del corpo o dell' intensità del campo magnetico preesistente al collocamento del corpo: due grandezze che sono tutt' altro che proporzionali (§ 1) ma che però crescono nello stesso senso. Ebbene, un carattere assai frequente in questi fenomeni sembra essere che:

L' entità dell' effetto prodotto dalla magnetizzazione non cresce sempre col crescere della causa, cioè della intensità di magnetizzazione; ma raggiunge presto un massimo (di posizione variabile con l' effetto che si considera e con la natura del materiale) al di là del quale diminuisce, spesso rapidamente, e finisce talvolta col cambiare di senso.

Questa particolarità è ampiamente illustrata dai vari diagrammi qui riportati per ciò che concerne l' effetto termoelettrico; per ciò che riguarda altri effetti secondari si può consultare il Winkelmann. *Handbuch der Physik.*, vol. IV e V, o, meglio, le memorie originali [1]). Esso è evidente, ad es., nelle variazioni di lunghezza (Winkelmann. V, p. 307) e nelle variazioni di torsione (Winkelmann. V, p. 320) prodotte dalla magnetizzazione.

È opportuno notare che se in qualche effetto non si riscontra massimo, questo può dipendere dai limiti insufficientemente ristretti fra i quali si è fino ad ora sperimentato; a questo proposito è istruttivo il successivo modificarsi delle

[1]) Per la bibliografia rimandiamo appunto al Winkelmann.

curve $\Delta T =$ costante riprodotte nei varii diagrammi annessi al presente lavoro: per es. quelle della fig. 18. Il massimo, nettissimo nella curva $\Delta T = 350^0$ si attenua nell'altra $\Delta T = 190^0$ e sparisce del tutto nelle altre due.

Non sembrerà quindi priva di fondamento l'osservazione che le ipotesi relative alla natura ed al meccanismo dei fenomeni magnetici, affinchè siano accettabili non solo debbono far intravedere la possibilità di una spiegazione degli accennati effetti secondari; ma altresi la possibilità di rendersi conto del perchè l'entità dell'effetto secondario, possa non variare sempre nello stesso senso col crescere dell'intensità della magnetizzazione.

Laboratorio di Fisica Tecnica della Scuola
per gli Ingegneri di Roma.

NOTA

sull'ottenimento di sottili filamenti della così detta « *Composizione Chatterton* »

A complemento di quanto è accennato sulla fine del § 6 intorno all'uso di un reticolo di filo di Chatterton per un microgalvanometro, si aggiungono qui alcuni particolari sul modo semplice adoperato dallo scrivente per ottenerli. Si faccia fondere lentamente ma completamente una piccola quantità di composizione Chatterton e la si lasci raffreddare progressivamente. Immergendo un piccolo oggetto qualsiasi, per es. l'estremo di un filo metallico, nella composizione fusa e ritirandolo rapidamente, si constaterà la formazione di un filamento di cui un estremo è attaccato all'oggetto, l'altro alla superficie della miscela.

Se questa è troppo calda il filamento si rompe subito; se è troppo fredda il filamento riesce troppo grosso. Con qualche tentativo, provando ripetutamente sulla composizione che si sta raffreddando, si riuscirà presto ad ottenere un filamento del diametro di qualche decimo di mm.

A questo punto, mentre il filamento è ancora teso, perchè attaccato ancora con le due estremità all'oggetto ed alla miscela, si presenti sotto di esso, dalla parte piatta, verso la punta, un paio di forbici appena aperte che verranno alzate rapidamente. Il filamento, toccando le lame, vi aderirà subito energicamente e ne resterà una piccola parte tesa, in corrispondenza all'apertura delle forbici; basterà perciò allargare gradatamente l'apertura della forbice per assottigliare assai il filamento. Operando in un ambiente caldo (al disopra, ad es., di una lastra metallica scaldata inferior-

mente) si può, con un altro paio di forbici, operare sul filamento già assottigliato per ridurne ancora il diametro.

Dopo qualche tentativo si riuscirà facilmente ad ottenere un diametro finale prossimo a ciò che si desidera regolando convenientemente la manovra delle forbici.

I filamenti ottenuti sono elastici e relativamente resistenti; ma per la loro tendenza ad aderire tenacemente ovunque è preferibile adoperarli incollati sul vetro. A tale scopo è sufficiente presentare il vetrino a piatto al disotto del filamento (mentre esso è ancora tenuto teso dalle estremità attaccate alle lame della forbice) ed alzarlo: il filamento aderirà subito pur rimanendo teso. Sostituendo il sollevamento a mano del vetrino col sollevamento operato con un adatto apparecchio sul quale il vetrino possa essere orientato in modo noto, possono costruirsi senza difficoltà reticoli sufficientemente precisi di filamenti paralleli od ortogonali. È chiaro che alle forbici potrà sostituirsi qualunque altro strumento adatto ad una manovra analoga (un compasso, ad es.).

Fig. 33.

Il vantaggio di questi filamenti di Chatterton su quelli di vetro, di seta, di ragno o sopra le linee tracciate col diamante, sta anzitutto nella facilità di costruzione e di regolazione del diametro: inoltre, a parità di diametro, essi risultano più visibili. Naturalmente i loro svantaggi, e principalmente l'alterabilità col calore, ne limitano l'uso.

Nel procedere come è stato indicato, se si cerca di ottenere dei filamenti molto sottili (di diametro vicino ad 1 centesimo di millimetro) si trova che talvolta il filamento, che è una specie di semi-fluido assai viscoso e tenace, si rompe senza alcuna causa apparente. La percentuale

delle rotture varia con la qualità della composizione; in particolare cresce assai se per eccessivo riscaldamento la miscela fusa ha preso fuoco, cioè se vi si sono introdotte particelle estranee di carbone. La causa della rottura è rivelata facilmente dallo studio microscopico dei filamenti. La figura 33, tolta da una microfotografia, rappresenta, ingrandito circa 100 volte, un filamento di una qualità di Chatterton che dava origine a frequenti rotture. Queste sono provocate dalla presenza di corpuscoli estranei solidi (detriti forse terrosi o vegetali, che la lavorazione della composizione non ha eliminato abbastanza) imprigionati nel filo di sostanza semifluida assai elastica. Coll'assottigliarsi progressivamente il filamento, accade la rottura quando il suo diametro diventa vicino al diametro del più grande dei corpuscoli che racchiude: avviene cioè una vera perforazione delle pareti del filamento.

Non bisogna confondere queste rotture con altre dovute al fatto che l'operazione di assottigliamento è avvenuta quando il filamento era troppo freddo o di qualità poco vischiosa: queste sono annunziate, come rivela il microscopio, da piccoli tagli che si manifestano quà e là nel filamento (come nei filamenti di gomma ripetutamente tesi ed allentati) e che vanno progredendo man mano.

Sul Magnetismo Susseguente del Ferro

DI ARCIERO BERNINI.

PARTE PRIMA.

LA LEGGE SECONDO LA QUALE IL FERRO INTRODOTTO IN UN CAMPO MAGNETICO ASSUME LA SUA MAGNETIZZAZIONE DEFINITIVA.

CAPO PRIMO.

§ 1.° — Introduzione e scopo del lavoro.

Il ferro dolce introdotto in un campo magnetico non assume istantaneamente la sua magnetizzazione definitiva; l'induzione magnetica cresce dapprima rapidissimamente, poi sempre più lentamente, dimodochè raggiunge il suo valore definitivo solo dopo qualche minuto primo.

Questo fenomeno scoperto dall'Ewing (*Phil. Trans* p. 569 1883), che lo chiamò « time lag in the magnetisation », e indipendentemente anche da Lord Rayleigh, (*Phil. Mag.* 1887 p. 30), venne studiato molto ampiamente dall'Ewing stesso, (*Proc. of R. Ist.* Vol. XLVI; 1889) in particolar modo per ciò che riguardava l'azione dei campi deboli, pei quali il fenomeno è più marcato.

Collo svilupparsi poi delle applicazioni industriali fu sentita ancora la necessità di uno studio più completo, ed al classico lavoro dell'Ewing fece seguito una copiosa serie di lavori, che vennero ad arricchire le nostre cognizioni, in particolar modo per ciò che riguarda l'influenza che hanno sul fenomeno l'intensità del campo inducente, la variabilità del campo stesso, nonchè la natura, le dimensioni, il trattamento anteriore del campione da studio.

Alcuni di questi lavori si riferiscono solamente allo studio di quella parte del magnetismo che segue subito lo stabilirsi del campo inducente ed in particolare al suo andamento; altri invece si riferiscono solo alla seconda parte.

Il metodo tenuto dai diversi sperimentatori per lo studio della prima fu quello del galvanometro balistico, e le ricerche di Helmholtz, Holborn, Klemencic e Gildemeister sopra fasci di fili portarono a risultati soddisfacenti e relativamente concordanti, dopo i quali si può asserire quanto segue, e cioè: Che per quanto riguarda la magnetizzazione al chiudere del circuito inducente la prima parte del magnetismo indotto si genera in circa $\frac{1}{100} - \frac{1}{300}$ di secondo; e che nel caso inverso, cioè all'aprire del circuito, la prima parte della smagnetizzazione non impiega più di $\frac{1}{2000}$ di secondo.

Assai meno completo appare lo studio della seconda parte del magnetismo indotto, che d'ora innanzi chiameremo, come il Mazzotto, Magnetismo Susseguente (M. S.) [1]).

A parere dello scrivente, sia per le cause d'errore che sfuggirono, sia per quelle che non si poterono nè apprezzare nè eliminare, i risultati fino ad oggi ottenuti lasciano un'idea troppo vaga ed incerta, sia del valore assoluto del fenomeno, che del suo andamento.

Scopo precipuo del mio lavoro è precisamente quello di contribuire a risolvere la questione relativa alla determinazione dell'andamento del M. S., cercando un rimedio alle cause di errore che possono avere pregiudicati i risultati degli altri sperimentatori, e di studiare quale influenza abbiano sia sull'andamento che sul valore assoluto del M. S. il campo, la qualità del campione, il modo di suddivisione del medesimo, e finalmente la temperatura.

[1]) Chiameremo invece Magnetismo Istantaneo (M. I.), ancorchè impropriamente, la prima parte, e Magnetismo Totale (M. T.) la somma del M. I. col M. S.

§ 2.° — Esperienze anteriori.

Esporrò dapprima brevemente le ricerche degli altri sperimentatori, indicando tutto ciò che, a mio parere, costituì una causa di errore pei loro risultati.

a) *Ewing* (loc. cit.). Il metodo sperimentale tenuto dall' Ewing è quello magnetometrico. L' effetto prodotto sull' ago dalla chiusura del circuito inducente è compensato mediante apposita bobina. Le deviazioni dell' ago si leggono di 5 in 5 secondi per circa un minuto primo dalla chiusura del circuito inducente. Prendendo per ascisse i tempi e per ordinate i valori della magnetizzazione, l' A. costruisce, per ciascuna intensità di campo impiegato (da 0,035 a 0,3392 unità C. G. S.), delle curve, che dovrebbero dare l'idea dell' andamento della magnetizzazione fino al valore definitivo.

Senonchè l' andamento delle curve nell' intervallo fra 0 e 5", cioè in quello in cui proprio si genera la maggior parte del Magnetismo Susseguente, è arbitrario; per l' inerzia dell'ago poi le deviazioni, colle quali l'Ewing costruisce le sue curve, non possono corrispondere, e specialmente quelle relative ai primi istanti, al valore vero della magnetizzazione.

b) *Klemencic*. Il Klemencic (*Wied. Ann.* 1897 V. 62 p. 68), dopo avere anch' egli obiettato come, anche dopo il lavoro di Ewing, resti sempre a domandarsi fra l' altro che cosa avvenga nei cinque secondi che seguono la chiusura del circuito inducente, cerca di fare un passo avanti, studiando il fenomeno all' invertire del campo e usando insieme il metodo balistico col magnetometrico.

Attorno alla bobina magnetizzante egli avvolge un' altra bobina a molte spire, cogli estremi in comunicazione con un galvanometro balistico, il cui circuito, inizialmente chiuso, può venire aperto dopo un tempo variabile a piacere dall'atto della inversione della corrente magnetizzante. Coi risultati di dieci determinazioni, che egli riesce a fare nell' intervallo di tempo che va da zero a 0,0312 secondi dall' inversione suddetta, costruisce delle curve, che dànno l' idea dell' andamento della prima parte della magnetizzazione nei suoi campioni, e che stanno a dimostrare come l' aumento della ma-

gnetizzazione decresce col tempo dalla chiusura del circuito magnetizzante.

Per lo studio poi della magnetizzazione negli istanti che seguono, ossia di quella parte che noi chiamiamo Magnetismo Susseguente, usa del magnetometro, compensando con una bobina soltanto l'azione della bobina magnetizzante e non il campo istantaneo generato dal campione da studio, come facevano Lord Rayleigh ed Ewing. Le deviazioni quindi dell'ago del magnetometro, che egli, per le condizioni del suo sistema, ritiene di poter cominciare a misurare solo dopo 4" dall'inversione del circuito magnetizzante, comprendono anche la parte dovuta al magnetismo istantaneo, epperciò le due determinazioni dopo 4" e dopo 60" (le sole che egli faccia con questo metodo) stanno a rappresentare valori che sono proporzionali alla magnetizzazione totale del campione, ed in certo qual modo paragonabili, almeno per quanto si riferisce all'andamento, a quelli ottenuti col metodo balistico.

Facendo il rapporto fra i valori ricavati coi due metodi sopra i suoi campioni di ferro e quelli ottenuti sopra un campione di acciaio, pel quale il Magnetismo Susseguente era trascurabile, egli nota che il valore del rapporto dopo 60" è più grande che non il rapporto dopo 4", e che questo alla sua volta è più grande che non il rapporto dopo 0",0312; e ritiene ciò sufficiente per potere dedurre che anche l'andamento della magnetizzazione nell'intervallo fra 0",0312 e 4" sia analogo a quello degli intervalli studiati che lo comprendono, epperciò che la curva dell'andamento della magnetizzazione si presenti sempre con la concavità verso l'asse dei tempi.

Ancorchè questa ipotesi apparisca molto verosimile, tuttavia mancano le misure dirette che la confermino; e la domanda che il Klemencic stesso si era fatto, rimane ancora priva di risposta. D'altra parte, nelle due determinazioni del magnetismo eseguite col magnetometro, od almeno nella determinazione al 4° secondo, l'ago era indubbiamente in ritardo rispetto al campo agente in quell'istante sopra di esso.

c) *D. Mazzotto.* (*N. Cimento*, Febbraio 1900). Dopo il Klemencic, chi si occupò di studiare fra l'altro ed in modo

particolare l'andamento della seconda parte del magnetismo indotto fu il prof. D. Mazzotto.

Egli pure ricorse all' uso del magnetometro e la disposizione da lui adottata è quella stessa dell' Ewing.

Quanto poi al determinare la magnetizzazione nei successivi istanti dopo la chiusura del circuito, egli opera nel modo seguente:

Dopo d'avere compensato mediante la bobina compensante il Magnetismo Istantaneo generatosi alla chiusura del circuito, sostituisce alla spirale magnetizzante un'altra spirale di uguale resistenza e collocata lontana dall' ago così che non abbia influenza su esso; quindi misura l' effetto della sola compensante, che evidentemente corrisponde a quello del Magnetismo Istantaneo del ferro e della bobina magnetizzante insieme. Sostituisce poscia di nuovo la bobina magnetizzante, indi accosta alquanto all' ago la spirale compensante, cosicchè la sua azione all' atto della chiusura del circuito, invece che compensare soltanto l'azione del Magnetismo Istantaneo, predomini leggermente sull'ago e lo faccia deviare. Dopo questo primo impulso in un senso, l' ago, per effetto del Magnetismo Susseguente che subito si genera, si arresta, indi procede in senso contrario, ripassando per la posizione iniziale, dopo un tempo più o meno lungo, a seconda che la spirale compensante era stata accostata più o meno all' ago.

Egli modifica per tentativi questi spostamenti della spirale compensante, in modo che l' ago ripassi per lo zero dopo un tempo $\frac{1}{10}$, 1, 2, 5 e 10 secondi dalla chiusura del circuito; misura poi le deviazioni che nei singoli casi la spirale compensante produce da sola, ed ammette che queste siano con sufficiente precisione proporzionali alle intensità di magnetizzazione alla fine dei detti intervalli di tempo.

Ora, che i risultati ottenuti operando in tal modo siano proporzionali alla intensità di magnetizzazione alla fine dei tempi $\frac{1}{10}$, 1,2 secondi etc., a mio modo di vedere si potrebbe ammettere soltanto se fosse lecito pensare che in questi casi l'inerzia dell'ago non si facesse ancora sentire. Se non che tutto

induce a credere che dovrebbe succedere diversamente, e di più ce lo conferma il risultato di una esperienza che ho all'uopo eseguita e che in breve descrivo:

Invece di introdurre la sbarra di ferro nella bobina magnetizzante B di un sistema identico a quello del Mazzotto, (Fig. 1) investo la bobina stessa con un'altra più grande B',

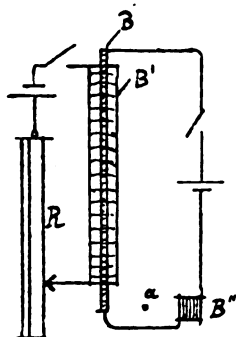



Fig. 1.

inserita con una resistenza variabile R in un circuito indipendente da quello della bobina magnetizzante. Regolata la resistenza R e la distanza della bobina B", compensante in modo che l'effetto sull'ago *a* all'atto della chiusura contemporanea dei due circuiti sia nullo, accosto leggermente la bobina compensante B", in modo che questa abbia un predominio. Chiudendo allora i due circuiti, l'ago subisce un impulso, ma, a differenza di quanto accadeva quando entro la bobina si trovava la sbarra di ferro, la deviazione permane.

Per riprodurre il fenomeno così come se vi fosse la sbarra, appena chiusi i due circuiti diminuisco la resistenza R, spostando con andamento prima brusco poi ritardato l'apposito corsoio, con che il campo totale delle due bobine B e B' aumenta; e nello stesso istante poi in cui noto l'ago ripassare per lo zero, sospendo il movimento del corsoio. Ora, se in quel momento la risultante delle forze agenti sull'ago fosse nulla, come supponeva il Mazzotto, l'ago, giunto allo zero, dovrebbe fermarsi, oppure, oltrepassatolo, dovrebbe ritornarvi. Invece avviene che l'ago oltrepassa lo zero, poscia, senza ri-

tornare indietro, si ferma in una posizione, che sta precisamente ad indicare di quanto il campo delle due bobine sia sull' ago in eccesso rispetto a quello della bobina compensante. Questo fatto, dovuto all' inerzia dell' ago, ci dice che i valori della magnetizzazione così determinati dal Mazzotto sono anch' essi in difetto.

Il Mazzotto asserisce di avere constatato che nè il magnetismo indotto della terra sulle sbarre, nè il Magnetismo Residuo avevano influenza sul fenomeno, e i suoi risultati si riferiscono esclusivamente al caso in cui esiste già un magnetismo residuo, perchè le sbarre venivano studiate senza sottoporle al processo di smagnetizzazione.

Ora, che il magnetismo residuo (M. R.) non debba avere influenza sull' ammontare del M. S. e sul suo andamento non pare cosa troppo verosimile, ed esperienze istituite all' uopo, e che vedremo in seguito, hanno mostrato invece come influenza vi sia e certo non trascurabile.

È noto inoltre che il M. R. può essere diverso, anche quando si esperimenti con un unico campo, a seconda del tempo durante il quale il campo ha agito. Che se poi volessimo ammettere che il M. R. dei campioni studiati dal Mazzotto, anche dopo i ripetuti tentativi di aggiustamento iniziale, fosse per tutte le esperienze con un dato campo sempre il medesimo, ad esempio al suo più alto valore, non è certo lecito istituire, come fa lui, un confronto fra i risultati ottenuti con campi diversi, pei quali il M. R. è variato, e non in proporzione col campo. Confronto fra campi diversi può farsi solo partendo da identiche condizioni iniziali, ossia p. e. col campione volta per volta completamente smagnetizzato.

d) *L. Laird.* Il più recente lavoro ch' io conosca sull' argomento è dovuto a L. Laird. L'A. adotta un metodo escogitato dal Martens e da questo applicato per la determinazione del rapporto fra il M. I. ed il M. T.

Un disco di ferro orizzontale può essere messo in movimento attorno a suo asse verticale. Esso si magnetizza sotto l' azione del campo terrestre ed agisce sopra una delle calamite di un sistema astatico. Se il disco è da prima in riposo,

la sua azione sul sistema misura l' induzione magnetica dopo un tempo infinito; se è in moto l'azione è minore, e passato un certo valore della velocità è indipendente dalla velocità stessa. La deviazione, in questa ultima condizione, misura, secondo il Martens, l' induzione magnetica iniziale (M. I.).

Applicando questo metodo allo studio della magnetizzazione sopra un disco di ferro ricotto, Layrd trova pel rapporto $\frac{\text{M. I.}}{\text{M. T.}}$ il valore 0,872.

Per studiare poi la variazione in funzione del tempo egli compensa mediante una calamita ausiliaria la deviazione del sistema dovuto al M. I., cioè quello ottenuto quando la velocità del disco è tale che l' induzione ha il suo valore minimo. Poscia arresta d' un tratto il disco, e registra la variazione della deviazione sopra una lastra fotografica mobile, e dalla curva così ottenuta deduce la variazione della magnetizzazione in funzione del tempo.

Se non che anche in questo caso viene trascurata l'inerzia dell' ago, per la quale i valori dedotti col metodo grafico contengono un errore sempre in quel senso e non valutabile.

Un' altra causa di errore e forse non lieve va pure cercata in ciò, che il disco, all' atto in cui veniva fermato, doveva subire necessariamente una scossa, ed è noto da tempo che le perturbazioni meccaniche sono cause di non lievi perturbazioni magnetiche.

CAPO SECONDO.

§ 1°. — Esposizione del metodo.

Passo ora ad esporre il mio contributo sull'argomento.

Riusciti vani alcuni tentativi per usare un metodo nuovo e soddisfacente, ho cercato di eliminare gli inconvenienti accusati pel metodo magnetometrico con una valutazione dell' errore che deriva dall' inerzia dell' ago, e coll' apportare poi le relative correzioni.

Ed ecco come:

L' equazione del moto di un ago magnetico libero per angoli piccoli è, com' è noto, la seguente:

$$K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + p \frac{d\varphi}{dt} + H \varphi = 0 , \quad \text{dove}$$

K, p e H rappresentano rispettivamente il momento di inerzia dell' ago, il coefficiente di smorzamento e la componente orizzontale del magnetismo terrestre.

Se oltre alla forza H interviene ad agire sull' ago perpendicolarmente ad H un' altra forza $f(t)$, l' equazione diventa:

$$(\alpha) \qquad K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + p \frac{d\varphi}{dt} + H \varphi - f(t) = 0 .$$

Indichiamo con Φ il valore dell' angolo che dovrebbe corrispondere alla forza $f(t)$ in un dato istante t, quando l' ago fosse privo di inerzia. È evidente allora che dovrebbe persistere la relazione:

$$(\beta) \qquad \Phi = \frac{f(t)}{H} .$$

Sostituiamo ora in (β) a $f(t)$ il valore espresso nella (α), ed avremo:

$$(\gamma) \qquad \Phi - \varphi = \frac{K}{H} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{p}{H} \frac{d\varphi}{dt} .$$

Ora $\Phi - \varphi$ sarà evidentemente la differenza fra il valore reale dell' angolo (φ) al tempo t e quello che dovrebbe essere (Φ) per effetto della forza $f(t)$.

Basterà dunque calcolare i termini del secondo membro della (γ), eppoi, trovato il modo di registrare istante per istante i singoli valori di φ, le somme $\varphi + (\Phi - \varphi)$ ci rappresenteranno valori che saranno evidentemente proporzionali alla magnetizzazione negli istanti considerati.

Vediamo ora come sia possibile determinare il 2° membro della (γ), ed in primo luogo i rapporti $\frac{K}{H}$ e $\frac{p}{H}$.

Integriamo la $K \frac{d^2 \varphi}{d t^2} + p \frac{d \varphi}{d t} + H \varphi = 0$; avremo $\varphi = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$, dove λ_1 e λ_2 sono le radici dell'equazione:

$$(\varepsilon) \qquad K \lambda^2 + p \lambda + H = 0 .$$

Supponiamo ora che il nostro ago si trovi nella condizione limite per la aperiodicità. Allora è $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, e conseguentemente:

$$(\theta) \qquad \varphi = A e^{\lambda t} .$$

Supponiamo ora di poter conoscere mediante l'esperienza un sistema di n valori di φ, corrispondenti ad n valori diversi di t; si potrà ricavare un valor medio di λ. Sostituito questo valore nella (ε) sarà allora per la (ε) stessa:

$$(\varkappa) \dots \begin{cases} \frac{p}{H} = - \frac{2}{\lambda} \\ \frac{K}{H} = \frac{1}{\lambda^2} , \end{cases}$$

che sono le costanti che figurano nella (γ).

Quanto poi ai valori di $\frac{d\varphi}{dt}$ e di $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, costruite, nello stesso modo che la curva dell'andamento dell'ago, quelle dell'andamento del M. S. dei campioni da studio, ricaviamo col calcolo grafico le curve delle derivate prime di quelle, ed operando nello stesso modo sulle curve derivate ricaviamo le curve delle derivate seconde.

Queste curve ci permettono evidentemente di dedurre i valori di $\frac{d \varphi}{d t}$ e $\frac{d^2 \varphi}{d t^2}$ da sostituire nella (γ) per la correzione punto per punto delle curve dell'andamento della magnetizzazione ricavate sperimentalmente.

§ 2.° — Disposizione sperimentale.

La disposizione sperimentale, ad eccezione di qualche aggiunta, non differisce da quella descritta dall'Ewing e adottata anche dal Mazzotto.

L'ago del magnetometro, costituito da un sottile filo di acciaio lungo 12 mm., era munito di uno smorzatore pescante nell'olio di vasellina fino al punto necessario perchè il movimento fosse aperiodico. Il tempo per rimettersi in quiete, quando veniva spostato d'un angolo non superiore a 3° era di 3".

Ad est dell'ago era disposta orizzontalmente la bobina magnetizzante B (fig. 2), lunga 72 cm., avvolta sopra un tubo

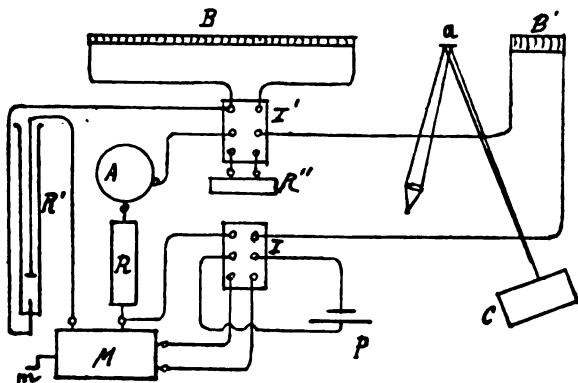



Fig. 2.

di vetro del diametro esterno di mm. 14,5 e con 11,2 spire per centimetro. La corrente che l'attraversava, proveniente da una batteria di accumulatori P, era misurata da un amperometro Siemens (A) di precisione, e regolata mediante una resistenza di costantano R. Ad ovest dell'ago e percorsa dalla stessa corrente si trovava la spirale compensante B', la cui distanza dal magnetometro poteva essere modificata a piacere.

Un commutatore I a mercurio permetteva di sostituire nel circuito alla bobina compensante una resistenza liquida R' regolabile, al crescere della quale l'intensità della corrente poteva ridursi fino al valore zero, ed un inversore rotante M, per la smagnetizzazione dei campioni.

Un altro commutatore I' permetteva invece di sostituire alla bobina magnetizzante una resistenza R'' equivalente.

Allo scopo di registrare istante per istante i valori di φ per apportarvi la correzione, un fascio di luce riflesso dallo specchietto *a* del magnetometro cadeva, anche quando l'ago era in movimento, sopra un cilindro C orizzontale, posto a due metri e mezzo dallo specchietto, girevole di moto uniforme attorno al suo asse, ed attorno a cui si trovava avvolto un foglio di carta sensibile al bromuro d'argento. Sulla carta veniva pertanto segnata una striscia, che, per quanto un po' larga (7 mm.), rispondeva egregiamente allo scopo, potendosi dedurre l'andamento dell'ago dall'uno o dall'altro dei suoi bordi, che riuscivano abbastanza nitidi.

I campioni di ferro, foggiati a sbarre lunghe 60 cm., venivano collocati entro lo spirale magnetizzante, in modo che dalle due estremità sopravanzasse sempre un'uguale lunghezza dello spirale. Quanto alla loro qualità e provenienza verrà detto in seguito insieme ai risultati.

Essi erano stati precedentemente ricotti per cinque minuti al color rosso entro le storte dell'officina del gas della città, e, prima di procedere alle esperienze per lo studio del M. S., venivano volta per volta colla massima cura smagnetizzati.

Questa smagnetizzazione riusciva invero spesso assai lunga e penosa. Era però, come vedemmo nel 1° capitolo parlando del lavoro del Mazzotto, necessaria per potere avere il campione ad ogni esperienza in condizioni identiche e ben definite, ed ottenere così che le curve ripetute per le stesse condizioni riescissero coincidenti o con divergenze trascurabili.

Una delle maggiori difficoltà incontrate nello sperimentare fu quella di condurre volta per volta la bobina compensante in quella posizione per la quale essa potesse compensare esattamente il campo della bobina magnetizzante e quello prodotto dal magnetismo istantaneo del campione.

Col semplice sistema tenuto dall'Ewing e dal Mazzotto, di collocarla cioè in modo che prima il suo effetto predomini sull'ago e poi di spostarla mano mano, fino a che l'ago non parta subito alla chiusura del circuito secondo l'azione del M. Susseguente, ebbi a notare delle discordanze

qualche volta anche piuttosto sentite, che io attribuî alla poca esattezza che il metodo presenta, in causa dell'inerzia dell'ago e della poca libertà che gli consente l'azione dei due campi.

Data la grande importanza di questa operazione, nella quale la poca precisione pregiudica intensamente non solo l'ammontare del M. S. ma ancora il suo andamento, ho cercato di conseguire un grado maggiore di esattezza, e vi sono riuscito esaminando il moto dell'ago non solo all'atto della chiusura del circuito ma anche all'atto della apertura, quando cioè sull'ago non agisce che l'azione terrestre.

Se alla chiusura del circuito una breve sosta od un leggero impulso dell'ago in senso contrario all'azione del M. S. indicava un predominio della bobina compensante, all'apertura del circuito questo predominio si rendeva vistoso con un salto dell'ago assai maggiore e nello stesso senso dell'azione del M. S.

È però evidente che questo controllo cessava di essere possibile quando (come accadeva ad esempio con un fascio di fili molto sottili) l'ammontare del M. S. era inferiore al M. Residuo, nel qual caso, all'atto dell'apertura, l'impulso nel senso del M. S. doveva necessariamente avvenire.

§ 3.° — Risultati sperimentali.

a) La prima ricerca fu quella di stabilire una volta tanto il valore dei rapporti $\frac{K}{H}$ e $\frac{p}{H}$ pel mio magnetometro.

All'uopo, spostando l'ago dalla posizione di equilibrio di un angolo corrispondente circa alla media di quelli che si avevano nelle esperienze sui campioni (1°,30′) eppoi lasciandolo a sè, ho costruito sulla carta sensibile la curva dell'andamento dell'ago sotto la sola azione della componente orizzontale del campo terrestre [1]).

[1]) Le curve ottenute ripetendo alcune volte l'esperienza riescirono sempre perfettamente sovrapponibili.

Questa curva soddisfa abbastanza bene all' equazione $\varphi = A e^{\lambda t}$, cioè alla (6) quando $\lambda = -1,71$, come può dedursi dal confronto fra i valori di φ delle curve e quelli calcolati, e che riporto nella seguente tabella.

TABELLA I.

Tempi in secondi	φ osservati	φ calcolati
0,5	5,4	5,7
1	3	3,1
1,5	1	1
2	0.4	0,4
2,5	0,18	0,18
3	0	0

Sostituendo ora nelle equazioni (z) a λ il valore $-1,71$, ho ottenuto i valori di $\frac{p}{H}$ e $\frac{K}{H}$ che sono rispettivamente 1,42 e 0,342.

b) Determinati così i valori dei rapporti che entrano nella correzione, ho sperimentato colle norme già indicate sopra due sbarre di ferro dolce di Germania, sensibilmente identiche, di fresco ricotte, lunghe cm. 60 e del diametro di mm. 6,7, quando il campo inducente era di 0,07 unità [1]. Le curve ottenute con questi due campioni, come pure quelle ottenute ripetendo l'esperienza sopra uno solo, purchè si avesse cura dopo ciascuna esperienza di smagnetizzare completamente il campione, risultarono sensibilmente coincidenti. La curva che riporto relativa alle condizioni ora accennate è la B della fig. 3.

[1]) Il ritardo nella magnetizzazione dovuta alle correnti indotte nella massa magnetica che, secondo i risultati di Hopkinson, (*Proc. Roy. Soc. London,* 1894) è proporzionale al quadrato del diametro, è nel nostro caso trascurabile, riducendosi a circa $\frac{1}{80}$ di minuto secondo.

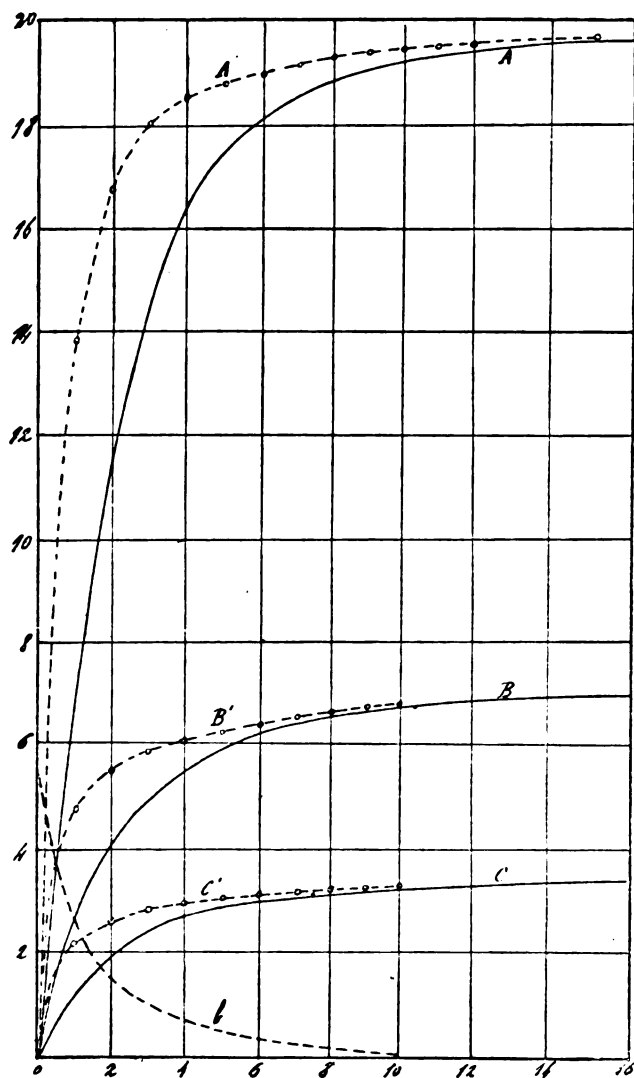



Fig. 3.

In essa le ordinate rappresentano gli spostamenti in centimetri della macchietta luminosa (ossia valori proporzionali alle deviazioni dell'ago non corrette) fino al 15° minuto secondo dalla chiusura del circuito. Il resto della curva non è tracciato, per risparmio di spazio. Il punto estremo relativo

al massimo alla fine del 4° minuto primo, dopo di che non ebbi a notare ulteriore aumento della magnetizzazione, corrisponderebbe all'ordinata 7,5.

Una idea in particolare delle piccolissime divergenze dei valori di questo massimo col ripetere delle esperienze si ha nella seconda parte del lavoro. Il valore 7,5 differisce di una quantità trascurabile nel nostro caso dalle medie dei valori in quelle contenuti.

Calcolando col metodo grafico i valori di $\frac{d\varphi}{dt}$ per i valori diversi delle ascisse, ottengo i risultati della tabella II, coi quali ho costituito la curva b; ed operando analogamente su questa ottengo i valori di $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, che raccolgo nella tabella III.

TABELLA II.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15
$\frac{d\varphi}{dt}$	5,30	2,60	1,70	1,00	0,67	0,45	0,29	0,24	0,18	0,13	0,09	0,05

TABELLA III.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15
$\frac{d^2\varphi}{dt^2}$	—4,70	—2,19	—1,05	—0,71	—0,41	—0,24	—0,18	—0,13	—0,09	—0,06	—0,03	

Sostituendo ora nella γ ai rapporti $\frac{K}{H}$ e $\frac{p}{H}$ i valori già trovati ed a $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ e $\frac{d\varphi}{dt}$ quelli delle due precedenti tabelle, si avranno i valori di $\Phi - \varphi$, che, aggiunti ai rispettivi valori di φ della curva B, ci danno modo di costruire la curva B',

che sarebbe la vera curva dell' andamento del M. S. del nostro campione.

Nella seguente tabella IV con φ sono indicati i valori delle ordinate della curva ottenuta sperimentalmente; con con $\Phi - \varphi$ le relative correzioni, e con φ il valore delle ordinate corrette, ossia valori proporzionali a quelli del M. S.

La correzione dopo il 10' minuto secondo l'ho omessa, perchè, come si vede, diventa trascurabile.

Tabella IV.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
φ	2,63	4,00	4,90	5,50	5,90	6,15	6,31	6,80	6,60	6,65
$\Phi-\varphi$	2,22	1,57	0,90	0,62	0,43	0,28	0,23	0,17	0,12	0,09
Φ	4,87	5,57	5,80	6,12	6,33	6,43	6,38	6,67	6,72	6,74

c) Determinata pertanto in tale modo la curva vera dell'andamento del M. S., veniva finalmente ad acquistare fondamento il cercare di stabilire la legge dell' andamento stesso.

Ora da varî tentativi fatti allo scopo ho potuto constatare che la curva corretta soddisfa abbastanza bene all' equazione esponenziale:

$$(x) \qquad \Phi = A\,(1 - e^{-\lambda \sqrt[3]{t}})\,,$$

dove $\lambda = 1{,}05$ e $A = 7{,}5$.

Infatti dalla tabella seguente si può notare come la differenza fra i valori di Φ osservati e corretti e quelli calcolati colla formula suddetta non superi mai il 2 %.

TABELLA V.

Campo 0,07 : A = 75 : λ = 1,05.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Φ osservati e corretti	4,87	5,57	5,80	6,12	6,33	6,43	6,58	6,67	6,72	6,74
Φ calcolati	4,87	5,51	5,85	6,09	6,25	6,37	6,49	6,58	6,66	6,70

§ 4.° — Influenza del campo.

Oltre che col campo di 0,07 unità ho sperimentato, sempre sullo stesso campione, anche con campi di 0,14 e di 0,035 unità, ossia con campi d' intensità doppia e metà del precedente, ricavandone, colle norme e coi controlli indicati per la determinazione della curva B, le curve A e C della fig. 4.

Apportando a queste, nello stesso modo che abbiamo veduto per le B, la nota correzione, ho costruito le curve A′ C′, le quali ci rappresentano pertanto l' andamento vero della magnetizzazione per quei campi.

Restava a vedere se anche le curve A′ e C′ potevano essere rappresentate da un' equazione come la (x).

Ora i valori di Φ corretti corrispondono abbastanza bene per entrambe le curve con quelli che si possono calcolare coll' equazione (x), quando a λ si diano rispettivamente i valori: 1,5 e 0,7 e ad A i valori 20,4 e 3,7 [1]).

[1]) Per avere anche in questi casi un' idea delle piccole divergenze nei valori di A col ripetere l' esperienza, vedere nella seconda parte del lavoro.

[2]) La posizione dei poli di una massa di ferro situata in un campo magnetico è differente a seconda della intensità del campo inducente. A diminuire l'effetto che ne deriva in esperienze come queste sarebbe stato consigliabile disporre la bobina magnetizzante verticale, e compensare il campo terrestre con una bobina ausiliaria. Da quanto però si può dedurre dal confronto dei risultati ottenuti dal Klemencic (loc. cit.) con la bobina nelle due posizioni, possiamo ritenere che per valori del campo inducente come quelli da noi impiegati l'effetto dello spostamento dei poli sia trascurabile.

Infatti dalla tabella VI si può notare come le differenze fra questi valori non siano mai superiori al 2 %.

Tabella VI.

Campo 0,14: A = 20,4: λ = 1,5

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15
Φ oss. e corr.	14,13	16,00	17,73	18,40	18,67	18,74	19,05	19,20	19,34	19,40	19,51	19,55	19,57
Φ calc.	13,80	16,32	18,06	18,31	18,73	19,09	19,24	19,31	19,41	19,54	19,62	19,70	19,87

Campo 0,035: A = 3,7: λ = 0,7

Φ oss. e corr.	2,21	2,70	2,80	2,95	3,15	3,25	3,30	3,35	3,38	3,40			
Φ calc.	2,21	2,64	2,83	2,91	3,09	3,19	3,25	3,29	3,33	3,35			

Dopo ciò mi sembra dunque lecito concludere che, dentro i limiti di campo da me impiegati, *la legge secondo la quale il campione di* F *e sottoposto all'esperienza assume la sua magnetizzazione definitiva, quando trovandosi completamente smagnetizzato si sottopone all' azione di un campo magnetico istantaneo, è espressa dall'equazione* (x), *dove il coefficiente* λ *è tanto più piccolo quanto più piccolo è il campo inducente* [1]).

§ 5.° — Influenza della qualità del Ferro.

A vedere quale influenza avesse sul fenomeno che studiamo la qualità del campione ho sperimentato con un campo di 0,07 unità sopra altri due campioni, l' uno di ferro Svedese, l' altro di ferro dolce comune, entrambi della stessa massa e delle identiche dimensioni del campione di ferro di Germania.

[1]) Mi riserbo di riferire su di una relazione fra λ e H che mi sembra avere trovato valida pei campi da me impiegati, quando abbia potuto vedere se essa può estendersi anche per campi maggiori.

Le curve relative a questi altri due campioni, costruite e controllate colle norme che ho già esposto e corrette dell'errore per l'inerzia dell'ago, sono rispettivamente le C e D della fig. 4. Quivi la curva B non è che la B' della fig. 3, relativa cioè al campione di ferro di Germania e riportata solo pel confronto.

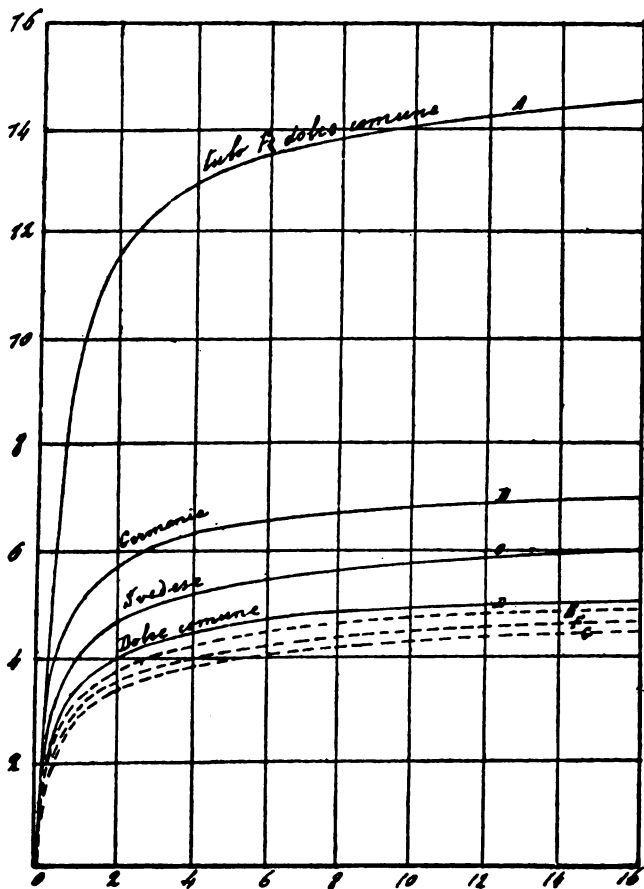



Fig. 4.

Dall'esame delle curve C e D ho constatato che anch'esse sono rappresentate molto bene dall'equazione x, quando A e λ assumano i valore indicati dalla tabella seguente:

TABELLA VII.

Campo 0,7	A	λ
Ferro di Germania	7,5	1,05
Ferro Svedese	6,7	0,91
Ferro dolce comune	5,9	0,85

Infatti, gli scarti fra i valori di Φ osservati e corretti e quelli calcolati, come si può dedurre dalla tabella VIII, sono ora in un senso ed ora nell' altro, e non oltrepassano mai il 2,5 %.

TABELLA VIII.

Campo 0,07
Curva C: $A = 6,7 : \lambda = 0,91$.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Φ osservati e corretti	3,95	4,55	4,95	5,10	5,30	5,49	5,60	5,70	5,75	5,90
Φ calcolati	4,00	4,57	4,91	5,14	5,28	5,42	5,53	5,62	5,70	5,85

Curva D: $A = 5,9 : \lambda = 0,85$.

Φ osservati e corretti	3,40	3,91	4,09	4,30	4,50	4,69	4,80	4,89	4,96	5,10
Φ calcolati	3,38	3,87	4,14	4,38	4,32	4,65	4,74	4,82	4,90	4,97

Ho creduto dunque lecito concludere, che, *per le qualità di Ferro da noi studiate, mentre la legge secondo la quale i campioni assumono la loro magnetizzazione definitiva rimane per tutti la medesima, ossia è rappresentabile sempre dall' equazione x, le costanti* A *e* λ *variano invece colla*

qualità del campione, e le variazioni avvengono per entrambe nello stesso senso.

§ 6.° — Influenza della suddivisione.

a) Non minore interesse che sui campioni in forma di unica sbarra si presentava lo studio del fenomeno sopra fasci di fili. Ho sperimentato perciò, con un campo di 0,14 unità, sopra tre fasci di fili di ferro di Germania, l'uno di 12 fili, l'altro di 54 ed il terzo di 203, tutti però aventi la medesima lunghezza e la medesima massa del campione di ferro di Germania in forma di sbarra già studiato.

Le curve già corrette a questi relative sono le B, C e D della figura 5, dove la curva A non è che la A′ della fig. 4, quella cioè relativa al campione in forma di sbarra, qui riportata solamente pel confronto.

Ritenendo poi interessante anche studiare l'effetto della suddivisione del campione nel senso normale alle linee di forza del campo inducente, ho sperimentato anche sopra tre campioni di ferro di Germania sempre della stessa massa, suddivisi l'uno in 12 cilindretti pressochè uguali, l'altro in 24 ed il terzo in 36.

Questi cilindretti collocati entro la bobina venivano a costituire rispettivamente, riguardo alla massa qualità e dimensioni, tre campioni, che si potevano ritenere pressochè identici a quello in forma di unica sbarra.

Le curve già corrette relative a questi tre campioni sono le B′ C′ e D′ della stessa figura.

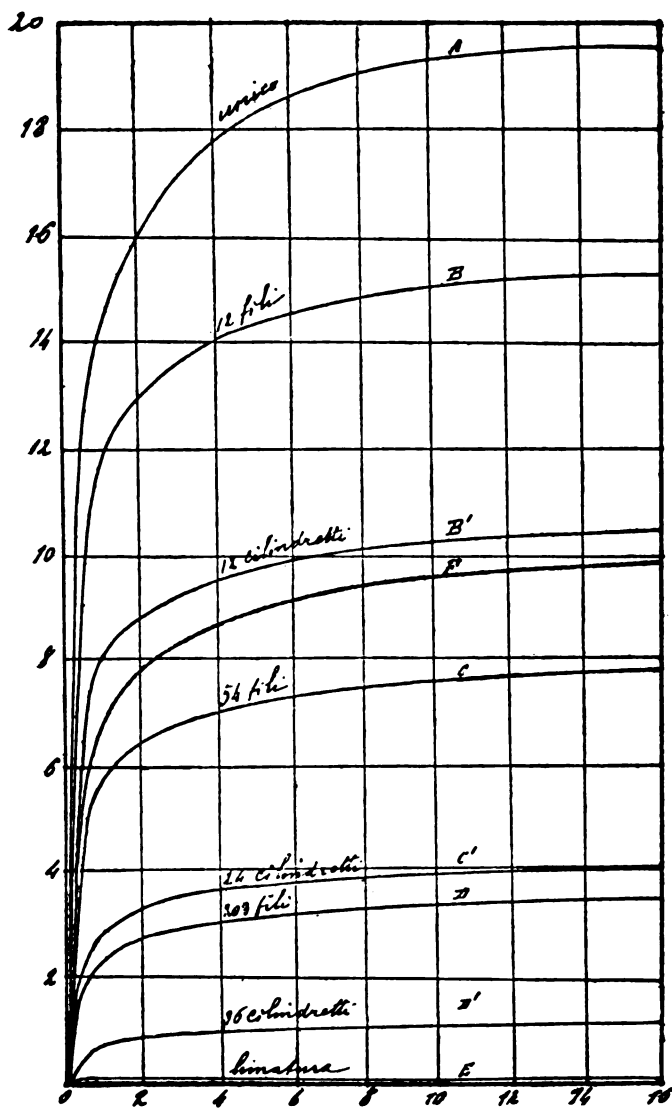



Fig. 5.

Dall' esame di queste curve ho potuto constatare che tutte sono abbastanza bene rappresentabili dalla nota equazione x, quando le costanti A e λ assumono rispettivamente i valori raccolti nella tabella seguente:

TABELLA IX.

Ferro di Germania: Campo 0,14.

Curve	Suddivisione del campione	A	λ
A	sbarra unica	20,4	1,50 (Vedi tab. VI).
B	Fascio 12 fili	16,0	1,35
C	» 54 »	8,2	1,25
D	» 203 »	3,7	1,10
B'	12 cilindretti	11,1	1,30
C'	24 »	4,3	1,21
D'	36 »	1,4	0,91

Infatti, osserviamo nella tab. X gli scarti fra i valori di Φ osservati e corretti e quelli calcolati coi dati della tab. IX. Questi non oltrepassano mai il 4 %, e sono ora in un senso ed ora nell' altro.

TABELLA X.

Curve		Valori di Φ	Tempi in secondi									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	$A=16$	osserv. e corr.	12,10	13,00	13,90	14,35	14,60	14,65	14,82	14,29	15,20	15,30
	$\lambda=1,35$	calcolati	11,85	13,07	13,71	14,10	14,56	14,62	14,78	14,92	15,03	15,15
C	$A=0,2$	osserv. e corr.	6,00	6,75	6,80	7.00	7,15	7,30	7,51	7,60	7,70	7,79
	$\lambda=1,25$	calcolati	5,86	6,50	6,85	7,06	7,24	7,36	7,45	7,35	7,59	7,64
D	$A=3,7$	osserv. e corr.	2,39	2,80	3.05	3,15	3,16	3,20	3,30	3,35	3,44	3,58
	$\lambda=1,10$	calcolati	2,47	2,78	2,96	3,05	3,14	3,17	3,25	3,29	3,34	3,36
B′	$A=11,1$	osserv. e corr.	8,00	9,00	9,35	9,75	9,99	10,15	10,20	10,24	10,30	10,48
	$\lambda=1,30$	calcolati	8,08	8,95	9,39	9,67	9,90	10,06	10,18	10,28	10,36	10.43
C′	$A=4,3$	osserv. e corr.	3,00	3,41	3,65	6,70	3,79	3,86	3,93	3,95	3,96	4,02
	$\lambda=1,21$	calcolati	3,03	3,36	3,55	3,67	3,76	3,83	3,88	3,92	3,95	3,97
D′	$A=1,4$	osserv. e corr.	0,80	1,00	1,03	1,10	1,13	1,15	1,18	1,20	1,21	1,22
	$\lambda=0,91$	calcolati	0,84	0,96	1,03	1,07	1,11	1,14	1,16	1,18	1,19	1,20

Dopo ciò pare dunque lecito asserire che *la suddivisione del campione, sia nel senso delle linee di forza del campo sia nel senso normale a queste, non modifica la legge secondo cui il ferro assume la sua magnetizzazione definitiva, la quale legge rimane quindi sempre rappresentabile colla equazione x. Variano invece le costanti A e λ che entrano nelle x, e precisamente nel senso di diminuire entrambe colla suddivisione, in qualunque modo questa si effettui.*

b) Oltre ai casi suaccennati ho creduto interessante lo studio del fenomeno sopra un campione suddiviso in fina limatura, e su un campione in forma di tubo.

La curva relativa a 160 grammi di limatura di Ferro di Germania e per un campo di 0,14 unità è la E della fig. 6. Questa veramente non è stata corretta, ma la si può ritenere tale, perchè la correzione sarebbe stata insignificante. Da essa si nota come il M. S. sia trascurabile, e che non è per questo possibile verificare del suo andamento.

Quanto al campione in forma di tubo da me sottoposto all'esperienza, esso era di ferro dolce comune, col diametro esterno di 9,9 mm. e coll'interno di 9 circa, e di massa uguale a 160 grammi.

Dato il grande valore del M. S. che questo presentava, dovetti, per non modificare la distanza fra il magnetometro e il cilindro girevole, sperimentare col campo di 0.07 unità. La curva corretta relativa questo campione, che è la A della fig. 4, va confrontata perciò colla D della stessa figura, relativa cioè al campione pure in forma di sbarra della stessa massa e qualità e pel medesimo campo.

Anche questa curva A, come tutte le altre finora ottenute. è rappresentabile coll'equazione x, dove le costanti A e λ assumono rispettivamente i valori 16,0 e 1,0, come si può dedurre dal confronto fra i valori di Φ osservati e colcolati della tabella XI, relativa a questo campione.

TABELLA XI.

Campo 0,07 : A = 16,0 : λ = 1,0.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Φ osservati e corretti	9,7	11,41	12,35	12,8	13,2	13,52	13,70	13,84	15,1	
Φ calcolati	10,0	11,46	12,22	12,71	13,11	13,41	13,63	13,84	15,16	

Siccome i valori di A e di λ pel campione cilindrico erano rispettivamente 5,9 e 0,85 (vedi tab. VII), così pare sia lecito concludere che *nel caso del campione in forma di tubo, rispetto al campione di uguale massa e qualità ed in forma di sbarra cilindrica, i valori delle costanti* A *e* λ *crescono entrambi notevolmente.*

Mentre nulla a priori poteva suggerire pel tubo una variazione in questo senso per λ, l'aumento della costante A si poteva forse prevedere. Infatti, nella seconda parte del lavoro avremo occasione di notare come il valore di A, che in fondo rappresenta il valore del M. S., pei diversi campioni cresce o cala, ancorchè non in proporzione, col valore della magnetizzazione totale. Ora la magnetizzazione totale del tubo, per quanto vedremo nella II parte del lavoro, doveva mostrarsi, come in fatti si mostrò, maggiore che non quelle del campione in forma di sbarra e della medesima massa e qualità. Era dunque verosimile il supporre che, in conformità dei risultati precedenti, pure il valore del M. S. ossia di A, dovesse risultare anche in questo caso maggiore.

§ 7.° — Influenza della temperatura.

L' influenza della temperatura fu studiata sul campione di Ferro dolce comune e della massa di 160 grammi già usato precedentemente.

All' uopo la bobina magnetizzante con entro il campione era immersa in bagno di olio di vasellina contenuto in una cassetta d' ottone allungata, dove poteva assumere diverse temperature.

Le esperienze furono eseguite alle temperature di 15°, 100° e 150° dopo che il campione si trovava almeno da 20 minuti primi in quelle condizioni, e pel campo di 0,07 unità. Le curve relative sono riportate, corrette e controllate nel solito modo nella fig. 5 (curve E, F e G), e, come risulta dalla tabella XIII, soddisfano molto bene all'equazione x, quando i valori di A e λ sono quelli raccolti nella tabella XII. Infatti gli scarti fra i valori di Φ osservati e corretti e quelli calcolati della tabella XIII non superano mai il 3,5 °/₀, e sono ora in un senso e ora nell' altro.

Tabella XII.

Campo 0,07		temp.	A	λ
Curva	E	15°	5,60	0,83
»	F	100°	5,25	0,83
»	G	150°	5,00	0,85

TABELLA XIII.

Curve	Temperature	Valori di Φ	Tempi in secondi									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E	15°	osserv. e corr.	3,1	3,6	3,9	4,0	4,25	4,40	4,45	4,55	4,60	4,65
		calcolati	3,16	3,63	3,90	4,08	4,24	4,37	4,41	4,54	4,60	4,66
F	100°	osserv. e corr.	3	3,42	3,61	3,85	4.0	4,1	4,18	4,25	4,33	4,4
		calcolati	2,96	3,40	3,65	3,82	3.97	4,09	4,17	4,26	4,31	4,37
G	150°	osserv. e corr.	2,90	3,33	3,5	3,75	3,88	3,95	4,0	4,1	4,15	4,20
		calcolati	2,87	3,31	3,51	3,70	3,83	3,94	4,02	4,09	4,15	4,20

Dalla tabella XII risulterebbe pertanto che *col crescere della temperatura la costante* A *va diminuendo, ed a tale diminuzione di* A *non corrisponde, cone si è constatato finora, una variazione nello stesso senso per* λ, *la quale si può dire rimanga pressochè costante* [1]).

Sarebbe stato senza dubbio interessante lo studio del fenomeno per temperature molto più elevate, ma ho dovuto rinunciarvi per mancanza di mezzi.

§ 8.° — Influenza del Magnetismo Residuo.

Che il Magnetismo Residuo (M. R.) del campione avesse, come abbiamo asserito parlando del lavoro del Prof. Mazzotto, influenza sull'ammontare del M. S. ebbi a dedurre subito nelle mie esperienze preliminari dal fatto che, quando la bobina compensante si trovava in tale posizione da compensare il Magnetismo Istantaneo del campione completamente smagnetizzato, il suo effetto non era più sufficiente per la compensazione quando il campione aveva un Magnetismo Residuo.

Nella seconda parte di questo lavoro verranno riportati dei dati numerici, che daranno un' idea più completa del fenomeno. Trattandosi qui di riferire soltanto dell' influenza del M. R. sull' andamento del M. S., mi limito a riportare nella figura 5, per confronto colla curva A della stessa figura, la curva F ottenuta per campione unico di ferro di Germania e pel campo di 0,14 unità e corretta colle solite norme, quando il M. R. espresso colla stessa unità di misura del M. S., era uguale a 10.

Orbene anche questa soddisfa egregiamente alla nota equazione x, quando A e λ assumono i valori riportati nella tab.

[1]) La curva E della fig. 4, relativa alla temp. di 15°, sta alquanto al disotto della curva D, relativa al medesimo campione per lo stesso campo e per la temp. ambiente che allora era di 13°; i valori della costante A (vedi tab. rispettive) sono rispettivamente 5,9 pe la D e 5.6 per la E.

Tale differenza però non và attribuita alla piccola differenza di temperatura; bensì al fatto che, in seguito all' istallazione dell' apparecchio riscaldante, la distanza fra ago ed estremità del campione nella costruzione delle tre curve E F a G, era sensibilmente maggiore che non nei casi precedenti.

XIV, come si può infatti dedurre dal confronto fra i valori di Φ sufficientemente concordanti fra loro della tabella XV.

TABELLA XIV.

Campo 0,14.

Curve	Magnetismo Residuo	A	λ
A	0	20,4	1,5
F	10	11,0	1

TABELLA XV.

Campo 0,14 : A = 11,0 : λ = 1.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Φ osservati e corretti	7,0	7,9	8,4	8,95	9,1	9,15	9,42	9,50	9,6	9,7
Φ calcolati	6,96	7,88	8,47	8,73	8,99	9,22	9,38	9,52	9,63	9,72

Dalla tabella XIV pare pertanto lecito asserire che *il Magnetismo Residuo ha influenza sul M. S., nel senso che, se non modifica la formula che rappresenta la legge dell'andamento del M. S., cambia però i valori delle costanti* A *e* λ *che entrano in essa, facendole entrambe diminuire.*

§ 9.° — Conclusioni.

Da tutto quanto abbiamo finora esposto possiamo venire alle seguenti conclusioni:

1) *La legge secondo la quale il ferro introdotto in un campo magnetico assume la sua magnetizzazione defi-*

nitiva è rappresentabile per tutte le condizioni considerate, (e cioè per campi compresi fra 0,035 e 0,14 unità, per campioni di qualità diverse con o senza magnetismo residuo, suddivisi secondo le linee di forza del campo inducente o parallelamente a queste, e per le temperature da 15° a 150°) dalla equazione.

$$\varphi = A\left(1 - e^{-\lambda\sqrt[3]{t}}\right).$$

2) *Le variazioni di condizioni di esperienza provocano entro i limiti considerati soltanto variazioni nei valori di* A *e di* λ, *e precisamente*:

a) Col diminuire del campo inducente A *e* λ *diminuiscono insieme.*

b) A *e* λ *diminuiscono pure insieme colla suddivisione del campione, in qualunque modo questa si effettui.*

c) Quando si dia al campione la forma di tubo, A e λ *assumono valori maggiori che non pel campione in forma di cilindro massiccio.*

d) A *e* λ *variano insieme nello stesso senso col variare delle qualità del campione.*

e) Coll' aumentare della temperatura A *diminuisce, mentre* λ *rimane pressochè costante.*

f) Se il campione ha un magnetismo residuo, A *e* λ *assumono valori minori che non quando il campione venga sottoposto all' esperienza completamente smagnetizzato.*

Come questi risultati d'esperienza possano o meno essere conciliabili colla teoria vedremo nell' altra parte.

RIVISTA

A. CAMPETTI.

Studi recenti intorno alle leghe.

Il comportamento dei metalli puri rispetto alla legge di Wiedemann e Franz è stato studiato da molto tempo, sia teoricamente come sperimentalmente: secondo Drude la conducibilità termica di un metallo è data da

$$\lambda = \frac{1}{3} \alpha N l u$$

e la conducibilità σ da:

$$\sigma = \frac{e^2}{4 \alpha T} N l u$$

essendo α la nota costante universale, che figura anche nella teoria cinetica dei gas, N il numero di equivalenti di elettroni nell'unità di volume, e la carica di un grammo-equivalente, l il cammino libero medio ed u la velocità degli elettroni, T la temperatura assoluta.

Per conseguenza $\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{4}{3}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^2 T$: tale rapporto sarebbe quindi indipendente dalla natura del metallo; come è noto però l'esperienza dimostra che tale legge non è verificata se non in prima approssimazione.

Dalle determinazioni di Jaeger e Diesselhorst risulta infatti che il rapporto $\frac{\lambda}{\sigma}$ è nella maggior parte dei casi compresa tra 665.10^{-8} e 735.10^{-8}, quando si esprimano le conducibilità termiche in $\frac{\text{Watt secondi}}{\text{centimetri} \times \text{gradi}}$ e le conducibilità elettriche in Ohm reciproci. Però si trovano per il rapporto in questione anche valori minori (636.10^{-8} per l'alluminio) e valori notevolmente più elevati pei metalli del gruppo del platino, per il ferro e specialmente per il bismuto. Sulle cause di questa divergenza, anche pei metalli puri, dalla legge di Wiedemann e Franz molti studi teorici sono stati fatti, ad esempio, dal Koenigsberger, e a qualcuno di essi abbiamo anche accennato in questa rivista.

Ben più complicato è il caso delle leghe per le quali la legge di cui sopra non è in alcun modo verificata; se in particolare consideriamo leghe

diluite (soluzioni metalliche solide) nelle quali cioè uno dei componenti sia in piccola quantità rispetto al secondo, si può affermare in generale che per l'aggiunta di un metallo disciolto al metallo solvente diminuiscono tanto la conducibilità termica quanto la elettrica, ma questa più della termica, in modo che il rapporto $\frac{\lambda}{\sigma}$ per una soluzione metallica solida è molto superiore a quello per il corrispondente metallo puro. Per spiegare questo comportamento delle leghe il Riecke suppone che nella soluzione metallica solida la concentrazione degli elettroni sia minore che nel metallo puro: lo Schenck invece (*Ann. der Physik*, 1910) svolgendo in modo più completo alcuni concetti già espressi in lavori precedenti e in base a molti fatti sperimentali che non sono in accordo coll'ipotesi del Riecke. ritiene che l'aumento di resistenza elettrica sia piuttosto dovuto ad un maggiore attrito degli elettroni nel loro moto entro alla soluzione metallica solida. Quest'aumento di attrito e al tempo stesso il fatto che la conducibilità termica per una soluzione metallica solida si abbassa, di fronte a quella del metallo puro, meno della elettrica, si spiegherebbero ammettendo che le molecole del metallo disciolto comunichino per urto la loro energia agli elettroni, essendo però sempre la conducibilità termica ed elettrica dovuta al moto dei soli elettroni.

E precisamente, riferendosi alla conducibilità termica, per fatto di questi urti una maggior quantità di energia scorrerà al minuto secondo attraverso l'unità di sezione del conduttore nel senso della caduta di temperatura; siccome nel metallo puro la quantità di energia trasportata da ogni elettrone è αT, nel caso delle leghe l'energia trasportata sarà $\alpha' T > \alpha T$; ora la teoria di Schenck consiste nell'ammettere che

$$\alpha' = \alpha . \frac{N' + N_\mu}{N'}$$

essendo N' il numero di elettroni e N_μ il numero di molecole del metallo disciolto per unità di volume.

Per conseguenza la conducibilità termica e la elettrica per una soluzione metallica solida saranno rispettivamente:

$$\lambda' = \frac{1}{3} \alpha' N' u' l' = \frac{1}{3} \alpha \left\{ 1 + \frac{N_\mu}{N'} \right\} N' u' l'$$

$$\sigma' = \frac{N' u' l' e^2}{4 \alpha' T} = \frac{N' u' l' e^2}{4 \alpha T \left\{ 1 + \frac{N_\mu}{N'} \right\}}$$

e quindi il rapporto $\frac{\lambda'}{\sigma'}$ corrispondente alla legge di Wiedemann e Franz diviene per le leghe:

$$\frac{\lambda'}{\sigma'} = \frac{4}{3} \left(1 + \frac{N_\mu}{N'} \right)^2 \frac{\alpha^2}{e^2} T .$$

Siccome poi per il metallo puro:

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{4}{3} \frac{\alpha^2}{e^2} T$$

risulta pure

$$\left(1 + \frac{N\mu}{N'}\right)^2 = \frac{\lambda'}{\sigma'} : \frac{\lambda}{\sigma} \qquad (1)$$

Ora dalle misure di Hardebeck dai rapporti delle conducibilità delle leghe e dai valori già noti dei rapporti delle conducibilità per il metallo puro si può mediante la (1) calcolare i valori di N' e si trova che per le soluzioni metalliche solide diluite essi corrispondono non solo come ordine di grandezza ma anche numericamente ai valori di N pei corrispondenti metalli puri calcolati da Drude per mezzo delle costanti ottiche. In conclusione dunque risulterebbe intanto da queste esperienze che il numero di elettroni in una soluzione metallica solida è pochissimo differente da quella nel metallo puro.

Del resto una misura diretta di N' col metodo di Drude è stata fatta dal Bernouilli, determinando le costanti ottiche delle leghe, cioè l'indice di rifrazione ν ed il coefficiente di assorbimento k mediante le formule approssimate di Drude

$$k = \tan g\, 2\psi \qquad \nu = \frac{\operatorname{sen}\varphi \operatorname{tang}\varphi}{\sqrt{1+k^2}} \qquad (2)$$

ricorrendo per la misura dei due angoli φ e ψ ad un nuovo metodo del quale è interessante dare un cenno.

Come è noto, i metodi basati sullo studio della polarizzazione ellittica per riflessione per la determinazione delle costanti ottiche di un metallo consistono essenzialmente nel misurare lo spostamento di fase nella riflessione tra le due componenti normali della vibrazione riflessa (quella cioè nel piano di incidenza e nel piano ad essa normale) anzi in generale si cerca quell'angolo φ di riflessione per cui quello spostamento di fase è $\frac{\pi}{2}$ vale a dire la luce riflessa è polarizzata circolarmente. Però il Bernouilli dimostra (*Ann. der Physik*, 1910) che per quest'angolo speciale φ di incidenza *(angolo principale di incidenza)* si ha la proprietà che l'*azimut ψ della luce ridotta di nuovo polarizzata linearmente è un minimo.* Il metodo consiste dunque nel misurare per una serie di angoli di incidenza i corrispondenti azimut: l'angolo di incidenza per cui l'azimut è minimo sarà l'angolo principale di incidenza φ e l'azimut corrispondente l'azimut minimo ψ: i valori di φ e ψ sostituiti nelle (2) dànno i valori di ν e k.

Veramente al metodo usato dal Bernouilli sono state fatte serie obiezioni dal Voigt (*Ann. der Physik*, 1910) per quanto riguarda la non ri-

gorosa deduzione delle formule finali; tuttavia, per quanto queste obiezioni possano infirmare il valore del metodo in quanto si consideri come metodo di precisione, sta però il fatto che i valori ottenuti dal Bernouilli col suo metodo per le costanti ottiche dei metalli puri sono in ottimo accordo con quelli ricavati dal Drude e da altri con i metodi classici; perciò è da ritenere che i valori ottenuti per le costanti ottiche delle leghe siano praticamente esatti.

Noti ν e k, siccome secondo Drude si ha

$$(3) \qquad \nu^2 k = \frac{1}{1+\beta'\left(\frac{\sigma'}{N}\right)^2} \quad \text{essendo } \beta = \frac{2\mu\pi}{\varepsilon}\frac{c^2}{\lambda^2}$$

(c velocità della luce, λ lunghezza d'onda della luce adoperata, μ ed ε massa e carica di un elettrone, σ' conducibilità elettrica del metallo per oscillazioni elettriche di lunghezza d'onda λ) si può dunque calcolare N. Per quanto a questo procedimento siano state fatte varie osservazioni dal Riecke (*Zeit. f. Elektrochemie*, 1909) e il Drude stesso avesse già notato alcune di tali possibili obiezioni, facciamo vedere come dalle (3) si possa subito riconoscere come il numero di elettroni in una soluzione metallica solida debba esser circa identica a quello nel metallo puro.

Se infatti la diminuzione di conducibilità elettrica delle leghe di fronte a quella del metallo puro fosse prodotta da una diminuzione di N, potremmo considerare $\frac{\sigma'}{N}$ come costante e perciò al diminuire di N dovrebbe corrispondere una diminuzione di $\nu^2 k$; se invece la diminuzione di conducibilità elettrica dipende solo da un aumento nell'attrito, ma non da diminuzione di N, essendo N costante, ad una diminuzione di σ' corrisponde un aumento di $\nu^2 k$. Ora dalle misure di Bernouilli risultano per le leghe studiate valori di $\nu^2 k$ superiori a quelli pei metalli puri: è dunque verisimile che in una soluzione metallica diluita la concentrazione degli elettroni debba essere circa identica a quella nel metallo puro.

Del resto un altro metodo di verificazione della teoria di Schenk ci viene fornito dal comportamento termoelettrico delle leghe. Ammesso che nella lega gli elettroni trasportino una quantità di energia maggiore che nel metallo puro per fatto degli urti tra essi elettroni e le molecole del metallo disciolto e detta p la pressione degli elettroni nel metallo, p' nella lega, la forza elettromotrice che alla temperatura T si stabilisce alla superficie di separazione tra la lega e il metallo si può calcolare con formula analoga a quelle di Nernst per le pile a diffusione e sarà quindi

$$\Pi = \frac{RT}{e} \log \frac{p'}{p}$$

e se in base all'ipotesi precedente ammettiamo che sia $p' > p$, alla saldatura calda la lega sarà carica positivamente rispetto al metallo puro.

Ora, secondo le leggi fondamentali della teoria cinetica

$$p = \frac{3}{2} N \alpha T \ , \quad p' = N' \alpha T + \frac{3}{2} N_\mu \alpha T$$

perciò

$$\Pi = \frac{RT}{e} \log \frac{N' + N_\mu}{N} \ .$$

Se ora le due saldature di una coppia formata col metallo e la lega sono alle temperature assolute T_1 e T_2, le forze elettromotrici alle due saldature saranno:

$$\Pi_1 = \frac{RT_1}{e} \log \frac{N' + N_\mu}{N} \ ; \qquad \Pi_2 = \frac{RT_2}{e} \log \frac{N' + N_\mu}{N}$$

e perciò la forza elettromotrice termoelettrica per $T_1 - T_2 = 1$, sarà

$$\pi = \frac{R}{e} \log \frac{N' + N_\mu}{N} \ .$$

Nell'ipotesi di Schenck si ha approssimativamente $N' = N$ e perciò:

$$\pi = \frac{R}{e} \log \left(1 + \frac{N_\mu}{N} \right)$$

e siccome:

$$\left(1 + \frac{N_\mu}{N} \right)^2 = \frac{k'}{\sigma'} : \frac{k}{\sigma}$$

risulta pure:

$$\pi = \frac{R}{2e} \left\{ \log \frac{k'}{\sigma'} - \log \frac{k}{\sigma} \right\} .$$

Quest'ultima formula fu sottoposta a verifica sperimentale, misurando da una parte i valori di π e dall'altra i rapporti $\frac{k}{\sigma}$ tra la conducibilità termica e la elettrica per una serie di metalli e di leghe (leghe di argento e tallio, argento e stagno, cadmio e mercurio, rame e stagno, rame e zinco, rame e nichel); conformemente colla teoria in tutti i casi nella saldatura calda la lega è positiva rispetto al metallo. Di più nel caso di soluzioni metalliche sufficientemente diluite e specialmente se il peso atomico del metallo disciolto è grande di fronte a quello del metallo solvente, la formula precedente è verificata anche per quanto riguarda i valori numerici.

Da tutto ciò che precede si può dunque concludere che la ipotesi di Schenck presenta molti caratteri di verisimiglianza e porta quindi qualche luce nelle questioni assai complesse e difficili riguardanti l'estensione alle leghe della teoria elettronica dei metalli.

Riguardo al comportamento magnetico delle leghe meritano di essere ricordati i recenti lavori di Kôtarô Honda (*Ann. der Phys.*, 1910) e di

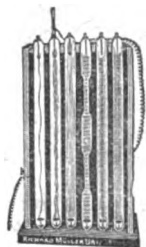
Stephenson (*Phys. Rev.*, 1910). Le esperienze di Kòtarò Honda sono una continuazione di quelle eseguite nel laboratorio Chimico-Fisico di Göttingen sopra le proprietà magnetiche delle leghe binarie: nel presente lavoro l'A. studia specialmente le proprietà ferromagnetiche delle leghe in relazione colla composizione e struttura cristallina: le leghe esaminate sono quelle di nichel e cromo, cobalto e cromo, ferro e vanadio, nichel e stagno, nichel ed alluminio e sopratutto quelle di Heusler (manganese e antimonio, manganese e stagno). Se si rappresentano le intensità di magnetizzazione in funzione della concentrazione di uno dei componenti della lega (per una intensità di campo costante) si trovano delle curve che presentano dei massimi o dei minimi o dei punti singolari corrispondentemente alla formazione nella lega di particolari composti o cristalli misti, dimodochè in molti casi l'aggiunta di una componente non ferromagnetica può non diminuire ma aumentare la proprietà ferromagnetica della lega; anche il magnetismo rimanente è in alcuni casi legato alla presenza nella lega di determinati cristalli.

Lo Stephenson studia le proprietà magnetiche delle leghe di manganese e alluminio, manganese rame e alluminio. La lega di manganese ed alluminio in quantità equivalenti presenta nella curva di permeabilità un minimo poco marcato a 250° e un minimo molto netto tra 600° e 700°: dopo la permeabilità torna a crescere per assumere di nuovo a 900° il primitivo valore. Delle leghe di rame, alluminio e manganese alcune presentano pure rispetto al magnetismo proprietà assai notevoli: esse sono magnetiche a temperatura ordinaria, ma se si raffreddano nell'aria liquida e si riportano poi alla temperatura primitiva si presentano come non magnetiche.

Lo studio microfotografico di queste leghe ha mostrato anche qui che esiste uno stretto legame tra la struttura cristallina e le proprietà magnetiche.

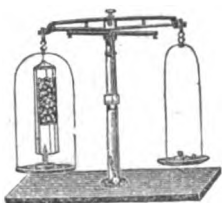
Attilio Mariotti, *gerente responsabile.*

RICHARD MUELLER-URI

BRAUNSCHWEIG

Apparecchi e Strumenti di Fisica, Chimica ed Elettrotecnica per Laboratorio e per Lezione.

Lavorazione di Articoli soffiati in Vetro.

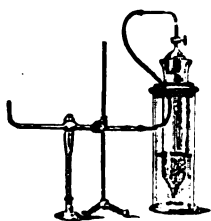
Lavori di precisione - Catalogo e Prospetti a richiesta.

Specialità:

SCALA NORMALE del vuoto secondo **Cha's R. Cross.**

SERIE normale di Tubi di Geissler.

Tubi pei raggi **Catodici** modello **Braun.**

TRASFORMATORE TESLA ad altissima tensione.

Tubi elettrici di **Arons, Crookes, Geissler, Goldstein, Hittorf, Lecher, Lenard, Puluj, Roentgen, Wiein, Zehnder.**

Cellule foto-elettriche **Elster-Geitel** e di Selenio.

ELETTROMETRI di **Exner.**

Apparati per lo studio dell'elettricità atmosferica.

Pile secche di **Zamboni,** modificazione **Elster** e **Geitel,** e **Dolezatek.**

Lampade ad arco a mercurio.

Apparato **Moeller-Schmidt** per la dimostrazione della corrente elettrica.

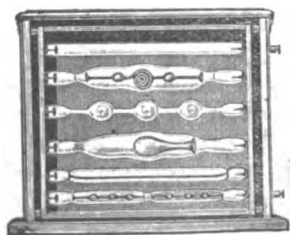
Apparato di M. **Farlan-Moore.**

TERMOMETRI per proiezione.

Dispositivi di **Ramsay** per proiettare gli spettri degli elementi.

Tubi spettrali nuovi per gaz, corpi solidi e vapori purissimi.

Apparati speciali del **Roentgen.**

Tubi di Vetro ottimo per Laboratori ed Istituti scientifici.

Pubblicazione mensile

Anno LVII - Serie VI - Vol. II - 2° Sem. - Fasc. 11°

Novembre 1911
Pubblicato il 17 Novembre

IL NUOVO CIMENTO

FONDATO DA C. MATTEUCCI E R. PIRIA
E CONTINUATO DA E. BETTI E R. FELICI

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

INDICE:

PISA
STABILIMENTO TIPOGRAFICO TOSCANO
Ditte: Vannucchi-Galileiana-Pieraccini
1911

LE CONDIZIONI DI ESISTENZA DELL' ARCO FRA CARBONI.

DI A. OCCHIALINI.

1. **Scopo del lavoro.** — Col sistema di adescamento che ho descritto fin dal 1909 e che ho adoperato in parecchie riprese mi sono proposto di studiare le varie fasi dell' arco allorchè si inizia. A tal fine ho impiegato un dispositivo cinematografico che mi permette di osservare queste varie fasi separatamente l' una dall' altra e di seguire le trasformazioni che esse subiscono nel tempo.

Da questo esame mi sembra di poter concludere che in condizioni ordinarie, cioè con anodo freddo, si succedono nell' adescamento due periodi distinti dei quali uno ha i caratteri della scintilla, l' altro dell' arco propriamente detto: e con ciò vengono confermate le conclusioni che ho esposto in altri due lavori.

Risulta pure che il primo periodo dell' arco può esistere in condizioni nettamente diverse da quelle necessarie per l' arco propriamente detto: precisamente questo esige che l' anodo sia rovente insieme al catodo, l' altro che l' anodo sia freddo.

Siccome poi il processo iniziale manca quando l' arco viene adescato con anodo caldo e cessa appena esso ha prodotto il riscaldamento dell' anodo, così sembra che la prima fase abbia la funzione di preparare le condizioni in cui la seconda fase può esistere.

2. **Dispositivo sperimentale.** — La figura 1 rappresenta il sistema a tre carboni che ho usato in queste ricerche per ottenere l' adescamento dell' arco fra elettrodi separati. Fra i carboni A, B messi verticalmente l' uno sul prolungamento

dell' altro è stabilito un arco continuo, la funzione del quale è di tenere a temperatura elevata il catodo B. Un terzo carbone C, perpendicolare ai primi due, è posto all' altezza dell' intervallo lasciato da questi.

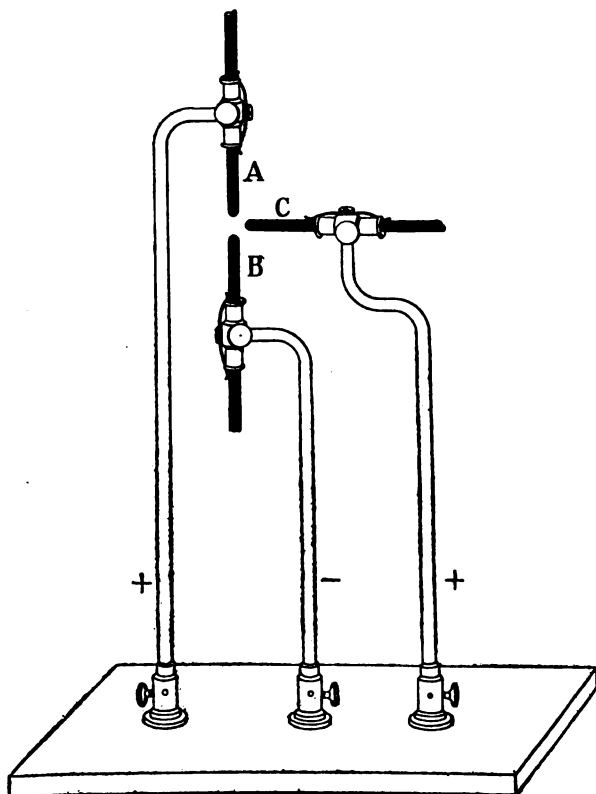



Fig. 1.

In tali condizioni basta stabilire una conveniente differenza di potenziale fra C positivo e B negativo perchè subito un arco scocchi fra i due carboni.

Degli elettrodi di questo sistema ho formato, per mezzo dell' obbiettivo O (fig. 2), un' immagine sopra un cilindro metallico D rivestito di carta al bromuro, girevole intorno ad un' asse e spostabile parallelamente a questo. Lo sposta-

mento parallelo all'asse si ottiene facendo ingranare un dente E nella vite tracciata sull'asse stesso.

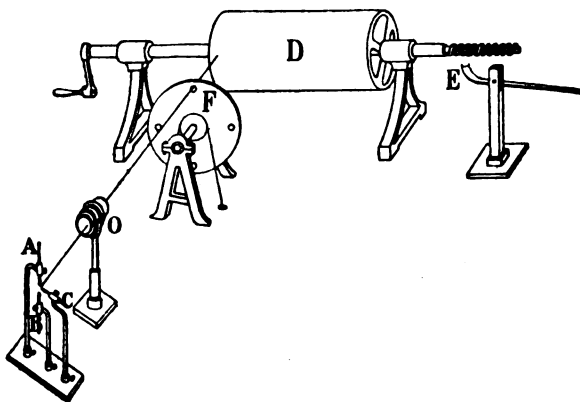



Fig. 2.

Per avere poi la fotografia dell' arco nelle diverse fasi del suo adescamento, ho usato un dispositivo cinematografico ponendo sul cammino della luce un disco di zinco F munito di fori e girevole intorno a un asse. Questo disco, rotando rapidamente nello stesso tempo che il cilindro D gira lentamente, permette il passaggio della luce e l' impressione della carta sensibile ad intervalli regolari di tempo.

Due custodie di legno verniciate di nero chiudevano l' una l' arco G, l' altra il cilindro D. Sulla custodia che chiude il cilindro è posto un otturatore a tendina che permette di incominciare e di finire l' impressione della carta al momento opportuno.

3. Processo esplosivo iniziale. — Osserviamo un arco nell' atto in cui si adesca fra elettrodi di carbone e senza capacità. In principio esso si presenta come un esile tratto luminoso disteso fra gli elettrodi. Assai splendente verso il carbone positivo, questo tratto si attacca sopra una stretta regione dell' anodo dotata di viva incandescenza.

Quando il carbone C è orizzontale, il punto di innesto si trova d' ordinario sulla sua parete laterale e varia spostandosi rapidamente da un luogo ad un' altro, finchè si ferma sulla fronte del carbone. Allora la regione incandescente si allarga insieme con la colonna luminosa e l' arco assume l' aspetto che poi rimane definitivo.

La figura 3 riproduce le varie fasi di un arco che si adesca con 70 Volta e senza condensatore derivato sugli elettrodi B, C : in queste condizioni sembra si verifichi un processo analogo a quello della scintilla, almeno in quanto si riferisce al carattere esplosivo del fenomeno. Riferendoci a questo particolare, chiameremo d' ora in poi questa fase *processo esplosivo iniziale.*

Certo esso avviene in condizioni diverse dal processo che ha sede nell' arco già avviato ; e questa conclusione è conforme a quella che io ho dedotto già per altra via [1]), quando ho osservato che lo spettro emesso dal gas presso l'anodo è di righe finchè l' arco non è definitivamente stabilito, e poi diventa di bande.

Nella figura 3 l'arco nello stato di regime permanente appare dalla 9ª immagine in poi a cominciare dall'alto; esso presenta una larga base anodica che manca nella precedente fase esplosiva in cui l' arco si mostra come un festone mobile terminato all' anodo quasi in un punto.

Quando una grossa capacità è inserita in derivazione sugli elettrodi l'adescamento dell'arco è accompagnato da un colpo secco quasi come quello della scintilla di scarica di un condensatore.

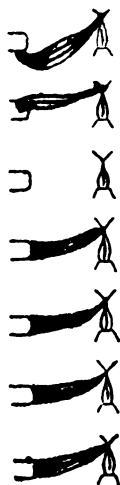
Fig. 3

Se l' adescamento è fatto con anodo freddo, il fenomeno si presenta come nella figura 4 che riproduce la cinematografia di un arco staccato con 220 Volta e con una capacità di 20 Mkf. in derivazione. Il processo

[1]) *Nuovo Cimento 19*, 314, 1910. V. anche *N. C., 2*, 223, 1911.

esplosivo iniziale riprodotto nella prima e nella seconda immagine è nettamente separato dalla fase successiva (che incomincia alla 4ª immagine) da un intervallo di tempo in cui i fenomeni luminosi sembrano quasi sospesi.

Fig. 4.

La successione di due fasi distinte è qui evidente per quanto in questo caso non si abbia nel periodo iniziale quella mutabile successione di archi, o meglio di scariche, che si verifica nell'adescamento senza condensatore e che si vede nella figura 3.

4. **Fase autonoma dell'arco.** — Se osserviamo (figure 3 e 4) che l'arco nello stato di regime permanente si mostra sempre impostato sopra una larga base anodica rovente, vien fatto di pensare che esso possa esistere soltanto allorchè questa base sia preparata portando ad una temperatura convenientemente alta il carbone positivo. D'altra parte, siccome il processo esplosivo cessa appena è stabilita questa condizione di cose, così risulta che tale processo può esistere soltanto allorchè l'anodo è freddo ed ha una funzione precisa: quella di portare l'anodo alla temperatura necessaria per l'esistenza dell'arco propriamente detto.

A conforto di questo modo di vedere serva la seguente esperienza. Al carbone C nel sistema di adescamento da me adottato ho sostituito un disco C' di carbone, disposto come è indicato nella figura 5 e girevole intorno ad un asse passante per il centro. Una volta stabilito l'arco ausiliario fra A e B, si adescherà un arco fra il catodo B e la periferia del disco C quando una conveniente differenza di potenziale sarà stabilita fra B e C'. Ora, se il disco è fermo, si ottiene fra B e C un'arco permanente; ma se C ruota in modo che non abbia tempo di riscaldarsi, l'arco B C conserva il carattere esplosivo della fase iniziale ed emette sempre anche all'anodo lo spettro di righe.

Dunque, se l'anodo non è ad alta temperatura, l'arco permanente non si stabilisce.

Osserviamo ancora che la serie di scariche realizzatasi coll' anodo C' girante si mantiene anche per distanze considerevoli finchè esiste l'arco ausiliario A B ma cessa all' interrompersi di questo, almeno finchè la distanza fra B e C non è assai piccola.

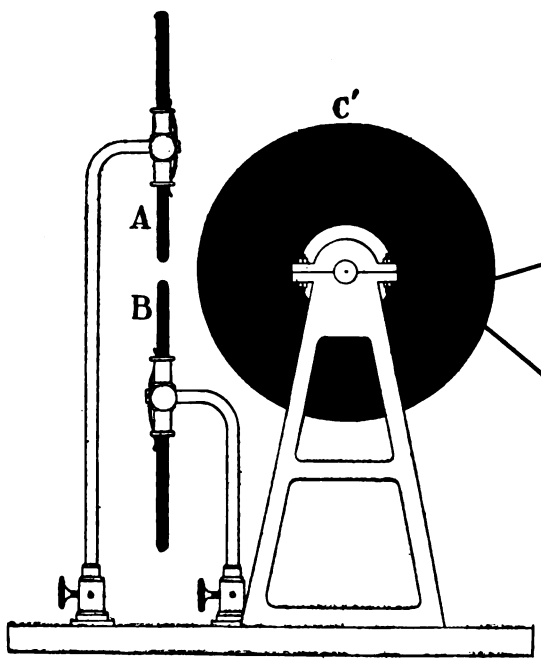



Fig. 5.

Questo significa che in generale il processo esplosivo iniziale non si mantiene da solo, non è autonomo, e anche per questo esso si distingue da quella fase del fenomeno che costituisce l' arco avviato; perciò sarà naturale designare quest' ultima come *arco autonomo*, o *fase autonoma*.

Allora dal fatto che con l' anodo girevole (freddo) non si ha che il processo esplosivo iniziale, si può dedurre la seguente legge: *perchè l' arco possa stabilirsi e mantenersi fra carboni è necessario che, oltre al catodo, sia rovente anche l' anodo: l' alta temperatura del catodo, ritenuta fin qui*

unica condizione per l' esistenza dell' arco, dà origine direttamente alla fase esplosiva, non alla fase autonoma: la quale può mancare se le condizioni del sistema sono tali da non permettere alla prima fase di stabilire le circostanze in cui la seconda può esistere.

La conclusione precedente può sembrare contraddetta dal fatto che si può mantenere un arco con un anodo di sostanza volatile a bassa temperatura, per esempio mercurio o una soluzione elettrolitica; ma ho già esplicitamente detto che la legge, almeno nella forma in cui è stata enunciata, vale per l' arco fra carboni, e non per l' arco con l' anodo volatile.

Per quest' ultimo, avanti di porre il problema che ci occupa, bisognerebbe conoscere in quali condizioni si trova la sua superficie quando su di essa si imposta una colonna che ha una temperatura di qualche migliaio di gradi. Tuttavia è probabile che la condizione di esistenza dell' arco propriamente detto dipenda dalla natura dell' anodo, e che per verificarla occorra un'alta temperatura nel caso del carbone, mentre per altre sostanze può bastare una temperatura poco elevata.

Un' opinione non rigorosamente fondata sull' esperienza, ma pure diffusa, ritiene che l' anodo di carbone sia alla temperatura della ebullizione di questo. Sarebbe interessante verificare se in ogni caso l'anodo è in condizioni di reggere un arco autonomo quando ha raggiunto la sua temperatura di ebullizione.

4. **Adescamento con anodo caldo.** — Ma in opportune circostanze può mancare del tutto il processo iniziale dell'arco e questo allora si stabilisce direttamente nella sua fase autonoma. Basta per questo che l' adescamento dell' arco avvenga subito dopo averne spento uno preesistente, in modo che siano ancora roventi gli elettrodi. In tal caso la riaccensione non presenta nessun carattere esplosivo; il fenomeno avviene quietamente, senza quel fenomeno introduttorio che serve ad aprire la via all' arco autonomo quando l' anodo è freddo. La cinematografia di un arco adescato con catodo caldo è rappresentato nella figura 6.

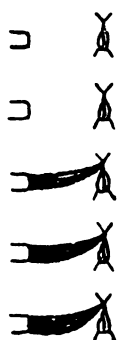



Fig. 6.

Ho poi osservato altrove [1]) che l'adescamento con anodo caldo non dà mai origine a spettro di righe presso l'anodo, ma ad uno spettro di bande, uguale fin dal principio a quello che si osserva nell'arco avviato e ciò conferma la mancanza della fase esplosiva nell'arco adescato in questo circostanze. Questo comportamento, del resto, riesce naturale se si ricorda la condizione di esistenza dell'arco autonomo; infatti se l'anodo è già caldo, non c'è bisogno di quel processo iniziale esplosivo, la cui funzione consisterebbe precisamente nel riscaldare il catodo e che cesserebbe appena raggiunto questo scopo.

---

[1]) *Nuovo Cimento, 19*, 316, 1910.

VARIAZIONE DI RESISTENZA DEL MERCURIO E DELLE AMALGAME DI BISMUTO NEL CAMPO MAGNETICO.

Nota del Dott. GAETANO ROSSI [1].

Usando correnti continue per la misura delle variazioni di resistenza: Neesen [2] (1884) trovò che l'influenza di campi relativamente deboli causa diminuzione di resistenza nelle dissoluzioni di cloruro ferrico, solamente se disposte parallelamente alle linee di forza. Mentre Bagard [3] (1889) osservò aumento dell' 1 % per dissoluzioni di $CuSO_4$ in campi di 5000 Gauss, la posizione essendo la equatoriale. Drude e Nernst [4] (1891) trovarono aumento di 0,20 % in campi di 8000 Gauss per l' Hg e di 0,4 % o pel Bi fuso.

Usando corrente alternata, Berndt [5] (1908) trovò invece per l' Hg e pel Bi fuso variazioni rispettivamente non superiori al 0,00005 % ed al 0,004 %, variazioni che attribuì ad azioni elettrodinamiche, mentre in campi da 1000 a 3000 Gauss trovò che l' influenza era nulla per soluzioni saline di Fe, Ni, Co, Bi.

Questi risultati che lasciano ancora insoluto il problema della variazione delle resistenze liquide nel campo magnetico indussero il Prof. Cantone a consigliarmi la ripresa in esame del fenomeno.

[1]) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisica della R. Università di Napoli.

[2]) *Wied Ann.* 23, 482, 1884.

[3]) *Comptes Rendus.* T. 28^{me}. Juin 1899.

[4]) *Wied. Ann.* 42, 573, 1891.

[5]) *Journal de Physic.* Mars. 1908.

Per la determinazione del campo magnetico utilizzai una elettrocalamita del Faraday; le facce polari misuravano cm. 8,46 di diametro e, rese perfettamente parallele, furono, durante le mie ricerche, serbate costantemente distanti fra loro m/m. 7,75: il minimo possibile.

Per la misura dell' intensità del campo ricorsi al metodo dell' induttore terrestre, applicando la formola

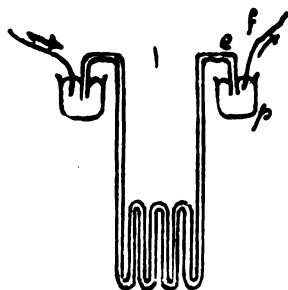
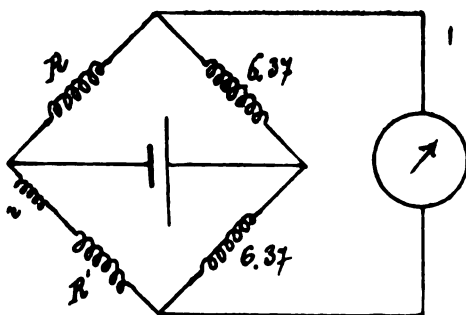
$$H = h \frac{n' S'}{n S} \cdot \frac{d}{d'}$$

dove h è la componente orizzontale del magnetismo terrestre, determinata in questo laboratorio nell' anno 1907, e trovata uguale a 0,228 Gauss; $n' S'$ ed $n S$ rappresentano rispettivamente le aree totali dell' induttore terrestre e della bobina di riferimento racchiusa nella elettrocalamita; d' è la deviazione, osservata sulla scala del galvanometro balistico, quando si fa rotare di 180° l' induttore terrestre attorno ad un asse verticale, corretta per l' effetto dello smorzamento; e d la deviazione, ugualmente corrretta, dovuta all' inversione rapida del campo.

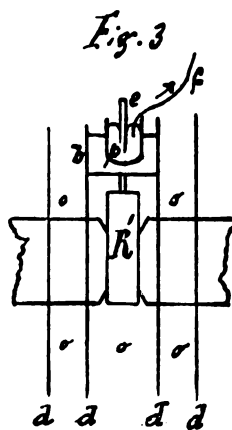
L' intensità di detto campo si fece variare da 3350 a 4450 Gauss, corrispondentemente ad una corrente magnetizzante da 3 a 5 Ampères, fornita da 10 accumulatori.

Per la misura delle resistenze liquide utilizzai un ponte a filo del Kohlrausch e come strumento di zero un ottimo telefono Adler; però per la misura delle variazioni di resistenza, dovute al campo, non mi avvalsi dello stesso ponte, perchè, essendomi assicurato che anche colle correnti continue colle opportune cautele si possono avere risultati vantaggiosi, non volli rinunziare alle osservazioni galvanometriche, le quali, a mio giudizio, sono più attendibili e conferiscono alla disposizione una sensibilità maggiore che non le telefoniche.

Dirò intanto circa la costruzione delle resistenze liquide: usai tubi capillari di vetro di m/m. 0,7 e m/m. 0,5 di diametro, piegati alla lampada come è indicato dalla fig. 1. Gli estremi e di tali tubi, piegati a doppia squadra finivano col pescare ciascuno in un pozzetto p contenente lo stesso liquido

(mercurio o amalgama) che riempiva il tubo, e di diametro abbastanza grande perchè la resistenza ne fosse trascurabile. Nei pozzetti mettevano capo i fili f di rame adduttori della corrente.

I tubi venivano per la maggior lunghezza incassati fra lastre di paraffina che, oltre a dar loro maggiore consistenza, solidità e perfetto isolamento, li proteggevano da repentine eventuali variazioni di temperatura producentisi nell'ambiente, e ritardavano la comunicazione del calore prodotto dall' effetto Joule dovuto alla corrente magnetizzante.

Per la misura delle variazioni di resistenza mi servii di una cassetta contenente 2 rocchetti di filo di manganina e-

guali ciascuno in resistenza a 6,37 Ohm e costituenti due lati contigui del ponte (fig. 2), mentre da rimanenti lati funzionavano due resistenze liquide R ed R', eguali e di identica natura, costruite come ho detto.

Delle due resistenze liquide, quella in esame R' (protetta come dissi) veniva stretta tra le masse polari della elettrocalamita (fig. 3).

Quattro dischi di cartone *d*, ricoperti di stagnola, erano disposti come indica la figura, e, di questi i due più interni servivano di sostegno a due blocchetti *h* di paraffina dove erano fissati i pozzetti ai quali terminavano gli estremi *e* del tubo capillare.

I fili di rame *f*, adduttori della corrente, erano fissati invariabilmente ai pozzetti, è l'intero sistema ora descritto era abbastanza rigido per garentirne la inamovibilità delle parti.

Dell' ovatta *o* riempiva i vani fra i dischi, ed un coperchio di cartoncino paraffinato ricoperto prima di ovatta ed infine esternamente di stagnola proteggeva le parti scoperte *e* del tubo.

Analoghe cautele furono adottate per la resistenza gemella R, che, lontana dalla elettrocalamita, sostenuta in un vaso di vetro ripieno di ovatta e bene isolato, riposava in

una cassetta anch' essa ripiena di ovatta e dotata di coperchio di carta paraffinata.

Questa disposizione così accurata e simmetrica, in un ambiente, per quanto possibile a temperatura uniforme, garentiva la costanza della temperatura nelle due resistenze liquide, giacchè il calore che si svolgeva al passaggio della corrente nel ponte, benchè minimo, veniva ad accumularsi in egual misura nelle due resistenze egualmente protette.

Riuscii ad evitare in parte l' effetto Joule dovuto alla corrente magnetizzante usando l' avvertenza di non lavorare a lungo e ricorrendo a correnti non superiori a 5 Ampères, perchè dopo qualche tempo il calore, dalla elettrocalamita, superando le protezioni, passava alla resistenza R', e vi permaneva a lungo, come è facile capire, a causa delle stesse protezioni.

Curai inoltre un isolamento perfetto in tutte le parti della mia disposizione, usando paraffina in larga misura, e peranco costruendomi un tasto, in paraffina rame e mercurio, per la chiusura dei circuiti.

Nel lato in esame R' trovavasi di più intercalata una debolissima resistenza variabile r che funzionava da regolatore, costituita nella parte sua essenziale da un grosso filo di rame immerso in mercurio, e nel quale poteva venire affondato o sollevato, subordinatamente al comando di una vite di m/m. 1 $^1/_2$ di passo.

Il regolatore fu costruito con metalli non magnetici e fissato invariabilmente ad un tavolo di sostegno. Esso aveva un doppio ufficio: anzitutto permetteva di raggiungere la perfetta uguaglianza fra i lati R, R' del ponte, o di potervela ricondurre allorquando, pel debole calore, passato dalla elettrocalamita alla resistenza R', cessava; ed in secondo luogo dava modo di determinarmi la sensibilità del sistema.

Il metodo seguito nelle ricerche fu il seguente: realizzato il ponte come è indicato nella fig. 2, dove la corrente era fornita da una Daniell ed il galvanometro era un sensibilissimo Hartmann & Braun, procedevo così: servendomi del regolatore uguagliavo i lati R, R' in modo da ottenere, chiudendo il circuito, una deviazione galvanometrica a di poco

inferiore al 500 (posizione di zero del galvanometro), indi aprivo detto circuito, eccitavo il campo, ed, a campo eccitato, richiudevo il circuito facendo una seconda lettura b; infine riaprivo il circuito, escludevo il campo, e tornava a chiuderlo, facendo una terza lettura c. Di a e c, posizioni iniziale e finale del galvanometro senza del campo, pigliavo la media aritmetica m, e la differenza $\Delta = b - m$ dava la deviazione dovuta al campo.

Non toccando più il regolatore, per ciascun campo ripetevo 5 volte l'operazione suindicata: per effetto termico, le 5 deviazioni successive iniziali a procedendo progressivamente crescenti, io stabiliva la prima in modo che tra esse cadesse pressochè intermedia la posizione zero (500) del galvanometro (come può rilevarsi dalle tabelle I e II). È vero che col regolatore avrei potuto riportarmi sempre a zero, volta per volta, ma ciò importava, oltre alla perdita di tempo con relativa propagazione di calore alla resistenza nell'intraferro, un continuo disturbo del rassettamento del sistema.

Delle cinque Δ pigliavo poi la media.

Dirò ora circa il secondo ufficio del regolare: Avvalendomi di un ponte a cassetta Hartmann & Braun, osservata la deviazione dovuta ad $\frac{1}{10000}$ di Ohm trovai il numero di giri, ai quali era obbligata la testa della vite del regolatore, perchè un certo tratto del filo di rame emergendo o immergendosi nel mercurio producesse la stessa deviazione.

Potei così calcolare la resistenza, trovata eguale a $\frac{2}{100000}$ di Ohm, del tratto di filo di rame corrispondente ad un giro.

Ritornando alla disposizione del ponte (fig. 2): conosciuta la deviazione media Δ (di cui sopra) dovuta al campo e quella media d dovuta ad un giro del regolatore, ossia a $\frac{2}{100000}$ di Ohm, nel sistema in esame, era facile calcolare la variazione v di resistenza che per effetto del campo subiva la frazione ρ di resistenza liquida direttamente sottoposta al-

l'azione del campo, e quindi determinare il rapporto δ tra la variazione v e detta frazione di resistenza.

Ad evitare complicazioni di cifre decimali esprimo le δ in decimillionesimi.

Le mie ricerche si riferiscono all'Hg puro ed alle amalgame di Bi, nel campo trasverso. Queste ultime, studiate ora, pare, per la prima volta, e da me prescelte a causa del notevolissimo aumento di resistenza che il Bi presenta nel campo magnetico, furono di quattro concentrazioni differenti: le prime due contenevano con 100 parti in peso di Hg, rispettivamente parti 0,5 ed 1,0 di Bi, le altre furono soluzioni sature di Bi in Hg. a 12° e 190° rispettivamente.

Tutte furono preparate nel vuoto, allo scopo d'impedire la formazione di ossido di Bi, e poi obbligate a passare più volte per tubi affilatissimi a fine di privarle di particelle solide.

Le mie osservazioni furono eseguite con sole due coppie di tubi una da m/m. 0,7 l'altra da m/m. 0,5 di diametro, e reputo utile aggiungere che i detti tubi tutte le volte che vennero vuotati, per essere riempiti di amalgame più concentrate, presentarono sempre le pareti interne perfettamente terse.

Riporto le tavole relative al mercurio distillato ed alla amalgama di Bi satura a 190°, in tubo da m/m. 0,5.

TAV. I.

Mercurio Distillato.

Diametro del tubo m/m. 0,5.

Resistenza totale $R' = R = \frac{777}{223}\,\Omega = 3{,}48\,\Omega$.

Parte sottoposta al campo $\rho = \frac{1}{2}\,R' = 1{,}74\,\Omega$

Deviazione per $\frac{2}{100000}\,\Omega$, $d = 5{,}2$.

H = 3350

a	b	c	m	Δ
497,4	500,0	497,6	497,5	2,5
499,0	502,5	500,1	499,5	3,0
501,0	505,0	504,0	502,5	2,5
504,5	507,8	505,8	505,1	2,7
506,0	509,0	507,2	506,6	2,4

Media Δ = 2,6

H = 3640

a	b	c	m	Δ
488,6	492,9	491,0	489,8	3,1
493,1	496,9	495,0	494,0	2,9
496,1	500,4	497,9	497,0	3,4
503,0	506,5	503,9	503,5	3,0
505,2	509,0	507,0	506,1	2,9

Media Δ = 3,0

H = 3930

a	b	c	m	Δ
497,0	500,7	497,2	497,1	3,6
498,0	501,5	498,5	498,2	3,3
499,1	502,9	499,9	499,5	3,4
501,6	506,0	502,8	502,2	3,8
503,9	508,0	505,0	504,5	3,5

Media Δ = 3,5

H = 4190

a	b	c	m	Δ
492,8	497,3	495,0	493,9	3,4
495,9	500,1	496,2	496,0	4,1
496,6	504,3	501,3	500,4	3,9
501,8	506,7	503,2	502,5	4,2
502,0	506,9	504,5	503,2	3,7

Media Δ = 3,9

H = 4450

a	b	c	m	Δ
494,1	498,9	495,0	494,5	4,4
494,0	500,4	497,0	495,5	4,9
497,3	503,4	499,6	498,4	5,0
500,0	506,3	503,0	501,5	4,8
502,5	508,3	505,1	503,8	4,5

Media Δ = 4,7

Riassunto

H	Media Δ	$\delta \times 10^7$
3350	div. 2,6	57
3640	» 3,0	66
3930	» 3,5	77
4190	» 3,9	86
4450	» 4,7	104

Tav. II.

Amalgama di Bi satura a 190°.

Diametro del tubo m/m. 0,5.

Resistenza totale $R' = R = \frac{771,5}{228,5}\ \Omega = 3,37\ \Omega$

Parte sottoposta al campo $\rho = \frac{1}{2} R' = 1,69\ \Omega$

Deviazione per $\frac{2}{100000}\ \Omega, d = 6,2$

H = 3350

a	b	c	m	Δ
486,0	491,8	485,8	485,9	5,9
495,2	503,0	497,8	496,5	6,5
498,0	504,5	499,0	498,5	6,0
503,0	511,0	505,8	504,4	6,6
506,7	513,8	508,8	507,7	6,1

Media Δ = 6,2

H = 3640

a	b	c	m	Δ
485,2	493,9	487,9	486,5	7,4
488,0	495,2	488,4	488,2	7,0
495,4	504,8	500,5	497,9	6,9
500,3	509,0	503,7	501,7	7,3
504,1	513,1	508,0	506,0	7,1

Media Δ = 7,1

H = 3930

a	b	c	m	Δ
490,8	500,1	491,6	491,2	8,9
492,2	500,8	492,8	492,5	8,3
494,0	502,8	494,6	494,3	8,5
496,5	504,9	497,8	496,9	8,0
498,1	507,3	499,3	498,7	8,6

Media Δ = 8,5

H = 4190

a	b	c	m	Δ
483,0	493,9	486,0	484,5	9,4
486,5	498,7	493,2	489,8	8,9
494,0	506,7	501,3	497,6	9,1
502,2	513,9	508,1	505,1	8,8
509,1	520,9	514,7	511,8	9,0

Media Δ = 9,0

H = 4450

a	b	c	m	Δ
486,8	496,9	487,0	486,9	10.0
487,3	497,3	488,1	487,7	9,6
488,7	499,8	490,6	489,6	10,2
493,1	504,4	496,0	494,5	9,9
499,2	510,5	502,3	500,7	9,8

Media Δ = 9,9.

Riassunto

H	Media Δ	$\delta \times 10^7$
3350	div. 6,2	119
3640	» 7,1	136
3930	» 8,5	163
4190	» 9,0	173
4450	» 9,9	190

Nel quadro che segue riporto i valori delle frazioni ρ di resistenza dei liquidi cimentati e sottoposte direttamente all' azione del campo, notando contemporaneamente con D il diametro dei tubi e con d la deviazione dovuta per $\frac{2}{100000}$ di Ohm.

Liquido Cimentato	D	ρ	d
Hg distillato	m/m. 0,7	1,89	6,8
Amalgama di Bi satura a 12°	» 0,7	1,80	6,2
Hg distillato	» 0,5	1,74	5,2
Amalgama di 0,5 Bi + 100 Hg	» 0,5	1,66	6,7
» 1,0 Bi + 100 Hg	» 0,5	1,68	6,9
» Bi satura a 12°	» 0,5	1,66	6,4
» » » 190°	» 0,5	1,68	6,2

In questo ultimo quadro, dove Δ è la deviazione media dovuta al campo, presento i valori delle δ.

Intensità campo	Tubo diametro m/m 0,7				Tubo diametro m/m 0,5									
	Hg distillato		Amalgama 12°		Hg distillato		Amalgama 0,5 Bi + 100 Hg		Amalgama 1,0 Bi + 100 Hg		Amalgama 12°		Amalgama 190°	
H	Δ	$\delta \times 10^7$	Δ	$\delta \times 10^7$	Δ	$\delta \times 10^7$	Δ	$\delta \times 10^7$	Λ	$\delta \times 10^7$	Δ	$\delta \times 10^7$	Δ	$\delta \times 10^7$
3350	3,9	69	5,4	97	2,6	57	3,4	61	4,0	70	4,3	81	6,2	119
3640	4,5	78	7,0	125	3,0	66	4,2	75	4,8	83	6,1	115	7,1	136
3930	5,3	92	3,5	152	3,5	77	4,9	86	5,5	95	7,0	132	8,5	163
4190	6,0	104	9,6	172	3,9	86	5,1	91	5,9	102	8,3	156	9,0	173
4450	7,1	123	11,0	197	4,7	104	6,5	116	6,8	118	9,0	169	9,9	190

Dai risultati suesposti si d

1° Che il Hg e le ama
campo trasverso, sempre aumen

2° La variazione di resi
diametro del tubo, con la conce

Ora, se mai l'accusata var
plice azione elettrodinamica, tal
mantenersi inalterata, sia per l'
concentrazione dell'amalgama, p
contro l'esperienza.

È perciò che io reputo pot
corpi allo stato liquido pei quali,
lettrodinamici, la resistenza è su
campo magnetico.

E non è a dire che le varia
attribuirsi esclusivamente al Bi, p
l'Hg puro se ne hanno, e dello st
Quindi si ha motivo di ritenere c
aversi variazioni di resistenza pe
tico, sia inerente alle resistenze n

Rendo vive grazie all'illustr
stenza ed i consigli di cui mi fu
durarono le mie ricerche.

Tirreno delle basse pressioni, provoca,
marrobbio si manifesta, venti del 2° e
talvolta raggiungono una considerevole

oltre i barogrammi dell'Istituto fisico della
tania, si riconosce pure che il fenomeno fu
otevoli variazioni di pressione e spesso da
periodiche della curva del barografo [1]).
ulso di queste oscillazioni sarebbe prodotto
ione dinamica del vento, che suscita un
lunghe progressive, o da slivellamenti della
rovocati dalla progressione di un sistema di
pirano le due azioni, almeno in quei giorni
i riconosce nei mareogrammi di Mazzara, il
ompagnato da un generale inalzamento del
l mare.
ga serie di ricerche i giapponesi Honda, Te-
) pervennero alla conclusione che un gruppo
, propagandosi in direzióne della lunghezza di
ettendosi alla sua estremità, genera, per inter-
illazione stazionaria avente un ventre di moto
tremità della baia. Se la lunghezza d'onda è
rsi un nodo all'imboccatura della baia, il pe-
illazione è uguale, in generale, a quello del-
ondamentale in un bacino di lunghezza doppia;
trascurando la correzione per l'imboccatura,

$$T = \frac{4\,l}{\sqrt{g\,p_m}},$$

lunghezza della baia, misurata lungo la probabile
ll'onda, p_m la profondità media della baia e g l'ac-
dovuta alla gravità.

sesse marine registrate nei mareogrammi di Catania, avevo
o — per mezzo di osservazioni continuate per più di un anno
una simile coincidenza tra le oscillazioni più ampie e le per-
arometriche (*Atti del V Congr. Geogr. Ital.*, Napoli, 1905,
uario del R. Istituto Nautico di Catania, vol. I, 1907).
losophical Magazine, 1908, pag. 88.

Dai risultati suesposti si deduce:

1° Che il Hg e le amalgame di Bi presentano nel campo trasverso, sempre aumento di resistenza.

2° La variazione di resistenza cresce col campo, col diametro del tubo, con la concentrazione delle amalgame.

Ora, se mai l'accusata variazione fosse dovuta a semplice azione elettrodinamica, tale variazione avrebbe dovuto mantenersi inalterata, sia per l'Hg puro, sia al variare della concentrazione dell'amalgama, per lo stesso tubo, il che è contro l'esperienza.

È perciò che io reputo potere ammettere che esistono corpi allo stato liquido pei quali, prescindendo da effetti elettrodinamici, la resistenza è suscettibile di variazione nel campo magnetico.

E non è a dire che le variazioni di resistenza siano da attribuirsi esclusivamente al Bi, perchè, anche nel caso dell'Hg puro se ne hanno, e dello stesso ordine di grandezza. Quindi si ha motivo di ritenere che la proprietà rilevata, di aversi variazioni di resistenza per effetto del campo magnetico, sia inerente alle resistenze metalliche liquide.

Rendo vive grazie all'illustre prof. Cantone per l'assistenza ed i consigli di cui mi fu largo nei parecchi mesi che durarono le mie ricerche.

RICERCHE
sulle oscillazioni del mare nelle coste di Sicilia.

NOTA DI GIOVANNI PLATANIA.

È noto che nelle registrazioni mareografiche le curve della marea non sono, in generale, bene avviate, ma presentano talvolta delle fluttuazioni e dentellature, prodotte da oscillazioni ritmiche del mare, con periodi di alcuni minuti. Queste oscillazioni furono denominate vibrazioni del mare (Forel), sesse marine (Airy) per analogia con le sesse dei laghi, pseudomaree, oscillazioni secondarie della marea, librazioni del mare.

In alcuni luoghi le oscillazioni hanno ampiezze molto piccole, sicchè non si osservano se non, come si è detto, per le dentellature dei mareogrammi; in altri il fenomeno acquista talvolta una notevole intensità, fino a danneggiare anche le navi. E in tali casi suol darsi localmente a questo fenomeno un nome particolare: *yota* e *abiki* nel Giappone, *empifondo* nelle coste livornesi, *marrobbio* nella costa occidentale di Sicilia, dove queste oscillazioni raggiungono ampiezze considerevoli, particolarmente a Mazzara del Vallo e a Marsala.

Del marrobbio non esistono altre ricerche, se non un'antica descrizione dell'ammiraglio Smyth [1]), e uno studio del prof. Teobaldo Fischer [2]).

Sembrandomi che il fenomeno meritasse un esame particolare utilizzando gli studi recenti sulle sesse, da una parte

[1]) W. H. Smyth. « Memoir descriptive of the resources, inhabitants and hydrography of Sicily ». London, 1824, pag. 223.

[2]) Th. Fischer. « Beiträge zur physischen Geographie der Mittelmeerländer, besonders Siciliens ». Leipzig, 1877, pag. 92. Cfr. pure T. Fischer, « La penisola italiana ». Torino, 1902, pag. 319.

ottenni dal Ministero della Marina l'autorizzazione di rivolgere un questionario a gli Uffici di porto della Sicilia, da Siracusa a Trapani; dall'altra esaminai le registrazioni del mareografo Mati in Catania e di un mareografo Richard, impiantato a Mazzara dall'Ufficio del Genio Civile di Trapani.

Diversi Uffici di porto eseguirono, secondo il questionario, le osservazioni delle oscillazioni del mare e delle condizioni meteorologiche concomitanti, durante i mesi di aprile e maggio 1905. Risultò che nei giorni 11 e 17 aprile, e 6, 8, 10, 11, 15, 24, 25, 27, 28 maggio il fenomeno fu osservato simultaneamente in diverse stazioni, manifestandosi, in alcuni casi, con maggiore intensità; e in corrispondenza con questi, notai nel mareogramma di Catania, oscillazioni relativamente cospicue.

Dalle registrazioui mareografiche di Mazzara risultarono inoltre, per il 1905, i massimi del 7, 13 e 17 giugno, 28 settembre, 25 ottobre, 5 e 13 novembre.

Infine l'ufficiale di porto di Lampedusa, sig. V. Montella, continuando le osservazioni anche negli anni successivi, mi indicò come più intensi i marrobbi del 19 maggio e 17-18 ottobre 1907, 24 ottobre 1908, 10-12 agosto 1910.

Ora esaminando il Bollettino quotidiano del R. Ufficio Centrale di Meteorologia, si osserva che, nel 1905, nei giorni in cui si manifestò il marrobbio, esisteva una depressione, ora sull'alto Tirreno (15, 24 maggio, 26 settembre, 25-26 ottobre, 13 novembre), ora sul Tirreno (17 aprile), ora sul basso Tirreno (28 maggio, 7-8 giugno). Il 12 giugno si generò fra l'Italia centrale e l'Adriatico una depressione secondaria, che si spostò quindi verso Sud. Il 5 novembre un'area di minima pressione, come appendice di una profonda depressione esistente sull'Inghilterra, occupava gran parte del Mediterraneo occidentale.

Così pure si riscontra la medesima coesistenza di depressioni nel Mediterraneo occidentale, se si considerano i giorni sopra indicati — negli anni dal 1907 al 1910 — nei quali il fenomeno si manifestò a Lampedusa con grande intensità.

Si può dunque conchiudere che queste oscillazioni del mare sono accompagnate da una disposizione barometrica, la

quale, generando sul Tirreno delle basse pressioni, provoca, nelle regioni dove il marrobbio si manifesta, venti del 2° e del 3° quadrante, che talvolta raggiungono una considerevole intensità.

Esaminando inoltre i barogrammi dell'Istituto fisico della R. Università di Catania, si riconosce pure che il fenomeno fu accompagnato da notevoli variazioni di pressione e spesso da fluttuazioni quasi periodiche della curva del barografo [1]).

Il primo impulso di queste oscillazioni sarebbe prodotto dunque da un'azione dinamica del vento, che suscita un gruppo di onde lunghe progressive, o da slivellamenti della massa d'acqua provocati dalla progressione di un sistema di isobare. Forse cospirano le due azioni, almeno in quei giorni nei quali, come si riconosce nei mareogrammi di Mazzara, il marrobbio è accompagnato da un generale inalzamento del livello medio del mare.

Da una lunga serie di ricerche i giapponesi Honda, Terada e Isitani [2]) pervennero alla conclusione che un gruppo di onde lunghe, propagandosi in direzione della lunghezza di una baia, e riflettendosi alla sua estremità, genera, per interferenza, un'oscillazione stazionaria avente un ventre di moto verticale all'estremità della baia. Se la lunghezza d'onda è tale da formarsi un nodo all'imboccatura della baia, il periodo T di oscillazione è uguale, in generale, a quello dell'oscillazione fondamentale in un bacino di lunghezza doppia; sarebbe cioè, trascurando la correzione per l'imboccatura,

$$\text{(I)} \qquad T = \frac{4\,l}{\sqrt{g\,p_m}}\,,$$

dove l è la lunghezza della baia, misurata lungo la probabile direzione dell'onda, p_m la profondità media della baia e g l'accelerazione dovuta alla gravità.

[1]) Per le sesse marine registrate nei mareogrammi di Catania, avevo già dimostrato — per mezzo di osservazioni continuate per più di un anno — che esiste una simile coincidenza tra le oscillazioni più ampie e le perturbazioni barometriche (*Atti del V Congr. Geogr. Ital.*, Napoli, 1905, vol. 2°. *Annuario del R. Istituto Nautico di Catania*, vol. I, 1907).

[2]) *Philosophical Magazine*, 1908, pag. 88.

Per ottenere il periodo dell'oscillazione stazionaria in un bacino rettangolare, di lunghezza l, e di profondità p, Merian aveva proposto la formola

$$(II) \qquad T = 2\sqrt{\frac{\pi l}{g} \cot \text{hyp} \frac{\pi p}{l}}.$$

Ora la (I) si suole chiamare formola di Merian, perchè si ricava anche dalla (II), quando il rapporto $\frac{p}{l}$ sia molto piccolo.

Ricorrendo all'analogia acustica di una canna d'organo di sezione variabile, Honda propone, come correzione della lunghezza, per una baia non rettangolare, una formola, valida quando la variazione delle aree delle sezioni trasversali, normali a l, non sia grande; e una formola di correzione per l'imboccatura, applicabile solamente quando il rapporto tra la larghezza del bacino e la sua lunghezza non sia maggiore di 1.

Egli osserva che, per molte baie, la correzione per la lunghezza è negativa e quella per l'imboccatura è positiva, di valore numerico pressochè uguale; sicchè in molti casi, calcolando il periodo per mezzo della (I) si ottengono valori uguali a quelli osservati.

Il seno di Mazzara è poco profondo e largamente aperto: la larghezza all'imboccatura è molto grande (16000 m.) rispetto alla lunghezza (3100 m.). In questo caso perciò le formole di correzione proposte da Honda non sono applicabili.

Ho determinato, come prima approssimazione, il periodo di oscillazione per mezzo della formola di Merian (I), adottando, per il calcolo del volume V dell'acqua contenuta nel detto seno, la formola proposta dal Caldarera [1])

$$V = h \sum_{0}^{n} (A)_k - \frac{1}{12} \pi h \sum_{1}^{n} (d^2)_k ,$$

[1]) Caldarera dott. Gaetano, *Annuario del R. Ist. Nautico di Catania*, II, 1908, pag. 43.

dove $(A)_k = A_k$ per $k = 1, 2, \ldots, n-1$,

$$= \frac{A_k}{2} \quad \text{per } k = 0, n .$$

mentre $(d^2)_k = d^2_k$ per $k = 1, 2, \ldots, n$,

essendo A l'area compresa tra un isobata e la retta per la quale passa il piano verticale limitante il seno, h la differenza costante di livello fra due isobate consecutive e d la distanza media fra esse. Ho tenuto anche conto, nel modo indicato dall'autore, del volume compreso tra il fondo e il piano orizzontale passante per l'ultima isobata a monte del piano verticale limitante il seno. Ho ottenuto in questo modo $V = 416\,300 \times 10^3$ m³. Prendendo come profondità media il rapporto tra questo volume e l'area A_0, si ha $p_m = 15{,}2$ m. Con ciò dalla formola (I) si ottiene $T = 16{,}8$ minuti.

Applicando la formola di Du Boys

$$\text{(III)} \qquad T = \frac{4}{\sqrt{g}} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{p}} ,$$

dove p è la profondità corrispondente all'elemento dx della linea di massima profondità, si ottiene $T = 19{,}6$ minuti.

Questa formola di Du Boys — nella quale non si tiene conto della lunghezza della sezione nè dell'area di questa — si può considerare come empirica [1]); se essa dà una buona approssimazione nei casi di bacini di forma irregolare, nei quali la concavità non predomini sulla convessità, dà per contro un valore troppo grande di T per i bacini in cui, come per Mazzara, predomina la concavità.

Per un calcolo più rigoroso è opportuno ricorrere al metodo di Chrystal, il quale, con la sua teoria idrodinamica delle

[1]) Chrystal, *Proc. R. Soc. Edinburg*, XXV, 1905, pag. 644.

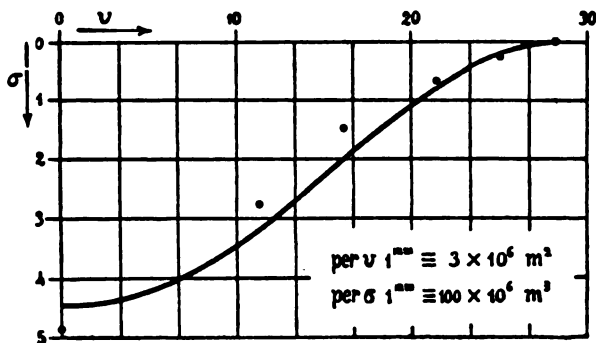
sesse [1]), ha dotato la fisica terrestre di un nuovo importante capitolo e ha aperto un vasto campo alle indagini.

Ho costruito perciò la *curva normale* del seno di Mazzara (fig. 1), cioè la curva avente per ordinate

$$\sigma(v) = A(x)\, b(x)$$

e per ascisse

$$v = \int_0^x b(x)\, dx$$

dove $A(x)$ e $b(x)$ denotano rispettivamente l'area e la lunghezza (presa alla superficie) di una sezione verticale alla distanza x dall'origine.

La scala della carta idrografica N. 186, del R. Istituto Idrografico, essendo relativamente piccola, data la piccolezza del seno di Mazzara, ho tracciato 5 sezioni verticali e ho ricavato, per mezzo dell'integrazione meccanica, i valori delle variabili σ e v. La curva rappresentativa (fig. 1) che, meglio della parabola [2]), si adatta ai valori ottenuti, è una quartica della forma

[1]) Chrystal, *Trans. R. Soc. Edimburg*, XLI, 1905. — Un'estesa esposizione della teoria di Chrystal è data nel *N. Cimento* (XX, 1910) dal dottor F. Vercelli.

[2]) Facendo, in modo analogo, il calcolo per la parabola, si ottengono valori assoluti di Δ molto grandi.

$$\text{(IV)} \qquad \sigma(v) = h\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)^2,$$

dove a è la distanza tra il punto più interno del seno e l'origine, corrispondente questa all'ordinata massima.

Posto

$$\sigma = h\,\beta$$

dove

$$\beta = \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)^2,$$

ho calcolato le σ' della quartica rappresentativa, scegliendo la costante h in modo che $\Sigma\,(\sigma - \sigma')^2$ fosse minimo, cioè, derivando,

$$h = \frac{\Sigma\,\sigma\beta}{\Sigma\,\beta^2}.$$

Si sono ottenuti così i seguenti valori:

x unità 615 m.	v unità 10^6 m²	σ unità 10^6 m²	β	β^2	$\sigma\beta$ unità 10^6 m²	σ' unità 10^6 m²	Δ $(\sigma-\sigma')\beta$
0	0	4899	1,0000	1,0000	4899,0	4399	+ 500
1	11,2	2736	0,7075	0,5006	1935,7	3112	— 266
2	16,2	1476	0,4458	0,1986	657,4	1961	— 216
3	21,4	666	0,1764	0,0311	117,5	776	— 19
4	25,0	232	0,0435	0,0019	10,1	191	+ 2
5	28,1	0	0	0	0	0	0
				1,7322	7619,7		

Perciò

$$h = \frac{\Sigma\,\sigma\beta}{\Sigma\,\beta^2} = \frac{7620 \times 10^6}{1,7322} = 4399 \times 10^6.$$

Il periodo limite dall' oscillazione di qualunque nodalità in un bacino di lunghezza doppia $2a$, simmetrico rispetto al piano verticale che limita il seno, sarebbe, secondo Chrystal,

$$\text{(V)} \qquad T = \frac{2\pi a}{\sqrt{g h}} .$$

Per $a = 28{,}1 \times 10^6\, m^2$ e $h = 4399 \times 10^6\, m^3$, si ottiene $T = 14{,}2$ minuti. Si noti che per l' esistenza di tale oscillazione — la *sessa anomala* come la chiama Chrystal — deve verificarsi la condizione che il bacino, nel punto più interno, comunichi con un canale, in modo che quivi lo spostamento orizzontale sia funzione periodica del tempo [1]). Ora appunto nel porto-canale di Mazzara, che si prolunga nel fiume Mazzaro, si osservano, durante il marrobbio, notevoli correnti orizzontali alternate.

Applicando la formola di approssimazione parabolica proposta da Endrös [2]) — autore di pregevoli e accurate ricerche sulle sesse — cioè

$$\text{(VI)} \qquad T = \frac{2\pi l}{\sqrt{2 g P}}$$

dove l è la lunghezza effettiva del seno e P la profondità massima sulla linea nodale, per $l = 3075$ m. e $P = 28$ m., si ottiene $T = 13{,}7$ minuti.

Si noti, a questo proposito, che se, con metodo analogo, nella formola

$$T = \frac{2\pi l}{\sqrt{g P}}$$

si sostituiscono i suddetti dati effettivi, ricavati dalla carta idrografica, si ottiene $T = 19{,}4$ minuti, un valore cioè che, in questo caso, non è approssimato a quello trovato con la formola esatta (V), come lo è quello ricavato con la (VI); e ciò perchè la curva ottenuta coi dati effettivi si avvicina,

[1]) Chrystal. *Proc. R. Soc. Edinburgh*, XXV, 1905, pag. 646.
[2]) Endrös Dr. Anton. *Peterm. Geogr. Mitteil.* 1908, Heft II.

nel suo complesso, più a una parabola che a una quartica dalla forma (IV).

Riassumendo, i valori calcolati di T sono:

con la formola di	Merian	(I)	16,8	minuti
» » » »	Du Boys	(III)	19,6	»
» » » »	Chrystal	(V)	14,2	»
» » » »	Endrös	(VI)	13,7	»

I periodi delle oscillazioni, ricavati dai mareogrammi di Mazzara — per quanto la piccolezza della scala dei tempi non permetta una sicura determinazione — sono molto variabili: predominano periodi tra 12 e 15 minuti, e si osservano qualche volta periodi tra 21 e 26 minuti.

La formula di Merian — nella quale la profondità media non ha un significato ben definito — e quella di Du Boys, per le ragioni dette precedentemente, dànno, in generale, valori troppo grandi di T.

I valori ottenuti col metodo di Chrystal e con quello di Endrös concordano abbastanza fra loro, e corrispondono ai valori più di frequente osservati.

Questi risultati devono però considerarsi come approssimativi, sia perchè, nel caso di Mazzara, le funzioni $A(x)$ e $b(x)$ non variano lentamente sia perchè la scala della carta idrografica è relativamente piccola. Inoltre la configurazione del fondo marino è abbastanza irregolare, e sulla linea nodale esistono due punti, distinti fra loro, di uguale massima profondità, il che potrebbe anche dar ragione della grande variabilità dei periodi.

Certo è notevole che, per un seno così largamente aperto, com'è quello di Mazzara, si trovi una sufficiente concordanza fra il periodo osservato più frequentemente e quello calcolato col metodo di Chrystal.

Comunque sia, rimane assodato che i periodi più lunghi, tra 21 e 26 minuti, non possono riferirsi a una sessa con un nodo all'imboccatura, ma lasciano suporre che sia maggiore la massa d'acqua in oscillazione. Col metodo dell'approssimazione parabolica, ammettendo un nodo in un posto corri-

spondente alla profondità di 100 m., si otterrebbe, per questi periodi, una lunghezza l di circa 9 e 12 km. rispettivamente.

Si può dunque supporre che, per i periodi più lunghi, si tratti o di onde forzate, prodotte dalle fluttuazioni quasi periodiche della pressione atmosferica durante un uragano, o di quelle onde lunghe che si generano in mare aperto per azione del vento, o di oscillazioni stazionarie plurinodali. Secondo l'ipotesi di Börgen [1]) le sesse marine possono anche considerarsi come onde di sommazione, analoghe ai suoni per sommazione di Helmholtz.

Harris distingue sei classi di sesse, delle quali le due ultime, che egli chiama *cul-de-sac seiche* e *shelving seiche*, si osservano generalmente lungo le coste aperte. Sarebbero oscillazioni per risonanza, e il loro periodo è molto variabile, specialmente nelle *shelving seiches*. Crede che questa variabilità di periodi possa spiegarsi col supporre che, secondo l'intensità della forza perturbatrice (vento, variazioni rapide della pressione barometrica, moti sismici), una massa maggiore o minore di acqua partecipi al moto, in una data stagione. Trova che per determinare approssimativamente il periodo di queste sesse si può applicare la formola di Merian.

Applicando la formola di approssimazione parabolica (Endrös) al tratto di mare fra Marsala e Favignana — considerando le oscillazioni come sesse della classe *parallel-wall seiche* di Harris [2]) — si trova un periodo di circa 30 minuti, che è appunto fra quelli osservati in Marsala, in occasione di queste ricerche.

Dirò in fine, che le sesse marine, quando raggiungono una certa ampiezza, tale da produrre effetti visibili al pubblico, sone attribuite al maremoto, indicando, con questo termine, un movimento del mare prodotto da causa sismica.

[1]) *Annalen der Hydrographie*, 1890.

[2]) Harris R. A., *Manual of tides*. Part V, pag. 467. « Report of the superintendent of the Coast and Geodetic Survey ». Washington, 1907.

Non si esclude che una delle manifestazioni del maremoto è appunto l'oscillazione, per risonanza, delle masse acquee nelle coste. Anzi Omori e Honda dimostrarono che le sesse per maremoto hanno, in generale, periodi uguali a quelli delle sesse ordinarie. Ciò fu anche confermato da me, per le stazioni italiane, in occasione del terremoto di Calabria del 1905 e della catastrofe di Messina e Reggio del 1908 [1]).

Ma questi fenomeni sismici non sono, per fortuna, frequenti. Per contro le sesse marine si possono osservare quasi sempre nelle registrazioni mareografiche, e quelle più ampie, come il marrobbio, non avvengono molto di rado; e si è visto che esse debbono ascriversi a causa meteorologica.

Catania, agosto 1911.

---

[1]) *Boll. Soc. Sism. Ital.*, XII e XIII.

SULLA DISPERSIVITÀ IN RELAZIONE AD UNA ASSEGNATA FREQUENZA.

NOTA DEL PROF. UMBERTO CISOTTI [1]).

Si consideri un dielettrico, omogeneo ed isotropo.

Sieno: **E** la forza elettrica; **H** la forza magnetica; **D** lo spostamento elettrico; **B** l'induzione megnetica; A l'inversa della velocità della luce nell'etere.

Le equazioni di Maxwell-Hertz sono, con notazioni vettoriali di manifesto significato,

$$(1) \qquad \begin{cases} A \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathbf{E} \,. \\[2ex] A \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = - \operatorname{rot} \mathbf{H} \,. \end{cases}$$

Queste equazioni presuppongono un riferimento *sinistrorso*. — Da esse, introducendo il *vettore radiante*

$$(2) \qquad \mathbf{S} = \frac{1}{4 \pi A} \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} ,$$

e posto

$$(3) \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial t} = \frac{1}{4 \pi} \left[\mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] ,$$

si deduce

$$(4) \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{S} \,.$$

Ordinariamente essendo

$$(5) \qquad \begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \,, \ \varepsilon \text{ costante dielettrica,} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \,, \ \mu \text{ permeabilità magnetica,} \end{cases}$$

[1]) *Rendiconti* Serie II, Vol. XLIV, 1911.

la (4) esprime la legge di conservazione dell'energia elettromagnetica, e Δ rappresenta la densità di energia.

In una Nota precedente [1]) ho studiato il comportamento della energia nei riguardi dei fenomeni ereditari, caratterizzati analiticamente dalle seguenti espressioni di $\mathbf{D}$ e di $\mathbf{B}$

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} + \int_{-\infty}^{t} \mathbf{E}(\tau)\, \varphi(t-\tau)\, d\tau, \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} + \int_{-\infty}^{t} \mathbf{H}(\tau)\, \psi(t-\tau)\, d\tau, \end{aligned}\right.$$

φ e ψ essendo funzioni, dell'argomento $t - \tau$, dipendenti dalla natura del mezzo.

Ed ho constatato che in generale nei fenomeni ereditari non esiste alcun mezzo il quale si comporta in modo puramente dispersivo di fronte a tutte le eccitazioni, tale cioè che la densità di energia Δ si mantiene finita, comunque varino, in modo da rimanere finite, le forze elettromagnetiche.

In questa Nota, ponendomi sotto un altro punto di vista, mi propongo di caratterizzare la dispersività di fronte a fenomeni periodici di assegnata frequenza.

Vengo in tal modo a limitare lo studio ai fenomeni periodici. — Si noti però che la preferenza è ampiamente giustificata dal fatto che la periodicità interviene veramente nei casi fisici più interessanti.

Interviene ad es. in modo essenziale nei fenomeni luminosi. Sfogliando la traduzione francese dell'eccellente trattato di Ottica del Drude, uscito proprio in questi giorni, leggo queste parole che mi piace riportare « dans la lumière, il y a *quelque chose* qui varie périodiquement autrement dit que la lumière est un PHÉNOMÈNE PÉRIODIQUE » [2]). — In partico-

[1]) « La ereditarietà lineare e i fenomeni dispersivi ». [Id., seduta dell'8 giugno 1911].

[2]) P. Drude. « Précis d'Optique », trad. francese di M. Boll [Paris, Gauthier-Villars, 1911, t. I, pag. 180].

lare è noto che i fenomeni ottici di dispersione sono intimamente legati alla frequenza delle vibrazioni.

Ciò posto ecco in qual modo può considerarsi la questione.

Siano, la forza elettrica **E** e la forza magnetica **H**, periodiche e di periodo T. — Immagino che il fenomeno abbia già raggiunto andamento di regime da un passato così remoto (teoricamente da $t = -\infty$), per cui non si faccia più sentire sensibilmente nelle polarizzazioni, elettrica e magnetica, l'influenza degli stati che precedono necessariamente quello di regime.

Una volta raggiunto il regime tutte le caratteristiche del fenomeno devono di necessità considerarsi periodiche, dello stesso periodo delle forze elettromagnetiche, e, in particolare, ciò deve accadere delle polarizzazioni **D** e **B**. Basta allora considerare il fenomeno fra due istanti di tempo che differiscono fra loro di T; fissiamo ad esempio fra gl' istanti $t = 0$ e $t = \mathrm{T}$.

In tali circostanze, seguendo il concetto di Volterra [1]) il modo più generale di dipendenza dello spostamento elettrico **D** dalla forza elettrica **E**, è quello che esprime che il valore di **D** dipende da tutti i valori che **E** assume nell' intervallo di un periodo (0, T).

Analogamente dicasi di **B** rispetto ad **H**.

D'altra parte il principio della sovrapposizione degli effetti ci assicura che la dipendenza funzionale di **D** da **E**, e parimenti quella di **B** da **H**, dev' essere lineare; ciò porta a scrivere

$$(6) \qquad \begin{cases} \mathbf{D}(t) = \varepsilon\, \mathbf{E}(t) + \int_0^{\mathrm{T}} \mathbf{E}(\tau)\, \Phi(t, \tau)\, d\tau, \\ \mathbf{B}(t) = \mu\, \mathbf{H}(t) + \int_0^{\mathrm{T}} \mathbf{H}(\tau)\, \Psi(t, \tau)\, d\tau, \end{cases}$$

[1]) Volterra. « Sulle funzioni dependenti da altre funzioni ». [*Rendic. Acc. dei Lincei*, 1887, vol. III, fasc. 4, 6, 7, 2° sem.].

$\Phi(t, \tau)$ e $\Psi(t, \tau)$ essendo due funzioni degli argomenti t e τ definite (rispetto a ciascuno dei due argomenti) in modo a priori arbitrario nell'intervallo di un periodo.

La periodicità del fenomeno esige che $\mathbf{D}(t)$ e $\mathbf{B}(t)$ sieno periodiche assieme a $\mathbf{E}(t)$ e $\mathbf{H}(t)$ [*condizione del cappio chiuso di Volterra*], per il che è necessario e basta che $\Phi(t, \tau)$ e $\Psi(t, \tau)$ sieno pure esse periodiche, rispetto all'argomento t, e di periodo T. È da notarsi che, assegnato il mezzo, Φ e Ψ non sono a ritenersi univocamente determinate (come accade per la φ e la ψ considerate nei fenomeni ereditari), ma sono eziandio subordinate alla frequenza del fenomeno.

Ciò posto, rivolgiamo l'attenzione al comportamento dell'energia.

Giova ricordare che, comunque varino, in modo da rimanere finite, la forza elettrica e la forza magnetica, *la densità Δ di energia deve mantenersi finita nei mezzi puramente dispersivi, e andare costantemente decrescendo nei mezzi assorbenti.*

Si tratta di tradurre in forma analitica queste caratteristiche intuitive. — Mi propongo cioè di discriminare, nel modo più generale, tutti i casi in cui la densità di energia si mantiene finita, in cui cioè i mezzi si comportano in modo *puramente dispersivo* di fronte a tutti i fenomeni periodici e di periodo T.

L'applicazione di un teorema del sig. J. Mercer [1]) consente anche di caratterizzare analiticamente tutti i mezzi i quali, nelle stesse circostanze, *non si comportano in modo puramente dispersivo.*

La rappresentazione analitica dei mezzi dispersivi involge due funzioni $\Phi(t, \tau)$ e $\Psi(t, \tau)$, le cui derivate rapporto a t debbono soddisfare alle condizioni di emisimmetria

$$\Phi'(t, \tau) + \Phi'(\tau, t) = 0\,, \quad \Psi'(t, \tau) + \Psi'(\tau, t) = 0\,.$$

[1]) J. Mercer. « Functions of Positive and Negative Type, and their Connection with the Theory of Integral Equations ». [*Phil. Trans. of London*, vol. CCIX (1909), pag. 415-446].

Ove sieno poi soddisfatte le ulteriori condizioni

$$\Phi(-t, -\tau) = \Phi(t, \tau), \quad \Psi(-t, -\tau) = \Psi(t, \tau)$$

si ha anche *la reversibilità nel tempo*, come nella ordinaria teoria di Maxwell-Hertz: cioè se $\mathbf{E}(t)$ e $\mathbf{H}(t)$ sono forze soddisfacenti alle equazioni indefinite del campo, anche

$$\mathbf{E}(-t) \text{ e } -\mathbf{H}(-t) \quad [\text{oppure } -\mathbf{E}(-t) \text{ e } \mathbf{H}(-t)]$$

rendono soddisfatte le equazioni stesse.

Un caso particolare notevole in cui le dette condizioni, di dispersività del mezzo e di reversibilità nel tempo, sono entrambe verificate, si ha supponendo Φ e Ψ funzioni *pari* del *solo* argomento $t - \tau$.

Si ritrovano in tal modo le formule di Abraham [1]).

Se si particolarizza ancora supponendo sinussoidali le forze elettromagnetiche, si riconosce che lo spostamento elettrico e la induzione magnetica sono legati alle corrispondenti forza elettrica e forza magnetica ancora delle classiche relazioni

$$\mathbf{D} = \varepsilon^* \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu^* \mathbf{H};$$

qui però ε^* e μ^* dipendono dalla frequenza [2]).

1. — I mezzi dispersivi e i mezzi assorbenti di fronte ad una assegnata frequenza.

Riportiamoci alla (3), e vediamo quali modificazioni intervengono quando allo spostamento elettrico $\mathbf{D}$ e alla induzione magnetica $\mathbf{B}$ si attribuiscono le espressioni (6).

[1]) Cfr. Abraham. « Sulla velocità di gruppo in un mezzo dispersivo », *Rend. del R. Ist. Lomb. di sc. e lett.* vol. XLIV, 1911, pag. 68-77.

[2]) Cfr. Abraham. Loc. cit., pag. 71.

Poichè abbiamo già indicato con Φ' e Ψ' le derivate di Φ e di Ψ rispetto a t, la (3) può scriversi

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
\Delta = \frac{1}{8\pi}[\varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{E}^2] &+ \frac{1}{4\pi}\int_{t_0}^{t} \mathbf{E}(t)\,dt \int_0^{T} \mathbf{E}(\tau)\,\Phi'(t,\tau)\,d\tau + \\
&+ \frac{1}{4\pi}\int_{t_0}^{t} \mathbf{H}(t)\,dt \int_0^{T} \mathbf{H}(\tau)\,\Psi'(t,\tau)\,d\tau ,
\end{aligned}
$$

essendo t_0 una costante a priori qualunque.

Poniamo

$$
(8)\qquad
\begin{cases}
K(t,\tau) = K(\tau,t) = \dfrac{1}{2}\,[\Phi'(t,\tau) + \Phi'(\tau,t)] , \\[2ex]
K_1(t,\tau) = K_1(\tau,t) = \dfrac{1}{2}\,[\Psi'(t,\tau) + \Psi'(\tau,t)] ,
\end{cases}
$$

e prendiamo in esame i doppi integrali

$$
(9)\qquad
\begin{cases}
I = \displaystyle\int_0^T\!\!\int_0^T \mathbf{E}(t)\times\mathbf{E}(\tau)\,\Phi'(t,\tau)\,d\tau\,dt = \int_0^T\!\!\int_0^T K(t,\tau)\,\mathbf{E}(t)\times\mathbf{E}(\tau)\,dt\,d\tau ; \\[2ex]
I_1 = \displaystyle\int_0^T\!\!\int_0^T \mathbf{H}(t)\times\mathbf{H}(\tau)\,\Psi'(t,\tau)\,d\tau\,dt = \int_0^T\!\!\int_0^T K_1(t,\tau)\,\mathbf{H}(t)\times\mathbf{H}(\tau)\,dt\,d\tau .
\end{cases}
$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè I *ed* I_1 *sieno identicamente nulli, qualunque sieno cioè la forza elettrica* $\mathbf{E}$ *e la forza magnetica* $\mathbf{H}$, *è che* $K = K_1 = 0$ [1]), *ovvero, per le* (8)

$$
(10)\qquad
\begin{cases}
\Phi'(t,\tau) + \Phi'(\tau,t) = 0 , \\
\Psi'(t,\tau) + \Psi'(\tau,t) = 0 ,
\end{cases}
\qquad
\begin{pmatrix}
0 \le t \le T , \\
0 \le \tau \le T .
\end{pmatrix}
$$

[1]) Cfr. J. Mercer. Loc. cit., pag. 426-428. — Vale la pena, data la sua semplicità, di dare una dimostrazione diretta di questo teorema.

Che la condizione sia *sufficiente* è ovvio.

Ciò posto, poichè gli integrali estesi ad un periodo T di

$$\mathbf{E}(t)\int_0^T \mathbf{E}(\tau)\,\Phi'(t,\tau)\,d\tau\,, \qquad \mathbf{H}(t)\int_0^T \mathbf{H}(\tau)\,\Psi'(t,\tau)\,d\tau$$

sono identicamente nulli quando Φ' e Ψ' soddisfano alle (10), si può dire che non esistono nelle precedenti espressioni *termini secolari,* ossia che gli integrali doppi del secondo membro della (7) variano fra limiti finiti quando t varia comunque da $-\infty$ fino a $+\infty$.

Pertanto la (4) può assumersi ancora quale espressione della legge di conservazione dell'energia.

La (7), tenuto conto delle (10), definisce nel modo più generale la densità dell'energia elettromagnetica, in un mezzo puramente dispersivo, quando il fenomeno è periodico, e T è il periodo.

Per dimostrare che la condizione è *necessaria*, prendiamo ad es. in esame il doppio integrale I.

Fissato un punto t_1, appartenente all'intervallo (O, T), si potrà sempre trovare una $\mathbf{E}(t)$ nulla in detto intervallo, tranne un intorno comunque piccolo di t_1. — Passando al limite quando tale lntorno si rinserra su t, si riconosce che deve annullarsi il prodotto $K(t_1, t_1)\,\overline{\mathbf{E}(t_1)}^2$. Poichè $\mathbf{E}(t_1) \pm 0$, affinchè sia $I = 0$ è necessario intanto che

$$K(t_1, t_1) = 0\,,$$

qualunque sia il punto t_1 dell'intervallo (O, T).

Ciò posto, fissati ora due punti t_1 e t_2, appartenenti all'intervallo (O, T) e del resto qualunque, si può sempre trovare una $\mathbf{E}(t)$, non nulla in t_1 e t_2, per cui deve essere

$$K(t_1, t_1)\,\overline{\mathbf{E}(t_1)}^2 + K(t_2, t_2)\,\overline{\mathbf{E}(t_2)}^2 + 2K(t_1\,t_2)\,\mathbf{E}(t_1) \times \mathbf{E}(t_2) = 0\,.$$

E poichè, come abbiamo visto, $K(t_1, t_1) = K(t_2, t_2) = 0$, affinchè sia $I = 0$ è necessario che si abbia, per qualunque coppia di punti t_1 e t_2 appartenenti all'intervallo (O, T).

$$K(t_1, t_2) = 0\,, \quad \text{c. d. d.}$$

J. Mercer [1]) ha stabilito un teorema che ci permette di caratterizzare anche i mezzi assorbenti.

Riprendiamo in esame i doppi integrali I e I_1 definiti dalle (9). *Condizione necessaria e sufficiente affinchè si abbia, per qualunque* **E**,

$$I \leqq 0 ,$$

è che nessuno dei numeri

$$-\int_0^T K(s_1, s_1)\, d s_1 , \int_0^T\!\!\int_0^T K\begin{pmatrix} s_1, s_2 \\ s_1, s_2 \end{pmatrix} d s_1\, d s_2 , \ldots$$

$$\ldots (-1)^n \int_0^T\!\!\int_0^T \ldots \int_0^T K\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots s_n \\ s_1, s_2, \ldots s_n \end{pmatrix} d s_1\, d s_2 \ldots d s_n ,$$

sia positivo, avendo posto

$$K\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots s_n \\ s_1, s_2, \ldots s_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(s_1, s_2) & K(s_1, s_2) \ldots & K(s_1, s_n) \\ K(s_2, s_1) & K(s_2, s_2) \ldots & K(s_2, s_n) \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ K(s_n, s_1) & K(s_n, s_2) \ldots & K(s_n, s_n) \end{vmatrix}$$

Il teorema ora enunciato non consente di discriminare il caso in cui è *essenzialmente* $I < 0$.

La cosa è però facile.

Sieno $\theta_1(\tau), \theta_2(\tau), \ldots \theta_n(\tau)$ ie *autofunzioni* relative al *nucleo* $K(t, \tau) = K(\tau, t)$ della equazione integrale

$$f(t) = p(t) - \lambda \int_0^T K(t, \tau)\, p(\tau)\, d\tau ,$$

in cui f è la funzione data e p la incognita; e sieno $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, i corrispondenti *autovalori ;* posto

$$\mathbf{e_n} = \int_0^T \theta_n(\tau)\, \mathbf{E}(\tau)\, d\tau$$

[1]) Loc. cit.

si ha [1])

$$I = \sum_{1}^{\infty} {}_n \frac{\boldsymbol{\theta}^2 n}{\lambda_n} .$$

Da questa risulta che *condizione necessaria e sufficiente affinchè sia essenzialmente* $I < 0$ *è che per tutti i valori di n,*

$$\lambda_n < 0$$

senza che sieno tutte nulle le $\boldsymbol{\theta}_n$.

Si vede tosto che per ciò *è necessario e basta che il sistema costituito dalle autofunzioni* $\theta_n(\tau)$ *di* $K(t, \tau)$ [*soddisfacente quest'ultima alle condizioni di Mercer, nelle quali è contenuta la circostanza* $\lambda_n < 0$] *sia chiuso, sia cioè tale che non esista nessuna* $\mathbf{F}(\tau)$ (*non identicamente nulla*) *per cui si abbia, per qualunque n,*

$$\int_0^T \mathbf{F}(\tau)\, \theta_n(\tau)\, d\tau = 0 \text{ [2]) } .$$

Che la condizione sia *necessaria* si constata subito, notando che se il sistema delle $\theta_n(\tau)$ non fosse chiuso esisterebbe certamente almeno una $\mathbf{E}(\tau)$ per cui

$$\boldsymbol{\theta}_n = \int_0^T \mathbf{E}(\tau)\, \theta_n(\tau)\, d\tau = 0 ,$$

per qualunque n, dal che seguirebbe $I = 0$.

Viceversa la condizione è *sufficiente,* poichè se il sistema delle $\theta_n(\tau)$ è chiuso vuol dire dire che non può esistere nessuna $\mathbf{E}(\tau)$ per cui

$$\boldsymbol{\theta}_n = \int_0^T \mathbf{E}(\tau)\, \theta_n(\tau)\, d\tau = 0 ,$$

[1]) Cfr. Schmidt. « Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen » [*Math. Ann.* B. 63, pag. 4[illegible]

[2]) Cfr. Schmidt. Loc. cit., pag. 437.

per qualunque n, cioè vi è certamente almeno una e_n diversa da zero. — Ciò autorizza ad asserire, che essendo le λ_{ii} tutte negative, è $I < 0$; c. d. d.

Le medesime conclusioni si applicano manifestamente all'integrale I_1, mediante il cambio di K in K_1.

La condizione enunciata è caratteristica perchè gli integrali estesi ad un intero periodo T, delle espressioni

$$\mathbf{E}(t)\int_0^T \mathbf{E}(\tau)\,\Phi'(t,\tau)\,d\tau\,, \qquad \mathbf{H}(t)\int_0^T \mathbf{H}(\tau)\,\Psi'(t,\tau)\,d\tau\,,$$

sieno essenzialmente *negativi*, cioè perchè le espressioni stesse contengano *termini secolari negativi*.

Ciò significa che gli integrali del secondo membro della (7) decrescono oltre ogni limite quando t cresce indefinitamente.

È questa la caratteristica energietica dei *mezzi assorbenti*.

Osservazione. — Se le funzioni Φ e Ψ soddisfano soltanto alle condizioni specificate nel teorema di Mercer (per le quali $I \leq 0$ e $I_1 \leq 0$), il mezzo sarebbe ancora *generalmente* assorbente. La parola *generalmente* sta a significare che possono esistere allora delle particolari eccitazioni, di fronte alle quali il mezzo reagisce dispersivamente.

2. — La reversibilità nel tempo.

Dalle equazioni (1), tenuto conto delle (5), scende che se $\mathbf{E}(t)$ e $\mathbf{H}(t)$ soddisfano a dette equazioni anche $\mathbf{E}(-t)$ e $-\mathbf{H}(-t)$ [oppure $-\mathbf{E}(-t)$ e $\mathbf{H}(-t)$] sono integrali delle stesse. Nella Nota precedente ho già espresso questo fatto dicendo che le equazioni di Maxwell-Hertz godono della *reversibilità nel tempo*.

Vediamo se, sostituendo alle (5) le espressioni (6), le equazioni (1) diventando in tal caso integro-differenziali, è possibile avere ancora la reversibilità nel tempo.

Si noti intanto che affinchè si abbia reversibilità nel tempo, data la dipendenza lineare di $\mathbf{D}$ da $\mathbf{E}$ e di $\mathbf{B}$ da $\mathbf{H}$ e

qualunque sieno $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$, è necessario e basta ehe cambiando $\mathbf{E}(t)$ in $\mathbf{E}(-t)$ anche $\mathbf{D}(t)$ si cangi in $\mathbf{D}(-t)$. Parimenti dicasi della relazione tra $\mathbf{B}$ e $\mathbf{H}$.

Ciò posto, basta partire ad es. dalla prima delle (6),

$$\mathbf{D}(t) = \varepsilon\,\mathbf{E}(t) + \int_0^T \mathbf{E}(\tau)\,\Phi(t,\tau)\,d\tau\,,$$

ed esprimere che, comunque varii $\mathbf{E}(t)$ nell'intervallo (O, T), la $\mathbf{D}(t)$, si cangia in $\mathbf{D}(-t)$, quando $\mathbf{E}(t)$ si sostituisce con $\mathbf{E}(-t)$.

Si ottiene così

$$\int_0^T \mathbf{E}(\tau)\,\Phi(-t,\tau)\,d\tau = \int_0^T \mathbf{E}(-\tau)\,\Phi(t,\tau)\,d\tau\,;$$

e poichè cambiando nell'integrale del primo membro τ in $-\tau$, e tenendo conto della periodicità della funzione integranda, esso può successivamente esprimersi nel modo seguente

$$\int_{-T}^0 \mathbf{E}(-\tau)\,\Phi(-t,-\tau)\,d\tau = \int_0^T \mathbf{E}(-\tau)\,\Phi(-t,-\tau)\,d\tau\,,$$

si dovrà avere

$$\int_0^T \mathbf{E}(-\tau)\,\Phi(-t,-\tau)\,d\tau = \int_0^T \mathbf{E}(-\tau)\,\Phi(t,\tau)\,d\tau\,,$$

qualuque sia $\mathbf{E}(-\tau)$, per il che è necessario e basta che sia soddisfatta la condizione seguente

$$\Phi(-t,-\tau) = \Phi(t,\tau)\,. \tag{11}$$

Parimenti avuto riguardo al magnetismo si deve avere

$$\Psi(-t,-\tau) = \Psi(t,\tau)\,. \tag{12}$$

Queste relazioni esprimono pertanto le condizioni necessarie e sufficienti affinchè le (6) conservino la proprietà che

compete alle ordinarie equazioni della elettrodinamica di essere reversibili nel tempo.

Chiameremo le (11) e (12), *condizioni di reversibilità nel tempo.*

3. — Casi particolari notevoli.

Si soddisfa, in particolare, alle condizioni (10), (11) e (12) prendendo la Φ e la Ψ funzioni *pari* dell'argomento $t - \tau$, e, naturalmente, periodiche e di periodo T.

Allora le (6) divengono

$$
(13) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\mathbf{D}(t) &= \varepsilon \, \mathbf{E}(t) + \int_0^T \mathbf{E}(\tau) \, \Phi(t-\tau) \, d\tau , \\
\mathbf{B}(t) &= \mu \, \mathbf{H}(t) + \int_0^T \mathbf{H}(\tau) \, \Psi(t-\tau) \, d\tau ,
\end{aligned}
\right.
$$

dove

$$
\Phi(t-\tau) = \Phi(\tau - t) ,
$$
$$
\Psi(t-\tau) = \Psi(\tau - t) .
$$

La densità di energia elettromagnetica, definita dalle (7), assume di conseguenza l'espressione seguente

$$
(14) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\Delta &= \frac{1}{8\pi} \{ \varepsilon \, \mathbf{E}^2 + \mu \, \mathbf{H}^2 \} + \frac{1}{4\pi} \int_{t_0}^{t} \mathbf{E}(t) \, dt \int_0^T \mathbf{E}(\tau) \, \Phi'(t-\tau) \, d\tau + \\
&\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{t_0}^{t} \mathbf{H}(t) \, dt \int_0^T \mathbf{H}(\tau) \, \Psi'(t-\tau) \, dt .
\end{aligned}
\right.
$$

Notiamo che, tenendo conto della periodicità della funzione integranda e della parità della funzione Φ, si ha successivamente

$$
\int_0^T \mathbf{E}(\tau) \, \Phi(t-\tau) \, d\tau = \int_{t-T}^{t} \mathbf{E}(t-s) \, \Phi(s) \, ds = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \mathbf{E}(t-s) \, \Phi(s) \, ds .
$$

Ora a $\mathbf{E}(t-s)$ può applicarsi lo sviluppo del Taylor nell'intervallo di integrazione (si noti che — trattandosi di un intervallo di ampiezza finita — ciò può senz'altro considerarsi legittimo).

Si ha

$$\mathbf{E}(t-s) = \mathbf{E}(t) + \sum_1^\infty {}_n (-1)^n \frac{s^n}{n!} \frac{\partial^n \mathbf{E}(t)}{\partial t^n} .$$

Per essere $\Phi(s) = \Phi(-s)$ si ha per ogni m intiero

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s^{2m+1} \Phi(s)\, ds = 0 ;$$

posto quindi

$$\alpha_0 = \varepsilon + \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \Phi(s)\, ds , \quad \alpha_{2n} = \frac{1}{\underline{2n}} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s^{2n} \Phi(s)\, ds ,$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots) ,$$

si ottiene

$$\mathbf{D}(t) = \sum_1^\infty {}_n \alpha_{2n} \frac{\partial^{2n} \mathbf{E}}{\partial t^{2n}} . \tag{15}$$

Parimenti ponendo

$$\beta_0 = \mu + \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \psi(s)\, ds , \quad \beta_{2n} = \frac{1}{\underline{2n}} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s^{2n} \psi(s)\, ds$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots) ,$$

si ha

$$\mathbf{B}(t) = \sum_1^\infty {}_n \beta_{2n} \frac{\partial^{2n} \mathbf{H}}{\partial t^{2n}} . \tag{16}$$

Le (15) e (16) coincidono colle espressioni considerate da Abraham [1]).

Si immagini, in particolare, che le forze: elettrica e magnetica, siano sinussoidali nel tempo; si prendano cioè le espressioni seguenti

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathbf{E}(t) &= \mathbf{a}\cos pt\,, \\ \mathbf{H}(t) &= \mathbf{b}\cos pt\,, \\ p &= \frac{2\pi}{T}\,, \end{aligned}\right.$$

dove **a** e **b** sono indipendenti da t.

Poichè la $\Phi(t-\tau)$ è funzione *pari* di $t-\tau$, periodica e di periodo T, finita e continua, sarà ad essa applicabile lo sviluppo di Fourier

$$\Phi(t-\tau) = \Phi_0 + \sum_1^\infty{}_n\, c_n \cos np\,(t-\tau)$$

$$= \Phi_0 + \sum_1^\infty{}_n\, c_n \left\{\cos npt \cos np\tau + \operatorname{sen} npt \operatorname{sen} np\tau\right\}.$$

Pertanto avuto riguardo alle (17) si ha

$$\int_0^T \mathbf{E}(\tau)\,\Phi(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}c_1 T\,\mathbf{a}\cos pt = \frac{1}{2}c_1 T\,\mathbf{E}\,.$$

Analogamente, chiamando d_1 il coefficiente di $\cos p\,(t-\tau)$ nello sviluppo di $\Psi(t-\tau)$ in serie di Fourier, si ottiene

$$\int_0^T \mathbf{H}(\tau)\,\Psi(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}d_1 T\,\mathbf{b}\cos pt = \frac{1}{2}d_1 T\,\mathbf{H}\,.$$

[1]) Loc. cit., formule (11) e (12).

Per questa e per la precedente, le (16) divengono

$$(18)\qquad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{D}(t) &= \left(\varepsilon + \frac{1}{2}\, c_1\, \mathrm{T}\right) \mathbf{E}(t)\,, \\ \mathbf{B}(t) &= \left(\mu = \frac{1}{2}\, d_1\, \mathrm{T}\right) \mathbf{H}(t)\,. \end{aligned} \right.$$

Abbiamo cioè che lo spostamento elettrico e la induzione magnetica sono ancora proporzionali rispettivamente alla forza elettrica ed alla forza magnetica, i coefficienti essendo però, in generale, funzioni della frequenza.

Padova, Giuguo 1911.

DEFORMAZIONE DI UNA SFERA ELASTICA DOVUTA AL SUO MOTO IN SENO AD UN LIQUIDO.

(Modello meccanico di un elettrone).

NOTA DI UMBERTO CISOTTI.

Si consideri un elettrone in moto rettilineo uniforme, e si supponga che la deformazione, cui eventualmente sottostà l'elettrone durante il moto, si possa riguardare infinitesima.

Si immagini, per fissare le idee, che l'elettrone in quiete abbia la forma sferica.

« In queste condizioni — insegna la cinematica — l'e-
« lettrone non può far altro che assumere forma ellissoidica
« (vicina in ogni caso alla forma sferica), per quanto dipen-
« dente, in modo a priori incognito, dalle circostanze del
« moto.

« Qualunque ipotesi su tale dipendenza, purchè la de-
« formazione si mantenga entro limiti abbastanza ristretti,
« può essere ragionevolmente esperita.

« Di quà le diverse meccaniche degli elettroni » [1]).

Così Abraham ha emessa l'ipotesi dell'elettrone rigido.

Lorentz ha supposto invece che l'elettrone si schiacci nel senso del moto, e precisamente detto R il raggio della sfera iniziale, essa divenga un ellissoide di rotazione avente ancora R per raggio equatoriale e $R\sqrt{1-\beta^2}$ per raggio polare (β rappresenta il rapporto tra la velocità dell'elettrone e quella della luce).

[1]) Levi-Civita. « Sulla massa elettromagnetica ». Rapporto presentato al primo congresso della Società italiana per il progresso delle Scienze (Parma, Settembre 1907) [*Nuovo Cimento*, Ottobre 1907; pag. 3-36; oppure *Rivista di Scienza*, 1907. Vol. II. N. IV; pag. 387-412].

Bucherer e Langevin hanno considerato elettroni incomprimibili soggetti alla contrazione lorentziana: R_1, R_2 essendo i raggi equatoriale e polare dell'elettrone deformato, si deve avere per l' incompressibilità $R_1^2 R_2 = R^3$, essendo $\frac{R_2}{R_1} = \sqrt{1-\beta^2}$, come nell' elettrone di Lorentz.

Infine Poincaré ha considerato un tipo di legame che comprende tutti i precedenti come casi particolari [1]).

Un' altra ipotesi, avente lo stesso diritto di cittadinanza di quelle ora enumerate, viene naturalmente suggerita dall'immagine meccanica di una sfera elastica che si muove in seno ad un liquido indefinito, e che si deforma in causa delle pressioni esercitate dal liquido sugli elementi della sua superficie. Tale immagine meccanica, che ora preciserò meglio, forma argomento della presente Nota.

La sfera elastica sia omogenea isotropa, di raggio R e dotata di una traslazione uniforme di velocità V (in valore assoluto); e il liquido indefinito, di densità eguale a 1, entro cui essa si muove, sia libero da forze.

Il moto della sfera provoca nella massa liquida un movimento le cui caratteristiche si sanno ben determinare.

In particolare si valutano agevolmente le pressioni che vengono esercitate, da parte del liquido, sugli elementi della superficie della sfera. Queste pressioni costituiscono un sistema staticamente nullo; ad esse però rimane subordinata una deformazione della sfera. Si consideri la *deformazione dinamica* cioè la differenza fra la deformazione effettiva e quella che si avrebbe *caeteris paribus* nel caso statico (*deformazione statica*).

Essa si manifesta in uno schiacciamento della sfera nel senso del moto, in modo preciso la sfera diviene un ellissoide rotondo: *il raggio equatoriale subisce un allungamento unitario*,

$$\varepsilon_e = \frac{9(7-5\sigma-8\sigma^2)V^2}{8(7+5\sigma)E},$$

[1]) Per più diffuse notizie, illustrate da considerazioni critiche, si legga il citato rapporto di Levi-Civita.

mentre *il raggio polare sottostà ad un accorciamento unitario*

$$\varepsilon_p = \frac{9(2+\sigma)V^2}{2(7+5\sigma)E};$$

entrambi *sono proporzionali al quadrato della velocità della sfera, i coefficienti costanti dipendendo soltanto dalla natura del materiale elastico di cui è costituita la sfera stessa (*E è il *modulo di Young*, σ il *rapporto di Poisson).*

Lo *schiacciamento* è

$$s = \frac{9(1+\sigma)(7-4\sigma)V^2}{8(7+5\sigma)E + 9(7-5\sigma-8\sigma^2)V^2}.$$

Conseguentemente *si ha un aumento unitario di volume*

$$\delta = \frac{9(1-2\sigma)V^2}{4E},$$

anch'esso *proporzionale al quadrato della velocità della sfera.*

Va ricordato che, in ogni caso, σ deve soddisfare alle seguenti limitazioni [1])

$$-1 < \sigma \leq \frac{1}{2}.$$

Il caso limite della *rigidità* ($E = \infty$) da l'immagine meccanica dell'elettrone di Abraham.

Se la sfera è — o può ritenersi sensibilmente — *incompressibile,* essendo allora $\sigma = \frac{1}{2}$, si ha

$$\varepsilon_e = \frac{45}{152}\frac{V^2}{E}, \quad \varepsilon_p = \frac{45}{38}\frac{V^2}{E},$$

nonchè $\delta = 0$, come nell'elettrone di Bucherer e Langevin.

Non può aversi invece il modello meccanico dell'elettrone di Lorentz.

[1]) Cfr. ad. es. Marcolongo. « Teoria matematica dello equilibrio dei corpi elastici ». [Manuali Hoepli; 1904; pag. 140].

Si esige infatti perciò, $\varepsilon_e = 0$, cioè

$$8\sigma^2 + 5\sigma - 7 = 0;$$

ora le radici di questa equazione non soddisfano alla limitazione dianzi richiamata.

§ 1.

Moto rettilineo uniforme di una sfera in un liquido indefinito.

Sia C un solido di forma sferica, immerso in un liquido S indefinitamente esteso e libero da forze di massa. La sfera C sia dotata di moto rettilineo uniforme; V sia il valore assoluto della sua velocità.

Tale movimento provoca nel liquido circostante S una perturbazione avente carattere permanente (rispetto al solido) e che si rende tanto meno sensibile quanto più ci si discosta dalla sfera C.

Introduciamo una terna di assi $O\,x\,y\,z$, che accompagna la sfera nel suo movimento, e aventi: l'origine nel centro O della sfera, l'asse z diretto nel senso opposto al moto, e gli assi x e y presi in modo da rendere la terna trirettangola sinistrorsa. Siano: R il raggio della sfera; $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ la distanza del generico punto $P(x, y, z)$ dal centro O; sarà $\rho = R$ l'equazione della superficie τ del solido in movimento. Le componenti, secondo gli assi x, y, z, della velocità della sfera sono $0, 0, -V$.

Il moto del liquido — fluido omogeneo incompressibile, la cui densità (costante) conviene assumere eguale ad uno — ha carattere permanente e, supponiamolo, *irrotazionale*.

Si è già rilevato che l'influenza del moto di C sulle particelle liquide è tanto meno sensibile quanto più ci si allontana da C; ciò è quanto dire che la velocità comunicata da C alle molecole liquide tende a zero in punti infinitamente lontani da C.

Se si ricorre al noto artifizio di imprimere a tutto il sistema (solido, liquido) una traslazione uniforme di velocità

V nel senso delle z positive, non si altera evidentemente il moto relativo delle sue parti. Allora il solido C è ridotto alla quiete, e le particelle di S a grande distanza da C scorrono con velocità limite V, nel senso delle z positive. L'aspetto del fenomeno è una corrente modificata dalla presenza della sfera immobile C.

Il problema del moto della sfera e il problema del moto della corrente sono analiticamente equivalenti. Giova riferirsi a quest' ultimo.

La sua risoluzione rientra ormai in un campo classico di questioni [1]).

Il movimento in S essendo, per ipotesi, *irrotazionale* si ha un *potenziale di velocità* $\varphi(x, y, z)$, funzione dei punti di S definita, a meno di una inessenziale costante additiva, dell' espressione seguente [2])

$$\varphi = -\frac{1}{2} V R^3 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\rho} + V z, \quad (\text{per } \rho \geq R). \tag{1}$$

In S si ha, per ipotesi, moto permanente e irrotazionale in assenza di forze di massa. Perciò detta p la pressione, indicato con $|\Delta_1 \varphi| = \left| \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2} \right|$, il valore assoluto della velocità in un generico punto, e ricordando di avere assunto eguale a 1 la densità del liquido, le equazioni idrodinamiche di Eulero si compendiano nella relazione

$$p = p_0 - \frac{1}{2} (\Delta_1 \varphi)^2 . \tag{2}$$

Si è chiamato p_0 la pressione (costante) del liquido quando è in quiete ($\Delta_1 \varphi = 0$) — *pressione idrostatica.*

Portando in (2) l' espressione (1) di φ si ottiene la pressione definita in ogni punto di S mediante i dati della questione: il raggio R della sfera, e la velocità V,

[1]) Cfr. ad es. Maggi. « Principii della teoria matematica del movimento dei corpi ». [Milano; Hoepli; 1896; § 557].

[2]) Cfr. Maggi, loc. cit., salvo lo scambio di z in $-z$.

$$(3) \qquad p = p_0 - \frac{V^2 R^3}{2 \rho^3} \left\{ 3 \left[\frac{1}{4} \frac{R^3}{\rho^3} - 1 \right] \frac{z^2}{\rho^2} + \frac{1}{4} \frac{R^3}{\rho^3} + \frac{\rho^3}{R^3} + 1 \right\}.$$

In particolare, chiamando p_τ il valore della pressione in un generico punto della superficie sferica τ, si ricava dalla precedente, ponendovi $\rho = R$,

$$(4) \qquad p_\tau = p_0 - \frac{9}{8}\left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right) V^2.$$

Osservazioni. — Dalla (4), che caratterizza la distribuzione delle pressioni esercitate sugli elementi $d\tau$ della superficie sferica τ, scende intanto che le pressioni sono eguali, in valore assoluto, in punti opposti rispetto al centro della sfera; essendo inoltre dirette tutte verso il centro stesso, costituiscono un sistema di forze che si equilibrano. — Si ritrova in tal modo il *paradosso di d' Alembert: per una sfera dotata di moto rettilineo uniforme in un liquido, sono nulli la risultante ed il momento risultante delle pressioni esercitate dal liquido sulla sfera.*

Non è privo di interesse rilevare che vi sono soltanto due punti della superficie ($z = +R$, $z = -R$) in cui $p_\tau = p_0$ nei quali cioè la *pressione idrodinamica* coincide colla *pressione idrostatica*: essi sono il punto più avanzato *(prora)* e il punto opposto *(poppa)*. — Nei punti di τ appartenenti all' equatore ($z = 0$) la pressione idrodinamica raggiunge il minimo valore $p_0 - \frac{9}{8} V^2$.

§ 2.

Deformazione statica.

La sfera C sia costituita di materiale elastico, omogeneo ed isotropo, e sia in quiete. — Naturalmente anche il liquido S, in cui è immersa la sfera, è in quiete. Poichè è allora $V = 0$, dalla (4) si ha $p_\tau = p_0$.

La sfera è in tal caso sottoposta ad un complesso di pressioni radiali, uniformemente distribuite sulla sua superficie τ. In queste condizioni la sfera elastica subisce una con-

trazione simmetrica rispetto al suo centro, si deforma cioè, in un' altra sfera di raggio $R_0 < R$, ricavabile immediatamente.

Sarà a dirsi *deformazione statica* tale deformazione subita dalla sfera elastica, dovuta soltanto alla sua immersione nel liquido in quiete.

Contrazione della sfera. — Il volume iniziale della sfera è $\frac{4}{3} \pi R^3$; dopo l' immersione il suo volume diviene $\frac{4}{3} \pi R_0^3$. — La diminuzione totale di volume è data da [1])

$$\frac{4}{3} \pi (R^3 - R_0^3) = \frac{4 \pi (1 - 2 \sigma) p_0 R^3}{E},$$

dove E e σ designano costanti elastiche, dipendenti dalla natura del materiale di cui è costituita la sfera: E è il *modulo di Young*, e σ il *rapporto di Poisson*. — Chiamando δ_0 *la diminuzione per unità di volume*, cioè ponendo

$$\delta_0 = \frac{R^3 - R_0^3}{R^3}, \tag{5}$$

si ha

$$\delta_0 = \frac{3 (1 - 2 \sigma) p_0}{E}. \tag{6}$$

Sia

$$\varepsilon = \frac{R - R_0}{R} \tag{7}$$

la contrazione radiale unitaria. — Poichè, com' è ben noto [e come del resto scende immediatamente da (5) e (7), trascurando le quantità d'ordine superiore al primo in ε] $\delta_0 = 3 \varepsilon$, dalla (6) si trae

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \delta_0 = \frac{1 - 2 \sigma}{E} p_0. \tag{8}$$

[1]) Cfr. ad es. Cesaro. « Introduzione alla teoria matematica della elasticità » [Torino; fratelli Bocca; 1894; pag. 47 oppure pag. 69]. — È da notarsi che ivi sono assunte come costanti elastiche le quantità A e B legate alle nostre E e σ delle relazioni $A = \frac{1 - \sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} E$, $B = \frac{E}{2(1 + \sigma)}$.

Resta così caratterizzata in modo completo la *deformazione statica* della sfera.

§ 3.

Deformazione dinamica.

Immaginiamo ora la sfera in moto rettilineo uniforme. — Allora, come si è già notato [§ 1], essa è sottoposta sulla sua superficie τ ad un complesso di pressioni normali

$$p_\tau = p_0 - \frac{9}{8}\left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right)V^2,$$

che sono staticamente equivalenti a zero, ma non uniformemente distribuite.

A causa di queste pressioni la sfera subisce una deformazione, che mi propongo di caratterizzare. — In modo preciso, si noti che la espressione di p_τ si presenta come somma di due termini: uno è p_0 al quale corrisponde la *deformazione statica*, di cui ci siamo occupati nel § precedente, e l'altro è $-\frac{9}{8}\left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right)V^2$, che dipende essenzialmente dalle condizioni dinamiche.

La azione *dinamica* esercitata dal liquido sugli elementi di τ è rappresentata da

$$(9) \qquad p_\tau - p_0 = -\frac{9}{8}\left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right)V^2.$$

Si tratta, come si vede, di una distribuzione di *tensioni* normali: nulle a *prora* e a *poppa* ($z = +R$, $z = -R$) e che vanno aumentando, in valore assoluto, fino ad un massimo di $\frac{9}{8}V^2$, che viene raggiunto all'equatore ($z = 0$). — La corrispondente deformazione della sfera sarà a dirsi *deformazione dinamica*.

Spostamenti. — Assumiamo un sistema di coordinate cilindriche r, θ, z, essendo Oz l'asse comune ai cilindri $r =$ costante. — Sieno u, rv, w le componenti, secondo le tan-

genti alle rispettive linee coordinate, dello spostamento del generico punto $P(r, \theta, z)$.

Per quanto si è visto la sfera è sottoposta sopra la superficie τ alle tensioni normali (9). — Dette $-F_1, -rF_2, -F_3$ le componenti di queste tensioni, si ha sopra τ

$$(10)\quad F_1 = \frac{9}{8}\left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right) V^2 \frac{r}{R}, \; F_2 = 0, \; F_3 = \frac{9}{8}\left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right) V^2 \frac{z}{R};$$

ovvero, posto

$$(11)\qquad \frac{z}{\rho} = \gamma, \quad \text{dove } \rho = \sqrt{r^2 + z^2},$$

e introducendo i polinomi di *Legendre* relativi al parametro γ,

$$P_0 = 1, \quad P_1 = \gamma, \quad P_2 = \frac{3\gamma^2 - 1}{2} \ldots,$$

$$(12)\qquad F_1 = \frac{3}{4}(1 - P_2) V^2 \frac{r}{R}, \; F_2 = 0,$$

$$F_3 = \frac{3}{4}(1 - P_2) V^2 \frac{z}{R}, \quad \text{per } \rho = R.$$

In tali condizioni la teoria generale dell' equilibrio di una sfera elastica isotropa, sottoposta a date tensioni in superficie, porge per le componenti degli spostamenti le seguenti espressioni [1])

$$(13)\quad u = (a\rho^2 + b + c\rho^2 P_2) r, \; v = 0, \; w = (a_1\rho^2 + b_1 + c\rho^2 P_2) z,$$

dove

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} & a = -\frac{1}{2} a_1 = \frac{3(1+\sigma)(4\sigma - 7)V^2}{8(7+5\sigma)ER^2}, \quad b = \frac{9(7 - 3\sigma - 6\sigma^2)V^2}{8(7+5\sigma)E} \\ & b_1 + \frac{-9\sigma(3+2\sigma)V^2}{2(7+5\sigma)E}, \quad c = -\frac{3(1+\sigma)(7 - 10\sigma)V^2}{4(7+5\sigma)ER^2}, \end{aligned} \right.$$

[1]) Cfr. Love. « A Treatise on the matematical Theory of Elasticity » [Cambridge; University Press; 1906, art. 177], cfr. anche Lauricella « Sulla deformazione di una sfera elastica isotropa per date tensioni in superficie ». [*Nuovo Cimento.* Volume V; gennaio 1903].

essendo E e σ le solite costanti elastiche che abbiamo già avuto occasione di introdurre [cfr. § 2].

Come si vede le (13) non definiscono una deformazione *omogenea*; si presenta però la notevole circostanza che anche nel caso presente, la sfera si deforma in un ellissoide. Ciò si deve al fatto che i coefficienti di P_2 in $\frac{u}{r}$ e $\frac{w}{z}$ sono eguali.

Ellissoide di deformazione dinamica. — Poichè, come risulta dalle (13), in tutte le sezioni meridiane si ha lo stesso comportamento, corrispondendosi i punti di un medesimo parallelo, basterà aver riguardo alla deformazione che avviene in un generico meridiano, ad esempio nel piano meridiano iniziale $\theta = 0$.

Posto allora

$$r = \rho \cos \psi, \quad z = \rho \operatorname{sen} \psi, \tag{15}$$

le componenti u, w, degli spostamenti dei punti di questo piano sono, per le (13),

$$u = \rho(a\rho^2 + b + c\rho^2 P_2)\cos\psi, \quad w = \rho(a_1\rho^2 + b_1 + c\rho^2 P_2)\operatorname{sen}\psi. \tag{13'}$$

In particolare, a causa della deformazione, i punti appartenenti inizialmente al contorno $\rho = R$, si porteranno ad una distanza ρ dal centro O definita dalla relazione

$$\rho^2 = (R\cos\psi + u)^2 + (R\operatorname{sen}\psi + w)^2 = R^2 \left\{ \left(\cos\psi + \frac{u}{R}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\operatorname{sen}\psi + \frac{w}{R}\right)^2 \right\},$$

ovvero, poichè sono da trascurarsi i termini di grado superiore al primo in $\frac{u}{R}$ e $\frac{w}{R}$,

$$\rho^2 = R^2 \left(1 + 2\frac{u}{R}\cos\psi + 2\frac{w}{R}\operatorname{sen}\psi\right).$$

Da questa elevando ambo i membri alla potenza -1 si ha, colla solita approssimazione,

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{R^2}\left(1 - 2\frac{u}{R}\cos\psi - 2\frac{w}{R}\operatorname{sen}\psi\right),$$

dove, per le (13')

$$\frac{u}{R}=(aR^2+b+cR^2P_2)\cos\psi\,,\quad \frac{w}{R}=(a_1R^2+b_1+cR^2P_2)\operatorname{sen}\psi\,;$$

avremo quindi, sostituendo nella precedente e notando che $\gamma=\operatorname{sen}\psi$ e quindi $P_2=\frac{3\operatorname{sen}^2\psi-1}{2}$ e che $a_1=-2a$,

$$(16)\qquad \frac{1}{\rho^2}=\frac{1}{R^2}\{[1-(2a-c)R^2-2b]\cos^2\psi+$$
$$+[1+2(2a-c)R^2-2b_1]\operatorname{sen}^2\psi\}\,;$$

questa è l'equazione della sezione meridiana della sfera deformata.

La (16) è l'equazione di una ellisse i cui semiassi A e B sono rispettivamente

$$A=R\{1-(2a-c)R^2-2b\}^{-\frac{1}{2}}=R\left\{1+\frac{1}{2}(2a-c)R^2+b\right\},$$

$$B=R\{1+2(2a-c)R^2-2b_1\}^{-\frac{1}{2}}=R\{1-(2a-c)R^2+b_1\},$$

ovvero sostituendo ad a, b, b_1, c le loro espressioni (14),

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} A&=R\left\{1+\frac{9(7-5\sigma-8\sigma^2)V^2}{8(7+5\sigma)E}\right\},\\ B&=R\left\{1-\frac{9\sigma(2+\sigma)V^2}{2(7+5\sigma)E}\right\}.\end{aligned}\right.$$

La sfera si deforma adunque in un ellissoide rotondo schiacciato nel senso del moto.

SCHIACCIAMENTO. — Lo schiacciamento $s=\frac{A-B}{A}$ ha per espressione

$$(18)\qquad s=\frac{9(1+\sigma)(7-4\sigma)V^2}{8(7+5\sigma)E+9(7-5\sigma-8\sigma^2)V^2}\,.$$

VARIAZIONI UNITARIE DEI RAGGI EQUATORIALE E POLARE. — L'allungamento ε_e subito dal raggio equatoriale, riferito

all' unità di lunghezza, cioè il rapporto $\frac{A-R}{R}$, ha per espressione

$$(19) \qquad \varepsilon_e = \frac{9(7-5\sigma-8\sigma^2)V^2}{8(7+5\sigma)E};$$

invece l' accorciamento unitario $\varepsilon_p = \frac{R-B}{R}$, del raggio polare è

$$(20) \qquad \varepsilon_p = \frac{9\sigma(2+\sigma)V^2}{2(7+5\sigma)E}.$$

Le variazioni, riferite all' unità di lunghezza, del raggio equatoriale e del raggio polare sono entrambe proporzionali al quadrato della velocità della sfera.

VARIAZIONE DI VOLUME. — Il volume dell' ellissoide di deformazione, tenuto conto delle quantità di primo ordine soltanto, è

$$\frac{4}{3}\pi A^2 B = \frac{4}{3}\pi R^3 \left\{ 1 + \frac{9(1-2\sigma)V^2}{4E} \right\}.$$

Chiamando δ l' aumento unitario di volume, cioè il rapporto $\frac{A^2B-R^3}{R^3}$, si ha

$$(21) \qquad \delta = \frac{9(1-2\sigma)V^2}{4E}.$$

Anche *la dilatazione unitaria di volume è proporzionale al quadrato della velocità della sfera.*

LE MIE ESPERIENZE E QUELLE DI EDOARDO BRANLY SULLA CONDUTTIVITÀ ELETTRICA DELLE LIMATURE METALLICHE.

Nota del Prof. TEMISTOCLE CALZECCHI-ONESTI [1]).

Quando Guglielmo Marconi mostrò di avere ottenuto risultati molto notevoli col suo sistema di telegrafia senza fili, gli studiosi dei diversi paesi tentarono di fare la storia delle ricerche che avevano condotto al coherer, tubetto di vetro a limatura che aveva reso possibile la nuova telegrafia. In Italia il Prof. Giulio Tolomei, con un lungo articolo e con citazioni tolte dalle mie esperienze, per il primo, nella *Rivista Scientifica e Industriale* di Firenze, anno XXIX n.i 8-9, dimostrò che a me e non ad altri doveva attribuirsi la scoperta del coherer. Invitato dall'illustre Prof. Angelo Battelli, io, con una lettera stampata nel giornale: *Il Nuovo Cimento*, rammentai nel 1897 brevemente le mie ricerche e lo stesso feci in una delle sedute della Società italiana di Fisica adunatasi per la prima volta a Roma nel settembre del 1897 [2]).

[1]) Il *Nuovo Cimento*, serie 3ª vol. XVI, fascicoli di luglio, agosto e settembre 1884; serie 3ª, vol. XVII, fascicoli di gennaio e febbraio 1885; serie 3ª, vol. XX, fascicolo di luglio-agosto 1886; serie 3ª, vol. XX, fascicoli di settembre e ottobre 1886; *Journal de Physique théorique et appliquée*, 1886 tom. V, pag. 573 (Bouty), tom. VI, pag 589 (Bouty), tom. VI, pag. 553 (Bouty).

[2]) Il Sig. ing. Camillo Olivetti più tardi, e precisamente nel 1899, dimostrò nell'*Electrical World and Engineer* nel n. 23, 2 dicembre, che il coherer era uscito dalle mie esperienze. Egli poneva termine al suo articolo con queste parole: « Io credo di aver dimostrato che nel 1884 (sei anni prima di Branly) il Prof. Calzecchi-Onesti non solamente inventava il coherer, ma studiava scientificamente le sue proprietà e le cause del fenomeno e ch'egli aveva nel 1886 fatto una pratica applicazione dell'apparecchio. L'opera del Prof. Calzecchi fu notata ed apprezzata nei *Wiedemann's Annalen* (N. F. XXVIII, 1886) dal Prof. Auerbach ed essendo ori-

Poco a poco, cedendo all'evidenza dei fatti, anche in Francia nei libri speciali, si cominciò ad ammettere che una parte l'avessi anche io in quelle esperienze che prepararono il coherer, ma una parte piccola, vaga, insignificante [1]).

Recentemente, quando l'Accademia francese eleggeva fra i suoi membri Edoardo Branly, in Francia fu ripetuto ch'egli doveva essere considerato l'inventore del coherer. E la voce francese si fece sentire anche in uno dei giornali politici di Milano e per più numeri. Di questa polemica non si dovrebbe far qui menzione se non la rendesse in qualche modo interessante l'intervento del dottor Etienne Branly, parente forse al nuovo accademico.

Ripubblicherò presto le mie note stampate negli anni 1884, 1885, 1886 nel giornale *Il Nuovo Cimento*, con la versione in francese, seguite da alcune osservazioni, perchè sono persuaso che se la verità durò tanta fatica e la dura ancora a farsi strada, ciò si deve al fatto che la nostra lingua non è generalmente conosciuta dagli studiosi stranieri.

Qui mi propongo di fare un parallelo fra le esperienze di Edoardo Branly e le mie, limitandomi a quanto occorre per provare che il coherer è uscito dai miei studi e che i risultati proclamati, almeno cinque anni più tardi, dal fisico francese non sono nuovi, ma sono una ripetizione di quelli segnalati da me [2]).

L'ordine seguito da Branly nelle sue ricerche appare diverso dal mio, in principio: egli subito descrive l'influenza che ha sulla sostanza sensibile la scintilla, che si ot-

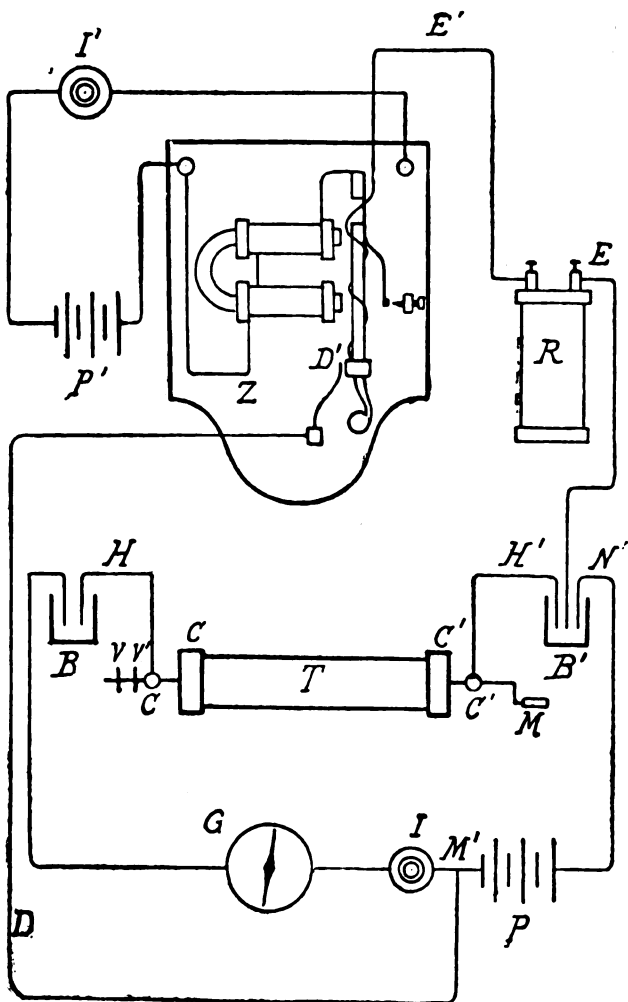
---

ginariamente stata stampata in uno dei più vecchi e più conosciuti giornali scientifici europei, non vi è dubbio che senz'altro egli abbia il diritto di essere considerato l'inventore del coherer ».

[1]) André Broca, *La télégraphie sans fils*, deuxième édition. Paris, Gauthier-Villars, 1904, pag. 107 e 122.

[2]) È giusto qui rammentare quello che ho imparato leggendo il bel libro di Augusto Righi e Bernardo Dessau. *La telegrafia senza filo*, 2ª edizione, Bologna, Zanichelli, 1905. Nel 1838 Munck af Rosenschöld osservò l'influenza delle scariche o della corrente elettrica sulla conduttività delle polveri metalliche e pubblicò le sue osservazioni nei *Pogg.*, *Ann.* tom. 43, pag. 193, 1838.

tiene scaricando una bottiglia di Leyda; io, che mi proponevo di studiare in genere la conduttività elettrica delle limature metalliche e poi, in particolare la *densità critica*, cioè la quan-

tità in peso per la quale, nelle condizioni di capacità del cannellino, la limatura non conduce più, mi avvidi che interrompendo il circuito del quale la limatura faceva parte, la limatura stessa diveniva conduttrice e ne trovai la ragione

nella scintilla di estracorrente prodottasi prima per opera del rocchetto del telefono e poi per opera di quel rocchetto che sostituii al telefono.

La figura mostra la disposizione da me adottata per porre in evidenza l'azione della scintilla dovuta all'estracorrente nel mentre che, messo sull'avviso dal fatto nuovo, andava provando le altre influenze. Ecco le testuali parole che si leggono nella mia seconda nota: « T è un cannellino di ebanite « o di vetro chiuso alle estremità dai due cappelletti cilin- « drici C, C', il primo dei quali può togliersi girando con- « venientemente la vite V; per mezzo della manovella M, il « cannellino può girare attorno all'asse C C', sostenuto dalle « colonne metalliche C e C' ed è messo nel circuito della « pila P e del galvanometro G, mediante i due grossi fili H « ed H' che vanno a pescare nel mercurio contenuto nei due « bicchieri B e B'. Il circuito P N' B' T B G I M' P, che per « semplicità indicherò con A, è sempre chiuso per mezzo « dell'interruttore o bottone I ed il circuito P N' B' E R E' F « D' D M' P, che nominerò con A', è sempre chiuso in virtù « dell'interruttore Z. Una pila P' ed un interruttore o bot- « tone I' servono per fare agire l'interruttore Z ».

Ad ogni interruzione del circuito A' in D' si produce una scintilla alla quale è dovuto il cambiamento che si opera nella limatura: la scintilla in D' deriva dal rocchetto R: un altra, indipendente affatto, si produce a causa della spirale magnetizzante dell'interruttore Z.

Il punto di partenza del Branly mi è sempre apparso strano: egli proclama i suoi studi assolutamente nuovi, perciò non cita alcun nome, nè accenna in alcun modo a lavori precedenti e poi parla, di punto in bianco, dell'influenza della scintilla. A chi legge però, il suo lavoro appare la continuazione di un altro lavoro [1]).

[1]) I. I. Fahie, che pur dà tanta lode al Branly, mostra di ritenere che le mie esperienze fossero note al fisico francese quando scrive: « Qui io debbo solamente dire che Branly verificò ed estese le osservazioni di Calzecchi-Onesti ». *A History of wireless Telegraphy by* I. I. Fahie. Edinburg and London, 1902.

Il cammino che io ho seguito è quello di chi va trovando cose nuove le quali lo soffermano, lo consigliano, lo dirigono.

Ma esaminiamo obbiettivamente le due serie di esperienze.

1. *Dalle Memorie di Edoardo Branly* [1]) — « Io comin-« cio, egli dice, col descrivere questa azione che permette di « presentare il fenomeno sotto una forma meravigliosa. Di un « circuito fanno parte una pila, un galvanometro ed una pol-« vere metallica versata in un tubo di ebanite: ad una certa « distanza si produce la scarica di una bottiglia di Leyda o « di una macchina elettrica munita di condensatore: l'ago del « galvanometro è bruscamente deviato dalla sua posizione di « equilibrio, ciò che mostra che la polvere è divenuta con-« duttrice. Si può ottenere lo stesso effetto, ponendo in vici-« nanza del circuito una sfera vuota conduttrice isolata alla « quale si accosta un bastone di ebanite elettrizzata; allo « scoccare della piccola scintilla, la polvere diminuisce subi-« tamente di resistenza ed il galvanometro devia ».

Dalle mie esperienze. — Nella mia prima nota ho scritto: « Si può fare acquistare la conduttività alle diverse limature « mettendo una delle ghiere in comunicazione, per mezzo « anche di un filo molto lungo e sottile, con uno dei condut-« tori della macchina di Holtz o di un'altra macchina elet-« trica qualunque. La conduttività, in tal modo acquistata, è « tale che non solo dura per moltissimo tempo e non si to-« glie completamente che imprimendo al cannellino di vetro « due o tre giri, ma distrugge per molta parte la resistenza « della limatura. *Sottoponendo l'apparecchio all'influenza di « un corpo elettrizzato, la limatura acquista la detta proprietà « ma in grado molto minore* ». E nelle conclusioni, alla fine della seconda nota, si trova scritto: « Un certo numero d'in-« terruzioni, fatte nel modo che si è detto, una o più correnti « indotte, la comunicazione con un corpo elettrizzato, l'*indu-*

[1]) *La Lumière Electrique*, XIII année, tome XL, pag. 301, 506; tome XXXIX, pag. 240, 1891. — *Comptes rendus*, tome CXII, pag. 90. — *Comptes rendus du Congrès scientifique international des catholiques, tenu à Paris du 1^{er} au 6 avril 1891*. pag. 116.

« *zione elettrostatica,* bastano per fare acquistare alla lima-
« tura la conduttività che non aveva. ».

Io dunque adoperava la macchina di Holtz e in due maniere riusciva ad agire sulla sostanza sensibile, o elettrizzandola, o agendo sopra di essa per induzione: questa seconda maniera è quella seguita dal Branly scaricando una bottiglia di Leyda in vicinanza del circuito della sostanza sensibile: la macchina di Holtz era munita di condensatori [1]).

2. *Dalle Memorie di Edoardo Branly.* — Azione di un conduttore traversato dalle correnti di scarica di un condensatore. — Il Branly interpone tra la sostanza sensibile e un condensatore un lungo conduttore e, scaricando il condensatore, riesce a rendere conduttrice la limatura metallica. Io non mi sono valso nè di questa nè di una disposizione simile: si tratta evidentemente anche qui di un effetto induttivo.

3. *Dalle Memorie di Edoardo Branly.* — « Elettrizza-
« zione per contatto con l'una delle armature di una botti-
« glia di Leyda ».

Dalle mie esperienze. — Al N. 1 ho parlato delle esperienze da me fatte che non differiscono da queste del Branly. Vi è l'azione del condensatore, quando la macchina adoperata è quella di Holtz; vi è di più l'azione trasmessa dal filo dello stato elettrico di un conduttore semplice nel caso che la macchina elettrica non sia munita di condensatori. Ma un conduttore semplice elettrizzato non differisce da un condensatore che per la capacità e perciò, a parità di potenziale, per la quantità di elettricità in esso raccolta e distribuita.

4. *Dalle Memorie di Edoardo Branly.* — Passaggio di una corrente indotta.

« Nel circuito indotto di un apparecchio a carrello di
« Dubois Reymond s'intercala un tubo a limatura, un ele-
« mento Daniell ed un galvanometro, poi si fa passare una

[1]) « Il Prof. Calzecchi ripetette le esperienze con varie polveri e limature di metalli e finì col mostrare che rapide interruzioni di un circuito contenente un rocchetto d'induzione, il contatto con un corpo elettrizzato e le **scariche elettrostatiche** erano sufficienti a fare conduttrici le limature » I. I. Fahie, *A History of wireless Telegraphy,* Third edition revised. London, 1902.

« corrente nel circuito induttore. Basta, in generale, una sola
« chiusura o una sola apertura del circuito induttore per per-
« mettere alla corrente dell'elemento Daniell di traversare
« facilmente la limatura ».

Dalle mie esperienze. — Nella mia seconda nota sulla conduttività elettrica delle limature metalliche si legge: « Un « fatto notevole, e che conferma essere la forza elettromotrice

nella scintilla di estracorrente prodottasi prima per opera del rocchetto del telefono e poi per opera di quel rocchetto che sostituii al telefono.

La figura mostra la disposizione da me adottata per porre in evidenza l'azione della scintilla dovuta all'estracorrente nel mentre che, messo sull'avviso dal fatto nuovo, andava provando le altre influenze. Ecco le testuali parole che si leggono nella mia seconda nota: « T è un cannellino di ebanite « o di vetro chiuso alle estremità dai due cappelletti cilin- « drici C, C', il primo dei quali può togliersi girando con- « venientemente la vite V; per mezzo della manovella M, il « cannellino può girare attorno all'asse C C', sostenuto dalle « colonne metalliche C e C' ed è messo nel circuito della « pila P e del galvanometro G, mediante i due grossi fili H « ed H' che vanno a pescare nel mercurio contenuto nei due « bicchieri B e B'. Il circuito P N' B' T B G I M' P, che per « semplicità indicherò con A, è sempre chiuso per mezzo « dell'interruttore o bottone I ed il circuito P N' B' E R E' F « D' D M' P, che nominerò con A', è sempre chiuso in virtù « dell'interruttore Z. Una pila P' ed un interruttore o bot- « tone I' servono per fare agire l'interruttore Z ».

Ad ogni interruzione del circuito A' in D' si produce una scintilla alla quale è dovuto il cambiamento che si opera nella limatura: la scintilla in D' deriva dal rocchetto R: un altra, indipendente affatto, si produce a causa della spirale magnetizzante dell'interruttore Z.

Il punto di partenza del Branly mi è sempre apparso strano: egli proclama i suoi studi assolutamente nuovi, perciò non cita alcun nome, nè accenna in alcun modo a lavori precedenti e poi parla, di punto in bianco, dell'influenza della scintilla. A chi legge però, il suo lavoro appare la continuazione di un altro lavoro [1]).

[1]) I. I. Fahie, che pur dà tanta lode al Branly, mostra di ritenere che le mie esperienze fossero note al fisico francese quando scrive: « Qui io debbo solamente dire che Branly verificò ed estese le osservazioni di Calzecchi - Onesti ». *A History of wireless Telegraphy by* I. I. Fahie. Edinburg and London, 1902.

Il cammino che io ho seguito è quello di chi va trovando cose nuove le quali lo soffermano, lo consigliano, lo dirigono.

Ma esaminiamo obbiettivamente le due serie di esperienze.

1. *Dalle Memorie di Edoardo Branly* [1]) — « Io comin-« cio, egli dice, col descrivere questa azione che permette di « presentare il fenomeno sotto una forma meravigliosa. Di un « circuito fanno parte una pila, un galvanometro ed una pol-« vere metallica versata in un tubo di ebanite: ad una certa « distanza si produce la scarica di una bottiglia di Leyda o « di una macchina elettrica munita di condensatore: l'ago del « galvanometro è bruscamente deviato dalla sua posizione di « equilibrio, ciò che mostra che la polvere è divenuta con-« duttrice. Si può ottenere lo stesso effetto, ponendo in vici-« nanza del circuito una sfera vuota conduttrice isolata alla « quale si accosta un bastone di ebanite elettrizzata; allo « scoccare della piccola scintilla, la polvere diminuisce subi-« tamente di resistenza ed il galvanometro devia ».

Dalle mie esperienze. — Nella mia prima nota ho scritto: « Si può fare acquistare la conduttività alle diverse limature « mettendo una delle ghiere in comunicazione, per mezzo « anche di un filo molto lungo e sottile, con uno dei condut-« tori della macchina di Holtz o di un'altra macchina elet-« trica qualunque. La conduttività, in tal modo acquistata, è « tale che non solo dura per moltissimo tempo e non si to-« glie completamente che imprimendo al cannellino di vetro « due o tre giri, ma distrugge per molta parte la resistenza « della limatura. *Sottoponendo l'apparecchio all'influenza di « un corpo elettrizzato, la limatura acquista la detta proprietà « ma in grado molto minore* ». E nelle conclusioni, alla fine della seconda nota, si trova scritto: « Un certo numero d'in-« terruzioni, fatte nel modo che si è detto, una o più correnti « indotte, la comunicazione con un corpo elettrizzato, l'*indu-*

[1]) *La Lumière Electrique*, XIII année, tome XL, pag. 301, 506; tome XXXIX, pag. 240, 1891. — *Comptes rendus*, tome CXII, pag. 90. — *Comptes rendus du Congrès scientifique international des catholiques, tenu à Paris du 1re au 6 avril 1891*. pag. 116.

« *zione elettrostatica,* bastano per fare acquistare alla lima-
« tura la conduttività che non aveva. ».

Io dunque adoperava la macchina di Holtz e in due maniere riusciva ad agire sulla sostanza sensibile, o elettrizzandola, o agendo sopra di essa per induzione: questa seconda maniera è quella seguita dal Branly scaricando una bottiglia di Leyda in vicinanza del circuito della sostanza sensibile: la macchina di Holtz era munita di condensatori [1]).

2. *Dalle Memorie di Edoardo Branly.* — Azione di un conduttore traversato dalle correnti di scarica di un condensatore. — Il Branly interpone tra la sostanza sensibile e un condensatore un lungo conduttore e, scaricando il condensatore, riesce a rendere conduttrice la limatura metallica. Io non mi sono valso nè di questa nè di una disposizione simile: si tratta evidentemente anche qui di un effetto induttivo.

3. *Dalle Memorie di Edoardo Branly.* — « Elettrizza-
« zione per contatto con l'una delle armature di una botti-
« glia di Leyda ».

Dalle mie esperienze. — Al N. 1 ho parlato delle esperienze da me fatte che non differiscono da queste del Branly. Vi è l'azione del condensatore, quando la macchina adoperata è quella di Holtz; vi è di più l'azione trasmessa dal filo dello stato elettrico di un conduttore semplice nel caso che la macchina elettrica non sia munita di condensatori. Ma un conduttore semplice elettrizzato non differisce da un condensatore che per la capacità e perciò, a parità di potenziale, per la quantità di elettricità in esso raccolta e distribuita.

4. *Dalle Memorie di Edoardo Branly.* — Passaggio di una corrente indotta.

« Nel circuito indotto di un apparecchio a carrello di
« Dubois Reymond s'intercala un tubo a limatura, un ele-
« mento Daniell ed un galvanometro, poi si fa passare una

[1]) « Il Prof. Calzecchi ripetette le esperienze con varie polveri e limature di metalli e fini col mostrare che rapide interruzioni di un circuito contenente un rocchetto d'induzione, il contatto con un corpo elettrizzato e le **scariche elettrostatiche** erano sufficienti a fare conduttrici le limature » I. I. Fahie, *A History of wireless Telegraphy,* Third edition revised. London, 1902.

« corrente nel circuito induttore. Basta, in generale, una sola
« chiusura o una sola apertura del circuito induttore per per-
« mettere alla corrente dell'elemento Daniell di traversare
« facilmente la limatura ».

Dalle mie esperienze. — Nella mia seconda nota sulla conduttività elettrica delle limature metalliche si legge: « Un « fatto notevole, e che conferma essere la forza elettromotrice

« d'induzione molto più grande di quella della pila e para-
« gonabile alla forza elettromotrice delle macchine elettriche,
« è facile riscontrare con l'accennata disposizione. Allorchè il
« rocchetto R (vedi figura) si trova interposto nel circuito A
« dal quale sia stata tolta la pila P ed in un secondo roc-
« chetto posto entro il primo si faccia incominciare e finire
« la corrente di una pila, sia o no abbassato il bottone I,
« l'attitudine a condurre viene acquistata dalla limatura in
« maniera più cospicua ». E qui, in relazione di quanto è
detto nel N. 1, si noti che io scriveva: « con l'esperienza
« delle correnti indotte si ha in qualche modo un mezzo per
« paragonare la forza elettromotrice d'induzione alla forza
« elettromotrice delle macchine elettriche ».

5. *Dalle Memorie di Edoardo Branly.* — « L'azione
« elettrica può esercitarsi sulla sostanza sensibile in circuito
« aperto o in circuito chiuso ».

Dalle mie esperienze. — Io proseguiva nel luogo più so-
pra citato: « Ho detto che la limatura acquista la condutti-
« vità, sia o no abbassato il bottone I, ciò che torna a dire
« sia aperto o chiuso il circuito A [1]); ma bisogna avvertire
« che la conduttività è molto maggiore quando si opera a
« circuito aperto ».

6. *Dalle Memorie di Edoardo Branly.* — Il Branly
ha scritto: « Se l'azione proviene dal passaggio di una cor-
« rente continua, l'aumento di conduttività è tanto più con-
« siderevole che la forza elettromotrice della pila impiegata
« è più grande ».

Dalle mie esperienze. Alla fine della mia prima nota si
trova: « L'esperienza potrebbe provare che quell'attitudine a
« condurre che alla limatura deriva, o dalle interruzioni o
« dall'elettrizzazione operata con una macchina elettrica, po-
« trebbe venirle dalla corrente stessa che la deve attraver-
« sare ».

Nella seconda nota scriveva: « In questo modo si può
« avere un criterio per giudicare dei valori relativi delle forze
« elettromotrici delle pile, delle correnti indotte e delle mac-

[1]) Io chiamavo circuito aperto il circuito non interrotto.

« chine elettriche ». E altrove: « Adoperando una forza elet-
« tromotrice maggiore, il valore della conduttività cresce ».

7. *Dalle Memorie di Edoardo Branly.* — Nella seconda Memoria comparsa nel periodico *La Lumière Electrique,* sabato 13 giugno 1891, alla pag. 507 si legge: « Ritorno alla
« resistenza primitiva. Ritorno per l'urto. La conduttività
« dovuta alle diverse influenze descritte persiste qualche volta
« lunghissimo tempo, 24 ore e più. É nondimeno possibile di
« farla scomparire subitamente. Il ritorno alla resistenza pri-
« mitiva si produce in particolare per mezzo dell'urto ».

Dalle mie esperienze. — Nella mia terza nota « *Di una forma che può darsi all' avvisatore microsismico* « , dopo descritta la disposizione che proponeva per ottenere la segnalazione dei piccoli movimenti della terra, scriveva quanto segue:
« Un piccolo tremito che venga comunicato alla tavoletta che
« regge il cannellino, un piccolo corista che si faccia vibrare
« appoggiato alla stessa tavoletta e, talvolta, una nota che
« si canti, bastano per togliere alla limatura la conduttività
« e fare ritornare l'ago della bussola alla sua posizione ».

E qui cessa e deve cessare il confronto tra le mie esperienze e quelle di Edoardo Branly, poichè tutte le proprietà caratteristiche del coherer sono comprese ed illustrate nei miei lavori. Il fisico francese, andò più innanzi, incamminandosi molto più tardi verso la telegrafia senza fili? non è qui il luogo di rispondere a questa domanda. Questo è indubitato: egli non ebbe il bisogno d'inventare il coherer, poichè 6 anni prima il coherer era stato inventato.

Ma si dirà, e si è detto, che il coherer venne perfezionato e lo stesso Marconi ne studiò e ne ottenne la sensibilità della quale per le sue esperienze aveva bisogno; a me pare che si possa rispondere essere ancora il Torricelli l'inventore del barometro ad onta che il Fortin, p. e., abbia ideata quella felice disposizione per la quale il suo istrumento ha reso e rende tanti servigi alla Meteorologia. E d'altra parte ognuno può leggere nel mio lavoro citato le parole seguenti: « Movendo
« opportunatamente il commutatore, l'osservatore restituisce
« alla limatura la perduta conduttività rendendola così subito
« adatta a nuove indicazioni. Giova qui avvertire che, rego-

« lando la quantità di limatura, si può in qualche modo re-
« golare la sensibilità dell'apparecchio (coherer) sia nell'acqui-
« stare che nel perdere la conduttività ».

E così a me pare di avere ristabilito la verità con l'esame rigoroso dei documenti e nutro speranza che l'opera mia, quale essa fu, sia riconosciuta. Il silenzio di Edoardo Branly non fu lodevole e gli venne giustamente rimproverato con queste parole: « Questo merito, al Calzecchi-Onesti fu universalmente
« riconosciuto dalla stampa scientifica anche americana, e Gu-
« glielmo Marconi nella celebre conferenza tenuta in Campi-
« doglio alla presenza delle LL. MM. il Re e la Regina d'I-
« talia lo ricordava pure. In cotesto consenso universale ed
« in cotesta notorietà, non si comprende come abbiano taciuto
« dei lavori di lui il Lodge nel suo *Signalling through Space*
« *without Wires* ed il Branly nel rapporto *Les radioconduc-*
« *cteurs* presentato al Congresso internazionale di Fisica del
« 1900 a Parigi: nel quale rapporto il Branly assume sen-
« z'altro la parte di primo ed unico scopritore delle accennate
« proprietà delle polveri metalliche, mentre il Calzecchi-Onesti
« lo aveva preceduto di sei anni ». [1]

---

[1] Veggasi la pregevole opera storica: Francesco Grassi, *La fisica e l'elettrotecnica* (« Il Secolo XIX nella vita e nella cultura dei popoli »). Milano, dott. Francesco Vallardi.

RIVISTA

Prof. ALESSANDRO AMERIO.

Recenti progressi nello studio delle radiazioni di temperatura.

Nel rapporto [1] precedentemente pubblicato su quest' argomento davo notizia di una nuova determinazione della costante di Stefan, fatta dal Féry, e, data l'importanza della costante, dato il valore notevolmente più grande di quello prima trovato dal Kurlbaum, prevedevo nuove ricerche in questo campo.

E infatti cominciamo con due note di Bauer e Moulin.

Essi nella prima [2] criticano il metodo del Féry in quanto, mentre ritengono che il suo ricevitore assorba tutti i raggi che lo colpiscano, ammettono che la taratura dia poca garanzia di esattezza.

Perciò procedono ad una nuova determinazione nel modo seguente:

1° Scaldano una lamina di platino nel vuoto con una corrente elettrica nota, misurandone la resistenza R.

Conoscendo la superfice della lamina vengono così ad aver determinata l'energia w che la lamina irradia per unità di superfice a quella temperatura, per ora ignota, alla quale la resistenza è R.

2° Scaldano la stessa lamina tenendola verticalmente nell' aria. A parità di riscaldamento sarà ora maggiore la quantità di energia consumata, ma, per ogni dato valore di R l' energia *irradiata* sarà ancora quella dianzi determinata. Gli A. misurano la corrente generata in un ricevitore integrale di Féry puntato sopra la lamina.

3° Da queste due serie di misure deducono una relazione tra l'energia irradiata dalla lamina per ogni cm². e la corrente prodotta dal ricevitore del Féry.

4° Puntano questo verso l'apertura di un forno elettrico tenuto a 1064° c. dalla fusione dell' oro e misurano la corrente prodotta. Essa corrisponde ad una potenza irradiata di 19,1 watt per cm².

Nel risulta esattamente

$$\sigma = 6{,}0\ 10^{-12} \text{ watt per cm}^2.$$

1) *Nuovo Cimento*, serie V, vol. XVII.

2) C. R. 2° semestre 1909.

Questo metodo non avrebbe altro inconveniente che quello di essere un po' involuto, se dall'energia w che il platino irradia in tutto nella prima delle misure di questi A. si potesse senz'altro dedurre quella irradiata nella direzione del ricevitore integrale, applicando la legge del coseno.

Ma purtroppo ciò non è, sopratutto se il platino è brunito.

Perciò Bauer e Moulin in una nota successiva [1]) determinano come dipenda il valore del potere emissivo del platino speculare e del platino spulito con l'inclinazione, e, tenuto conto delle condizioni nelle quali avevano eseguite le esperienze precedenti correggono il valore di σ in quest' altro:

$$\sigma = 5,3\ 10^{-12}\ .$$

La correzione è certo molto forte, e, applicata non immediatamente, può lasciare qualche dubbio, tanto più che il platino portato più volte all'incandescenza colla corrente elettrica, perde l'aspetto brillante e la sua emissione si avvicina alla legge del coseno.

Per conseguenza la questione non è risolta da queste esperienze.

Nè ritengo la risolvano queste altre due ricerche.

Iacques Parmentier [2]) si serve per radiatore di un forno Mecker limitato a quella parte nella quale le misure gli danno una temperatura *quasi* uniforme. Il ricevitore è una pila termoelettrica di Rubens. Con questi apparecchi verifica la legge di Stefan-Boltzmann, ma per σ trova il valore evidentemente troppo basso $4{,}8 10^{-12}$.

Féry e Drecq [3]) in una nuova nota ritornano sull'argomento, modificando la taratura del ricevitore integrale.

Questo fa addirittura parte di un calorimetro ad alcool, ed essi osservano le dilatazioni di questo, sia quando mandano la corrente nel ricevitore, sia quando questo è scaldato dai raggi emanati dalla sorgente.

Trovano

$$\sigma = 6,5\ 10^{-12}\ .$$

Occorreranno dunque ancora altre ricerche affinchè si possa ritenere di conoscere bene la costante σ.

Coblentz W. W. [4]) continua lo studio dell'emissione di temperatura di alcuni solidi di cui già riferii nel rapporto precedente. Egli espone i risultati ottenuti pel talco, silicato di magnesio, e altri corpi che presentano in comune la banda dovuta all'anidride silicica.

Esamina poi l'emissione di alcuni filamenti di lampadine elettriche a incandescenza.

1) C. R. 2° semestre 1909.
2) *Ann. de Chimie et de Phys.* vol. 22, 1911.
3) C. R. 1° semestre 1911.
4) *Bull. of Bur. of Stand.* 1910.

Paragonando l' emissione del carbone e del tungsteno risulta che a parità di luce il carbone emette di più in tutto l' ultrarosso, e ciò in connessione col minor rendimento delle lampadine a carbone.

A questo stesso proposito, Féry e Chéneveau [1]) studiano l' irradiamento totale e monocromatico di lampadine a incandescenza a filamenti di carbone e di tungsteno.

Nelle prime l' energia totale irradiata tra 1500° e 1900° è data da

$$W = a T^4$$

dove $a = 2{,}95 \; 10^{-12}$ watt. Cioè il carbone irradia come un corpo grigio.

Non così avviene per l' emissione della luce che entro larghi limiti è data da

$$I = 2{,}08 \; 10^6 \, e^{-\frac{32{,}05}{\sqrt[4]{W}}} .$$

dove I indica l' intensità della luce.

Per il tungsteno verrebbe

$$I = 3{,}08 \; 10^6 \, e^{-\frac{27{,}36}{\sqrt[4,6]{W}}} .$$

Queste due leggi porterebbero a conchiudere che in regime normale la temperatura pei filamenti di carbone è 1780° c. e di tungsteno 1875°; i rispettivi rendimenti risultano per le lampadine a carbone 0,29 candele per watt; per quelle a tungsteno 0,82, ciò che del resto è già noto.

Paragoniamo un momento questi rendimenti con quello che si ha per la luce emessa dalle lucciole [2]).

Ives e Coblentz fotografano lo spettro della loro luce. Esso è breve e continuo nel giallo verde, andando da 510 a 670 μμ, col massimo a 570; il rendimento sale al 96,5 %, ciò che porta a un'emissione di una quindicina di candele per ogni watt!

È curioso che queste lucciole essudano un liquido che presenta una fluorescenza bleu, complementare della luce emessa.

Il numero di candele che corrisponde a un watt, (equivalente meccanico della luce) dipende naturalmente dalla luce che si considera. Così Buisson e Fabry [3]) misurando l'energia emessa per varie lunghezze d'onda da una lampada a mercurio, trovano che

nel violetto	per $\lambda = 4538$	un watt	corrisponde a	3,2 candele
nel verde	» $\lambda = 5460$	»	» »	55,5 »
e nel giallo	» $\lambda = 5780$	»	» »	47,6 »

1) C. R. 2° semestre 1909.

2) *Bull. of Bur. of Stand*, Vol. 6. N. 3. 1901.

3) C. R. 2° semestre 1911.

Molto interessanti sono due recenti ricerche di Rubens e Wood [1]) e di Rubens e Baeyer [2]).

I primi due fisici riferiscono sopra un metodo molto semplice per isolare raggi di grande lunghezza d'onda.

I raggi sono emessi da una reticella incandescente; a 26 cm. incontrano una prima lente di quarzo la cui parte centrale è coperta con un disco di carta nera, ad altri 26 cm. un diaframma e ad altri 26 ancora una nuova lente, come la prima, coperta nel centro da un disco di carta nera. Indi colpiscono un microradiometro.

Le distanze sono state scelte in modo che dette lenti concentrino sul microradiometro quei raggi il cui indice di rifrazione sia 2,15, essendo questo valore la radice quadrata della costante dielettrica del quarzo.

Tutti gli altri raggi vengono esclusi, sia per l'azione dei dischi di carta sia per i minori valori dell'indice di rifrazione.

Effettivamente sul radiometro *attraverso la carta nera* giungono dei raggi dei quali gli A. misurano le lunghezze d'onda e trovano 96,3 μ, 100 μ, 108,2 μ.

Essi studiano i poteri assorbenti e riflettenti che per questi raggi presentano diversi corpi e trovano che per $\lambda = 52\ \mu$ e $\lambda = 108\ \mu$ il *nero fumo è quasi perfettamente trasparente !*

In seguito e con lo stesso metodo, Rubens e Baeyer sostituendo alla reticella a incandescenza una lampada a vapori di mercurio, fortemente eccitata, ottengono una quantità notevole di raggi la cui lunghezza d'onda risulta

$$\lambda = 314\ \mu$$

cioè circa $\frac{1}{3}$ di mm.

Se si pensa che le più brevi onde elettriche studiate sono di circa 3 mm. si vede che ormai è ben piccola la lacuna che resta da colmare nella serie delle vibrazioni dell'etere!

Una serie numerosa di spettri d'assorbimento nell'ultrarono è esaminata da Willibald Weniger [3]) con uno spettrobolometro catottrico. Egli studia liquidi organici, mettendo molta cura nell'usarli puri, e conferma ampiamente quanto è noto in seguito a varie ricerche, tra le quali quelle del Puccianti. Le sue conclusioni sono che:

Spesso gli spettri degli isomeri sono identici; quelli degli omologhi sono simili; certi gruppi presentano sempre date regioni di assorbimento; certi polimeri hanno spettri molto diversi.

1) *Ber. d. Deut. Phys. Ges.* 1911 Heft 1.
2) *Radium*, aprile 1911.
3) *Phil. Mag.* 1910 vol. 19.

Un' applicazione pratica della pirometria è quella di C. K. Burgess [1]).

I pirometri ottici, o quelli fondati sull' esame della radiazione totale, servono bene quando siano puntati verso un corpo nero, ma poi rivolti a superficie incandescenti non perfettamente assorbenti danno sempre indicazioni di temperature inferiori alla realtà, in ragione del minor potere emissivo di tali superfice.

L'A. si propone di determinare quali differenze si manifestino per diversi pirometri tra le indicazioni che essi danno della temperatura del rame fuso e la temperatura vera.

Perciò esamina la superficie del rame pura o ossidata e ne misura la temperatura con una coppia termoelettrica platino-platino rodio.

Di pirometri adopra quello ottico di Holborne-Kurlbaum, e quello radiometrico del Féry, calibrati mediante le temperature ottenute con la fusione dello zinco (419°), dell' antimonio (630°,9), del rame (1084°).

Egli trova che le relazioni tra le temperatura vere e quelle date dai pirometri sono lineari.

Se la superficie del rame *fuso* è libera, col pirometro ottico la temperatura vera t è data da

$t = 1{,}515\,r - 359$ se la prova è fatta con luce rossa $\lambda = 0{,}65\ \mu$,
$t = 1{,}515\,g - 477$ » » » » verde $\lambda = 0{,}55$ »,

essendo r e g le temperature date dal pirometro rispettivamente nella prova col rosso e in quella col verde.

Se la superficie è ricoperta di un velo di ossido le temperature date dal pirometro ottico crescono di 100° nel 1° caso e di 35 nel secondo.

Per via della grande emissione nel verde l' errore è talora trascurabile nelle misure fatte con questa luce.

Indicando con F le temperature date dal pirometro di Féry l' A. ottiene per temperature vere le seguenti

$t = 3{,}55\,F - 1018$ pel liquido terso,
$t = 1{,}41\,F - 169$ » » ossidato.

Tenendo conto di queste relazioni le temperature si possono determinare abbastanza bene.

Rimandando a un prossimo rapporto certe considerazioni sulle teorie della radiazione di temperatura, terminerò questa breve rivista accennando a uno studio di P. G. Nutting [2]) sulle relazioni tra l' effetto luminoso dato da una sorgente e la sua temperatura.

Se si conosce la legge che lega l'emissione di una certa sorgente con la sua temperatua, per tutte le lunghezze d' onda, sarà pure possibile e-

1) *Bull. of Bur. of Stand.* ottobre 1909.
2) *Bull. of Bur. of Stand.* 1910. Vol. 6. N. 3.

sprimere la quantità di luce che questa sorgente emette in funzione della temperatura.

Se la sorgente emette secondo la legge

$$I_\lambda = c_1 \lambda^{-\alpha} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}$$

ne viene, per ogni valore di λ.

$$\log I_\lambda = r_{1\lambda} - \frac{r_{2\lambda}}{T} \tag{1}$$

dove $r_{1\lambda}$ e $r_{2\lambda}$ non dipendono che da λ.

Per due temperature diverse:

$$\log \frac{I_{1\lambda}}{I_{2\lambda}} = r_{2\lambda} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)$$

e Nernst trova precisamente confermata questa relazione esaminando la luce emessa da un corpo nero.

Tralascio di accennare ad altri casi consimili come fa il Nutting e vengo alla sua teoria.

L' azione che una sorgente di luce esercita sull' occhio dipende oltre che dal suo stato fisico, dal fenomeno fisiologico della visione. L' A. indicata con V la sensibilità dell' occhio umano per la lunghezza d' onda λ, la esprime con la relazione

$$V = V_0 e^{-\kappa (\lambda - \lambda_m)^2}$$

dove V_0 è una costante che dipende dalle unità, λ_m la lunghezza d'onda che corrisponde al massimo di sensibilità, K un coefficiente.

Per questa funzione bisogna distinguere tre casi:

1° L' intensità della luce è piccola (inferiore a 0,05 lux) allora $\lambda_m = 0{,}511\ \mu$, la visione avviene per mezzo dei bastoncini e $K = 4{,}6$.

2° L' intensità è grande (maggiore di 10 lux), allora $\lambda_m = 0{,}565\ \mu$, la visione avviene per mezzo dei coni e $K = 2$.

3° L' intensità è intermedia e allora K varia da 4,6 a 2.

Volendo trovare il rapporto tra l' intensità luminosa in candele e la stessa espressa in watt si potrà fare l' esame per la luce bianca e per ogni lunghezza d'onda. Per la prima l'A. trova 13,5, Drysdale trova 16,7; per le diverse lunghezze d'onda varia enormemente dall'una all'altra data la diversa sensibilità che ha l' occhio per i diversi colori, e varia ancora perchè i rapporti fra le varie sensibilità dell' occhio non si mantengono costanti allorchè si passa da luci intense a luci molto deboli (fenomeno di Purkinje).

Lo studio più sicuro si può fare col corpo nero la cui emissione luminosa segue bene la legge di Wien-Planck

$$E_\lambda = c_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} .$$

Facciamo il prodotto fra *l'intensità* e la *visibilità*. Avremo

$$L = E V = c_1 V_0 \lambda^{-5} e^{\frac{c_2}{\lambda T} - \kappa (\lambda - \lambda_m)^2}$$

e questa equazione ci darà la relazione che corre tra la *luminosità* L corrispondente ad una data lunghezza d'onda e la *temperatura* della sorgente.

Da essa si ricava

(2) $$\log L = A - \frac{B}{T}$$

dove A e B dipendono solo da λ come si è già visto con la (1). Però in questa relazione A dipende dalla funzione di visibilità perchè è

$$A = \log c_1 V_0 \lambda^{-5} - K (\lambda - \lambda_m)^2 .$$

La relazione (2) è monocromatica.

Per avere una relazione per la luce bianca bisogna fare

$$\int_0^\infty E V d\lambda .$$

Definendo poi con rendimento luminoso il rapporto

$$F = \int_0^\infty E V d\lambda : \int_0^\infty E d\lambda$$

il Nutting trova che il corpo nero avrebbe il *massimo rendimento* a 6420° ass. e a questa temperatura irradierebbe 2,7 candele per watt [1]), ciò che sarebbe relativamente poco.

---

1) Cfr. rapporto precedente.

LIBRI NUOVI

BLOCH. — **Principes de la tecnique de l'éclairage.** (Paris, Gauthier-Villars).

Il presente libro tratta principalmente della discussione, del calcolo e delle misure dell'illuminazione, riproducendo anche succintamente alcune memorie pubblicate dall'A. su varie riviste scientifiche, specialmente nella parte che si riferisce ai bisogni della pratica.

E poichè non sarebbe possibile una trattazione completa di quest'argomento, senza possedere i principî fondamentali della tecnica dell'illuminazione, l'A. dedica la prima parte del libro all'esposizione di questi principî.

L'opera si chiude con un interessante capitolo sull'illuminazione indiretta, argomento che ha attratto singolarmente in questi ultimi anni l'attenzione dei tecnici e degli studiosi.

URBAIN. — **Introduction à l'étude de la spettrochimie.** (Paris, Librairie scientifique A. Hermann et fils, 1911).

La spettroscopia, che è stata spesso per i cultori di fisica argomento di indagine e di speculazione per se stessa, non è, per i chimici, se non un potente e meraviglioso mezzo di ricerca.

Tuttavia l'A. di quest'opera — che è professore di chimica alla Sorbona — à voluto e saputo uscire talvolta dal campo della pura spettrochimica, per addentrarsi nello studio spettroscopico di fenomeni fisici. Del resto il libro destinato soprattutto a fornire ai chimici quel corredo di cognizioni indispensabili per chi vuole intraprendere ricerche spettroscopiche, tratta principalmente quella parte della spettroscopia che si riferisce direttamente alla chimica.

La parte pratica delle manipolazioni spettroscopiche non v'è affatto trascurata.

ERRATA - CORRIGE

alla Memoria di A. Bernini: **Sul Magnetismo Susseguente.** *N. Cimento*, ottobre 1911.

Pag.	292	riga	7	dopo	Helmoltz	aggiungi	*Pogg. Ann.* 83, 1851, s. 535
»	»	»	»	»	Holborn	»	*Berl. Ber.* 11, 1894, s. 173
»	»	»	»	»	Klemencic	»	*Ann. d. Phys.* 62, 1897, s. 68; 63, 1897, s. 61
»	»	»	»	»	Gildemeister	»	*Ann. d. Phys.* 8. 1897, s, 401
»	»	»	17	invece di	[1])	leggi	[5])
»	»	»	31	»	[1])	»	[5])
»	293	»	16	dopo	si genera	aggiungi	oltre al M. S.
»	297	»	31	dopo	Laird	»	*Ann. d. Phys.* 1, 1900
»	299	»	9	dopo	$f(t)$	»	variabile col tempo
»	»	»	14	»	inerzia	»	e senza smorzamento
»	300	»	8	invece di	$\varphi = A e^{\lambda t}$	leggi	$\varphi = A_1 e^{\lambda t} + t A_2 e^{\lambda t}$
»	302	»	19	dopo	città	aggiungi	indi sottoposti al processo delle magnetizzazioni e smagnetizzazioni successive
»	304	»	2	invece di	alla (6)	leggi	alla θ in cui si è trascurato il 2° termine del 3° membro
»	»	»	3	invece di	delle curve	»	della curva
»	»	»	»	dopo	della curva	aggiungi	espressi in cm. di spostamento della macchietta luminosa
»	»	Tab.	I	come prima linea		»	0 | 13,7 | 13,7
»	»	riga	14	invece di	1,42	leggi	1,142
»	»	»	24	dopo	coincidenti	aggiungi	epperciò in seguito ho creduto sufficiente sperimentare sopra uno solo dei due campioni
»	306	»	6	dopo	lavoro	»	§ 3 Tab. II
»	»	»	8	invece di	in quelle contenuti	leggi	ivi riportati
»	»	»	11	dopo	curva b	aggiungi	(fig. 3)
»	307	»	5	invece di	e con φ	leggi	e con Φ
»	»	»	8	dopo	si vede	aggiungi	dalla figura
»	»	»	11	invece di	2,63	leggi	2,65
»	»	»	»	»	6,80	»	6,50
»	»	»	13	»	6,38	»	6,54
»	»	»	23	invece di	Φ	»	φ
»	»	»	»	dopo	e corretti	aggiungi	ossia di Φ
»	»	»	»	»	e quelli	»	Φ′
»	308	»	2	invece di	A = 75	leggi	A = 7,5
»	» *)	»	3	»	Φ oss. e corr.	»	Φ
»	»	»	»	»	4,87	»	4,85
»	»	»	»	»	6,38	»	5,54
»	» *)	»	4	»	Φ calcolati	»	Φ′
»	»	»	16	dopo	quei campi	aggiungi	[1])
»	»	»	24	»	del lavoro	»	§ 3, Tab. II
»	309	»	13	invece di	F e	leggi	Ferro

*) Questa correzione va estesa pure a tutte le tabelle che seguono.

SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

VERBALI
delle Adunanze tenute dalla Sezione di Roma

Seduta di Sabato 20 novembre 1910.

Presiede il Prof. Volterra.

Il Presidente, nel riaprire il corso annuale delle riunioni della Sezione di Roma della Società Italiana di Fisica, ringrazia il Prof. Blaserna per la cortese ospitalità che offre nel suo Istituto.

Prende poi la parola il Prof. Palazzo che commemora brevemente il Prof. Gerosa dell' Accademia di Livorno.

Il Prof. Castelnuovo parla sul principio della Relatività. Trattando delle basi fisiche del principio fa un accurata analisi critica del primo e del secondo principio di Einstein e conclude che allo stato attuale delle cose il secondo principio di Einstein sembra soddisfare meglio che il principio balistico.

Seduta di Sabato 10 dicembre.

Presiede il Prof. Volterra.

Il Prof. Corbino espone i tre diversi ordini di considerazioni che hanno condotto i fisici ad attribuire una massa all'energia di qualunque forma; e cioè la teoria di Lorentz completata con la teoria dell'irraggiamento; il principio di relatività, e infine la necessità di ristabilire l'impero del 3° principio della meccanica. Calcola, seguendo il metodo di Lewis, il valore della massa dell' energia, e l'espressione insolita della forza viva d'un corpo in moto. Infine rilega i concetti esposti con la teoria del Prof. Volterra sul flusso dell'energia meccanica, considerando questo come un vero flusso di materia e deducendone alcune interessanti conseguenze.

Il Dott. Gianfranceschi presenta l'integrafo di Abdank Abakanowich, quello di Pascal, e l'integratore armonico del Coradi; espone brevemente i principî su cui sono fondati e ne mostra l'uso.

Seduta di Sabato 28 gennaio 1911.

Presiede il Prof. Volterra.

Il Socio Trabacchi riferisce intorno alla fotografia a colori, tratteggiando lo sviluppo storico dei problemi ad essa inerenti, e fermandosi ad esaminare la tecnica di fabbricazione e di utilizzazione delle lastre autocrome ed omnicolore.

In seguito il Prof. Almansi fa una comunicazione sopra alcune ricerche analitiche da lui compiute, e relative alle distribuzioni di potenziale su di un conduttore elettrico, capace di dar luogo nell'interno del conduttore medesimo ad una forza piccola a piacere.

Infine il Prof. Oddone parla sulla determinazione delle costanti di elasticità delle roccie, esponendo la teoria e i mezzi di osservazione relativi ad un procedimento da lui ideato per la determinazione dinamica delle costanti suddette.

Alla comunicazione del Prof. Oddone ha fatto seguito una interessante discussione alla quale hanno preso parte i Proff. Volterra, Rudzhi, Corbino, Almansi, Silberstein.

Seduta di Sabato 11 febbraio.

Presiede il Prof. Volterra.

Il Presidente annuncia la perdita del Prof. Carpini già alunno di questo Istituto Fisico, ne ricorda la breve carriera scientifica, e propone di inviare condoglianze alla famiglia di lui a nome dei Soci. La proposta è accolta favorevolmente.

Il Prof. Piola descrive i principali fenomeni magnetotermici nel ferro specialmente nelle vicinanze della temperatura critica. Mostra sperimentalmente la recalescenza del ferro, la singolarità nella dilatazione lineare e la contemporaneità di questi fenomeni con la ricomparsa della suscettività magnetica. Parla poi della discontinuità del calore specifico e mostra la relazione che in ciò esiste con le proprietà magnetiche conforme alla teoria del campo molecolare del Weiss. Infine

espone le sue ricerche sulle modificazioni magnetiche del ferro riscaldato mentre compie cicli di isteresi sotto l'azione di campi alternati, e le illustra con proiezioni di fotografie di curve tracciate dal fascio catodico d'un tubo Braun.

Il Prof. Corbino espone un metodo di studio delle caratteristiche dinamiche fondato sull'effetto di una bobina differenziale sopra un tubo Braun. Ricollega questo studio con quello delle variazioni termiche dei filamenti metallici di lampade ad incandescenza, e ne deduce alcuni valori delle costanti che compariscono in quelle teorie.

Seduta di Sabato 25 febbraio.

Presiede il Prof. Cantone, Presidente della Società italiana di Fisica.

Il Prof. Blaserna parla brevemente del defunto socio Prof. Carpini accennando specialmente agli anni che egli passò in questo Istituto come alunno e poi come allievo assistente. Dopo di lui il Dott. Zetwoch legge una commemorazione dello stesso socio Carpini.

Il Prof. Garbasso riferisce poi sopra ricerche da lui eseguite in collaborazione col Prof. Vacca per un'esperienza di meteorologia elettrica fatta dal Volta nel 1787; esperienza che i due professori hanno ripetuto per dimostrare che i fenomeni osservati erano dovuti a diffusione di ioni atmosferici. Il fenomeno verificato è molto più complesso di quello che la teoria prevede. Il Garbasso si ferma specialmente a dimostrare il significato dei risultati teorici. Su questo argomento prendono la parola il presidente Prof. Cantone, e i Proff. Corbino, Silberstein, Volterra.

L'Ing. Bordoni riferisce i risultati delle sue ricerche sull'influenza della magnetizzazione ropra i fenomeni termoelettrici.

Seduta di Sabato 11 marzo.

Presiede il Prof. Volterra.

Il socio Trabacchi espone lo svolgimento del processo tricromo in rapporto alla possibilità di riprodurre con tre tinte fondamentali i colori, sostenendo che la scelta di convenienti filtri in base alle proprietà dell'occhio debba portare

il processo di sintesi additiva ad un grado molto elevato di perfezione. Presenta un apparecchio da lui ideato per dimostrare che con tre tinte si possono riprodurre tutti i colori dello spettro. Proietta infine alcune fotografie a colori da lui eseguite.

Il Prof. Corbino riferisce su alcune sue esperienze le quali dimostrano che un disco metallico percorso da correnti radiali e disposto in un campo magnetico acquista le proprietà d'una particolare lamina magnetica per virtù degli ioni deviati dalla traiettoria normale; ed espone la teoria del fenomeno in base alla ipotesi elettronica.

Seduta di Sabato 25 marzo.

Presiede il Prof. Volterra.

Il Prof. Volterra svolge una comunicazione sulla distribuzione delle temperature nell'interno delle montagne. Richiamata la grande importanza del problema nella fisica terrestre e per le opere d'ingegneria moderna nello scavo delle gallerie, espone i diversi metodi che sono stati seguiti per poter prevedere la distribuzione delle temperature fondandosi su alcuni dati di osservazione facilmente accessibili. Dimostra a costo di quali semplificazioni e ipotesi arbitrarie la teoria della propagazione del calore può dare una soluzione approssimata nei problemi concreti, e quindi espone e dimostra con l'esperienza come si possa molto facilmente risolvere il problema servendosi dell'analogia analitica tra i problemi della trasmissione del calore e quelli della distribuzione dei potenziali in un conduttore a più dimensioni percorso da corrente. Illustra la esposizione col rilievo, fatto a mezzo di sonde, delle curve isopotenziali in una lamina di stagnola nella quale con due condutturi spessi di rame di contorno arbitrario si fissano due potenziali prestabiliti in due date linee della lamina.

Il Prof. Corbino espone ed illustra con l'esperienza, la proprietà d'un disco di bismuto di orientarsi in un campo magnetico quando è riscaldato al centro ed alla periferia connettendo il fenomeno osservato con la teoria elettronica.

Il Prof. Volterra fa notare come disponendo opportunamente delle sorgenti calde e fredde intorno a un sistema di dischi, si debba realizzare un movimento continuo di rotazione.

Seduta di Venerdì 5 maggio.

Presiede il Prof. Volterra.

L'Ing. Mancini svolge una sua comunicazione sulla fotografia stereoscopica e i suoi recenti progressi. Dopo aver esposto la storia dei processi stereoscopici nelle sue fasi principali egli passa ad illustrare l'ingegnosa disposizione dell'Estanave, presentando poscia alcuni saggi inviatigli dall'autore del metodo, saggi che vengono con molto compiacimento esaminati dai soci presenti.

Poscia l'Ing. Crudeli svolge una sua comunicazione sulle figure di equilibrio delle masse fluide rotanti, riferendo i suoi importanti risultati teorici sulla velocità limite della configurazione stabilita.

Seduta di Sabato 20 maggio.

Presiede il Prof. Volterra.

Il Dott. Zondadari parla sul movimento dei solidi nei fluidi viscosi. Accenna dapprima alle ricerche degli Accademici del Cimento sulla resistenza opposta dall'aria ai gravi in caduta, e quella del Newton sul pendolo, del Coulomb sul disco oscillante in un liquido, e alle ricerche teoriche di Navier, Poisson e di altri scienziati fino allo Stokes. Parla poi del nuovo indirizzo dato da questi a tale ricerca coll'applicazione delle equazioni del movimento dei fluidi viscosi ad alcuni casi speciali. Si ferma poi sugli studi del Picciati e del Boggio sulla caduta di una sfera in un liquido viscoso sotto l'azione della gravità e mostra come ambedue seguendo vie diverse son giunti allo stesso risultato: che cioè il moto d'una sfera dopo un tempo indefinitamente grande tende a divenire uniforme, la velocità avendo come limite il valore dato dallo Stokes pel moto stazionario.

A questa relazione seguì una importante discussione alla quale presero parte l'Ing. Crudeli, il Prof. Volterra, il Prof. Corbino.

L'Ing. Crudeli espone lo studio generale fatto dall'Osen sulle equazioni generali e sopra un metodo di integrazione

fondato sull' impiego di soluzioni semplici e della estensione del metodo di Green.

Il Prof. Volterra fa osservare come si possa procedere ancor più innanzi applicando anche in questo caso il metodo delle caratteristiche, come si fa nel caso della teoria della propagazione del calore. Nel caso di moti a due dimensioni è necessario ricorrere al metodo delle caratteristiche a spazi di tre dimensioni; nel caso di moto a tre dimensioni bisogna passare, col metodo delle caratteristiche, a spazi a quattro dimensioni; e allorchè si considera il tempo come una variabile complessa, allora bisogna passare a uno spazio a cinque dimensioni.

Il Prof. Corbino mette in relazione i risultati della Fisica matematica con le indagini sperimentali di Perrin, Millikan e le altre più recenti in cui si applica la legge di Stokes per dedurre dalla caduta di particelle elettrizzate le costanti fondamentali della teoria ionica.

Seduta di Sabato 3 giugno.

Presiede il Prof. Cantone, Presidente della Società italiana di Fisica.

Il Prof. Parravano legge una elaborata commemorazione di J. Van t'Off, mettendone in rilievo l'opera feconda e geniale in tutti i campi della Fisica Chimica.

Poscia il Prof. Amerio espone i risultati generali delle sue indagini sulla radiazione solare, compiute in diverse stazioni di altezza differente, indagini che egli si appresta a proseguire e completare nella prossima estate, nelle stesse stazioni di Roma, Alagna, Col d'Ölen e alla Capanna Margherita.

Continuazione della Nota pubblicata a pag. XXIII.

Hanno fatto adesione alla Società i signori:

Abraham M. — Milano, Via Boccaccio, 4
Errani Prof. Giovan Francesco — Fermo, R. Istituto Industriale

Hanno pagato la quota 1910 i Soci:

Ceruti Giuliano — Pierpaoli Nazareno

Hanno pagato la quota 1911 i Soci:

Abraham M. — Grassi Ugo
Errani Giov. Francesco — Vicentini Giuseppe
Gnesotto Tullio

ATTILIO MARIOTTI, *gerente responsabile.*

Società Italiana di Fisica

BILANCIO CONSUNTIVO

1910 - 1911

LUCCA
TIPOGRAFIA LIB. E CART. BARONI
1911

Rendiconto dal 1° Dicemb

ENTRATA

Resto Cassa al 30 Novembre 1910 . . . . L. 4343.

Interessi maturati al 31 Dicembre 1910 . . » 130.

Quote sociali esatte dal 1. Dicembre 1910
al 30 Settembre 1911

del 1907	N.	1
8	»	4
9	»	12
10	»	83
11	»	85

N. 185 a L. 3 555.

Totale Entrata L. 502

910 al 30 Settembre 1911

SPESA

Stampa del resoconto 1909-1910	L.	12,00
Alla Tipografia Bertero	»	25,00
Retribuzioni per la Rivista pubblicata nel 1910.	»	327,00
Associaz. 1910-11 alla Soc. pel Progr. delle Scienze	»	10,00
Alla Tipografia Pistolesi	»	62,75
Al Zanchi per assistenza alle adunanze della Sezione di Roma	»	25,00
Rimborso spese diverse al prof. Folgheraiter .	»	1.05
» » » al prof. Corbino . .	»	25,50
Alla Tipografia Vannucchi per stampa degli Atti Sociali dal 1901	»	1323,50
Spese di posta del Cassiere	»	21,34
Totale Spese	L.	1833,14
Resto di Cassa al 30 Settembre 1910	»	3196,04
	L.	5029,18

A dì 30 Settembre 1911

Il Cassiere
A. STEFANINI

V.° Il Presidente della Società
M. CANTONE

Amministrazione del " N. Cimento " - [illegible]

ENTRATA

		Rimanenza al 31 Dciembre 1909 . . .				L. 2126,48
N.	9	Abbonamenti dal 1901 al 1909 . . .				» 198,00
»	2	»	pel 1907	a	L. 15,00	» 30,00
»	5	»	» 1909	»	» 16,20	» 81,00
»	7	»	» 1908	»	» 15,00	» 105,00
»	1	»	» 1908	»	» 16,20	» 16,20
»	86	»	» 1909	»	» 15,00	» 1290,00
»	21	»	» 1909	»	» 15,00	» 315,00
»	99	»	» 1910	»	» 15,00	» 1485,00
»	55	»	» 1910	»	» 16,20	» 891,00
»	43	»	» 1910	»	» 18,00	» 774,00
»	5	»	» 1910	»	» 15,00	» 75,00
»	4	»	» 1910	»	» 20,00	» 80,00
»	15	»	» 1910	»	» 18,00	» 270,00
		Fascicoli staccati				» 5,40
		Sussidio Ministeriale				» 461,65
N.	352					L. 8203,73
					Uscita	» 5348,94
					Rimanenza al 31 Dicembre 1910	L. 2854,79

nto dal 1° Gennaio al 31 Dicembre 1910

USCITA

Quote spettanti alla Tipografia Vannucchi su 131 abbonamenti	L. 1176,00
Trasporto dei fascicoli per ferrovia da Pisa a Firenze	» 85,05
Spese di posta per la spedizione dei fascicoli agli abbonati	» 421,04
Spese postali per corrispondenza	» 15,66
Spese d' amministazione	» 112,55
Spese rimborsate al prof. Stefanini per corrispondenza	» 0,80
Spese diverse per corrispondenza ecc. rimborsate al prof. Folgheraiter	» 52,62
Spese rimborsate al prof. Occhialini per corrispondenza	» 15,22
Pagato alla Ditta Danesi di Roma pel ritratto a Cannizzaro	» 60,00
Per compensi pagati alla Rivista . . .	» 242,00
Quote spettanti alla Tipografia Toscana del Sig. Giulio Michelozzi su 221 abbonamenti . .	» 3168,00
	L. 5348,94

Il Cassiere
A. STEFANINI

Il Presidente della Società
M. CANTONE

A schiarimeuto del Bilancio dell' Amministrazione del NUOVO CIMENTO si avverte che:

1.° Le quote d' abbonamento effettivamente incassate sono diverse secondo che l' abbonamento è fatto direttamente presso l' Amministratore del NUOVO CIMENTO (L. 18 per l' interno e L. 20 per l' estero) o presso il Cassiere della Società di Fisica (L. 15) o presso librai (L. 16,20 all' interno e L. 18,00 all' estero).

2.° La quota che sugli abbonamenti spetta alla Tipografia ammonta a L. 15 per le prime 250 copie vendute: è sole L. 7,50 per le copie vendute, in ciascuna annata, in di più delle 250. Se l' abbonamento al giornale è fatto a mezzo di librai, la quota che spetta alla Tipografia è di L. 13,50, per lo sconto del 10 0[0 dovuto al libraio.

MONTICELLI

Pubblicazione mensile

Anno LVII - Serie VI - Vol. II - 2° Sem. - Fasc. 12°

Dicembre 1911
Pubblicato il 20 Dicembre

IL
NUOVO CIMENTO

FONDATO DA C. MATTEUCCI E R. PIRIA
E CONTINUATO DA E. BETTI E R. FELICI

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

INDICE:

PISA
STABILIMENTO TIPOGRAFICO TOSCANO
Ditte: Vannucchi-Galileiana-Pieraccini
1911

LUIGI MAGRI

Luigi Magri nacque l' 11 Marzo del 1875 a Monte S. Savino presso Arezzo, e dimorò da giovinetto a Mantova, poi a Lucca e finalmente a Pisa. Ma il padre suo Giovanni e la madre Emma Salvi erano di Barga, ed egli stesso volle esser Barghigiano: all' antico, bel castello della val di Serchio tornava spesso con gioia, e pensava sempre col memore affetto del montanaro. Chè tale egli era profondamente nella semplicità sobria della vita e dei modi, nella tenace costanza dei propositi, nella severa probità del carattere; ma quanta genialità versatile e fresca ornava quella semplicità, quanta vivacità ardita infiammava quella pertinacia, quanta bontà mite, affabile, sorridente ingentiliva quella primitiva virtù senza indebolirla, formando anzi con essa una bella armonia, un perfetto equilibrio!

Dotato di tali virtù, egli ben poteva affrontare serenamente l'arduo compito della vita, senza il fallace aiuto delle illusioni, senza lo sprone acre dell'ambizione, senza la maledetta sete del danaro. E veramente io credo che di rado uno abbia così per tempo e con sì chiara intuizione come lui, concepita la vita umana quale un'unione indissolubile di affetto, di dovere, di sacrificio, e tale l'abbia poi amata allegramente, senza desiderarla diversa.

Egli amava la vita di quell'amore proprio dei forti e dei buoni, che non sa mai divenire paura della morte. Ma solo gl' intimi amici seppero il coraggio ingenuo di cui era al momento capace quel giovane mite, il quale nella figura esile dava piuttosto l'immagine dell'asceta che del moschettiere.

Perchè in questo, come in tutto, egli aborriva dalla ostentazione; anzi, come se temesse continuamente che gli altri

potessero dargli quell'importanza che egli stesso non voleva darsi, e più ancora per soddisfare un certo suo bisogno di gaia semplicità, imprimeva sempre a sè e alle cose sue un lieve atteggiamento comico, che finiva col dare singolare rilievo alla serietà profonda del suo spirito, e all'assennatezza rara del suo giudizio.

L'umorismo era per lui come una seconda natura e insieme una disciplina continua, che difendeva il suo spirito dalla tristezza e dall'abbattimento, rinnovandone sempre col sorriso la lena e la vivacità.

Così sempre sorridente superò nella sua breve vita molte difficoltà, e sostenne dure e lunghe fatiche per la famiglia, di di cui dopo la morte immatura del padre, fu a 22 anni il capo, ossia il figlio primogenito. A lui toccò la prima parte del lavoro per sostentarla, a lui i più gravi sacrifici; ma ancora per parecchi anni gli furono vigile conforto coll'angelica dolcezza i grandi occhi della mamma, e quasi si sentì nel suo seno battere il cuore di lei. E ai degni fratelli suoi Giuseppe e Alberto, con lui stretti in questo devoto ineffabile amore materno, egli mostrava la via, e porgeva la mano già sicura nell'arduo cammino verso il bene.

Quanta pace e quanta allegria in quella casa di semplicità francescana, in cui il luogo dei mobili meno indispensabili era occupato da un abbondante macchinario fotografico, da armi e arredi per le cacce e per le escursioni, ma non vi mancava all'amico l'accoglienza ospitale e il posto alla semplice mensa! Quante ore liete io vi ho passate, ore di svago per il nostro Gigi, che non erano mai ore di ozio!

Tale era la sua abitudine al lavoro, anzi alla fatica che non ho memoria di averlo mai visto veramente in riposo. Dalla ricerca scientifica, la quale ben sappiamo quanto sia laboriosa, se condotta colla sua incontentabile accuratezza, dall'insegnamento in cui versava il fervore di un apostolo, egli si ristorava con lunghe cacce, con aspre escursioni in montagna, rese più faticose dal paziente e laborioso esercizio della fotografia, nel quale univa alla sicura e perfetta tecnica dello scienziato, il gusto e il sentimento poetico di un vero artista, l'amore insaziabile del bello, del bello, dico, severo e semplice:

i boschi, i monti, le ingenue e forti opere d'arte del primo rinascimento che conserva la sua Barga, erano i soggetti che prediligeva, e rendeva mirabilmente coll'aiuto dei suoi fratelli.

Noi, vedendo la sua instancabile attività, vedendolo alla sera di una giornata di lavoro, fresco come al mattino, al ritorno di una escursione, leggero e svelto come alla partenza, mentre dapprima ci sembrava incompatibile tanta vigoria col suo aspetto gracile; noi suoi famigliari, ci abituammo poi a quel contrasto singolare, e anzi fummo indotti per contrario ad attribuirgli una robustezza eccezionale, e a nutrire della sua salute una fiducia che purtroppo era esagerata. E al dolore inconsolabile si aggiunse un senso violento di stupore quando (era il 19 di Luglio) ci colpì, come un fulmine a ciel sereno, la notizia che il nostro povero amico, addormentatosi alla sera, come al solito, nel suo letto, non si era destato al mattino, non si desterà più mai.

I nostri cervelli sgomenti, per fuggire la ripugnanza dell'assurdo, ricadevano quasi in un antichissimo pregiudizio. « Già — si esclamava con infinito sconforto — non poteva vivere a lungo, perchè era troppo buono ». Da qual mai occulta radice dell'anima si alimenta questa superstizione, che, stroncata tante volte dalla logica, germoglia sempre di nuovo nei momenti di grande sconforto?

Ma solo questo di vero si conteneva nella dolente esclamazione: che la bontà di Luigi Magri fu piuttosto singolare che rara. Non era essa l'effetto di un ideale, sia pur nobilissimo, ma in certo modo sovrapposto allo spirito, non la fredda conseguenza di un savio sistema etico, era qualcosa di più naturale, di più puro e insieme di più vivo; veniva di dentro; dava idea di una fiammella inestinguibile, che riscaldava e illuminava tutto il suo mondo intimo, e si alimentava di affetto, non di raziocinio. In cima ai suoi pensieri c'era sì un punto supremo, al quale io stimo egli non abbia pensato mai di poter dare un nome, o far corrispondere un concetto determinato: il bello, il vero, il bene vi si confondevano armoniosamente.

Ma il suo sentimento per gli altri si qualifica facilmente con una semplice parola: *fraterno*. Così nessuno che presso di lui tentasse qualcosa di buono, che cercasse qualche forma di vero o di bello, lo sentì mai estraneo a sè: mentre nessuno potè sperare il suo aiuto o il suo favore per cosa meno nobile o degna.

Tutti noi, che siamo stati suoi condiscepoli e poi suoi colleghi, non abbiamo mai potuto esprimergli a pieno la nostra gratitudine di quanto ha fatto con noi e per noi; già era quasi impossibile il ringraziarlo, o piuttosto, se mi si consente un' espressione un po' scherzosa, il fargli subire con serietà un ringraziamento: sfuggiva con un sorriso quasi fanciullesco, o con una domanda brusca e urgente cambiava discorso, o mandava in burla beneficio e ringraziamento insieme con una di quelle sue uscite bizzarre, cosicchè tutto finisse in ischerzo.

Io vorrei ora, parlando a nome di tutti i miei e suoi fratelli di studio e di lavoro, ricordare quanto dobbiamo alla sua cara e venerata memoria, di aiuto, di consiglio, di incoraggiamento, quanta dolcezza ha lasciato nel nostro cuore la semplicità cortese e la facilità instancabile con cui concedeva e offriva l'opera sua, in modo da manifestare chiaramente, che un ugual piacere provava lui nell' esser buono, come noi nel godere della sua bontà. Ma purtroppo scrivere ciò non è possibile; il racconto di qualche atto separato non darebbe una fedele immagine di quello spirito fraterno che si rivela per un gran numero di piccoli atti perfettamente concordanti nel fine.

Poco meno difficile è dare un'immagine viva dell' efficacia del suo insegnamento. Già la parte più importante della sua attività didattica era, secondo me, questa stessa sua bontà e gentilezza di amico, quando si volgeva ai meno provetti.

Nell' Istituto Fisico di Pisa, già anche prima che il Ramsay lo consigliasse pubblicamente, si era adottato il metodo didattico della cooperazione, per cui i giovani si esercitano e imparano, prendendo una parte da prima assai modesta, poi via via più importante alle lezioni sperimentali del corso generale e alle ricerche stesse.

Ora siccome Luigi Magri fu in quell'Istituto il principale collaboratore di Angelo Battelli che lo dirige, è facile comprendere quanto abbia in esso insegnato, fuori dei veri e propri corsi scolastici, con questa quotidiana disciplina, la quale fa ripensare a quella che si esercitava nelle *botteghe* degli artisti del rinascimento, tanto più efficace e viva che non la moderna accademia.

Giovanissimo cominciò l'arduo tirocinio della lezione cattedratica di fisica sperimentale, supplendo di quando in quando il maestro, e si mostrò subito anche per quella singolarmente dotato: la ricchezza e la facilità sicura delle dimostrazioni sperimentali, un bell'ordine logico, la parola spontanea, eletta, chiara, vivace erano i pregi esteriori, che gli permettevano di esprimere perfettamente il suo modo di concepire, netto, positivo, decisamente induttivo e sperimentale, immune dai pregiudizi del tradizionalismo e dalle astruserie e vacuità del dottrinalismo. Gli scolari lo amavano e ammiravano, e ben sappiamo che essi sono i migliori (non i più indulgenti) giudici dei professori.

Aveva, quando lo colse la morte, già avuto vasto campo di mostrare il suo valore, e precisamente per nove anni accademici aveva tenuto il corso di Fisica per le scuole superiori di Agraria, Veterinaria e Farmacia della R. Università di Pisa e da sette anni era professore di Fisica e Chimica nel R. Liceo di Pisa. Davvero una bella e vasta opera didattica che gli dava titolo di annoverarsi, giovane ancora, tra i nostri insegnanti più provetti e benemeriti.

Nessuno forse era dunque più di lui indicato per l'ufficio di Ispettore Regionale, e certo molto avrebbe anche per tale via giovato alla scuola media, perchè fra le altre doti sue, due ne possedeva difficilmente conciliabili: la grande esperienza e la gioventù. La opportunità della prima è ovvia, ma non meno, io credo, vale la seconda, se pur si vuole che l'Ispettorato funzioni con sollecitudine e solerzia, e valga a rinnovellare e rinfrescare l'insegnamento.

È meraviglioso come con tutte queste occupazioni e preoccupazioni gli rimanesse ancora forse la maggior parte del suo tempo da dedicare alla ricerca scientifica. In questa fu

uno sperimentatore vero e completo: a nessuna delle svariatissime tecniche sperimentali della nostra scienza egli era ormai profano; tutte le assimilava con una invidiabile facilità. Non si faceva schiavo dei soliti metodi, ma scegliendo il buono da essi, organava il metodo nuovo e appropriato al caso; e per l'apparecchio sperimentale ricorreva sempre più volentieri all'officina che al museo. In genere ha lavorato con istrumenti nuovi, fatti appositamente, che progettava con chiara visione del fine e con sicuro uso dei mezzi. Sempre coll'autorità dell'affetto e della stima che ispirava in tutti, sapeva comunicare al meccanico quella parte della sua idea che questi poteva comprendere, e infondergli l'interesse e l'amore al lavoro. E così gli riusciva benissimo ciò che molti dei lettori sapranno per prova quanto sia difficile e penoso, cioè il guidare le mani altrui col cervello proprio.

Questo modo di sperimentare, che è quello ideale, è anche quello che offre spesso le più amare delusioni, o almeno le più spiacevoli sorprese. Quante volte l'apparecchio seriamente ponderato e accuratamente costruito, mal risponde all'aspettativa mostrando fatti confusi tra i quali il fenomeno preso in istudio si sperde o almeno si turba in modo da dare lo sgomento nel ricercatore! Il male, si capisce, sta nell'apparecchio stesso; e in generale, la disposizione buona non si ottiene che dopo una lunga serie di tentativi e di serpeggiamenti. Rari sono gli sperimentatori che riescono facilmente alla prima, o almeno sanno subito orientarsi nel confuso garbuglio di una prima prova, e indicare con sicurezza la causa del disturbo e il modo di toglierla via. Egli era tra quei pochi: spesso con un'occhiata e due parole spicce, dette per lo più scherzosamente, toglieva di mezzo un di quelli incagli imprevisti che aveva messo altri in grave imbarazzo arrestando una ricerca interessante.

Solo avendo presente questo suo intuito sicuro e la sua solerzia incomparabile, si può comprendere come abbia a soli trentasei anni lasciata una produzione assai vasta per quantità, e per qualità irreprensibile. A nessuno secondo per iscrupolosa probità scientifica, non avrebbe stampato un rigo o riferito un numero se non ne fosse stato più che sicuro, ed

era capace di rinunziare senza rimpianto al frutto di lunghe fatiche se non ne era pienamente contento, e non era poi facile a contentarsi.

Ma ben altro si aveva ragione di aspettare nell'avvenire che lo ha tradito, da uno sperimentatore come lui.

L'attuale momento scientifico, in cui arditissime concezioni teoriche mirano ad unificare in una sintesi superba tutto il mondo fisico, e ritentano con ben altri mezzi i problemi generali della filosofia naturale sognati dagli antichi filosofi (quei problemi in faccia ai quali la rinunzia già era parsa il codice del metodo positivo); l'attuale momento — potrà chiedere alcuno — quale funzione assegna e qual posto prepara ad un puro sperimentatore? Si può senza esitazione rispondere: una funzione preziosa e un posto onorevole. È una funzione equilibratrice, ma ben diversa da quella della zavorra di una nave. Solo l'esperienza può infondere la verità obiettiva, cioè l'unica forma di verità che per la scienza ha valore, nelle vene di questi mirabili organismi generati dalla fantasia del geometra, solo lo sperimentatore è giudice inappellabile e supremo, solo per lui non corriamo il pericolo di rifare una nuova scolastica.

Ma il ripeter ciò è forse superfluo; non lo è però il richiamare alla mente l'opportunità, in tanta ricchezza e varietà di teorie, di dirigere lo sforzo sperimentale su quei fatti per mezzo dei quali è possibile l'*experimentum crucis*, cioè l'esperienza decisiva capace di distinguere quale teoria contenga più di verità.

Ma solo una tecnica perfetta, guidata da una grande chiarezza d'idee vale a tali cimenti. Basterebbe il saggio sull'indice di rifrazione dei gas per mostrare se Luigi Magri possedeva la piena capacità di fare un'esperienza decisiva, in un caso in cui ciò era stato per l'avanti tentato invano.

Egli dunque poteva per la scienza battere fidente *alle porte dell'avvenire.*

E anche per la vita ormai: ottenuta per merito (vero merito) una modesta ma per lui bastevole condizione sociale, colla più giustificata fiducia di averne alla prima occasione una migliore, compiute con piena soddisfazione le cure per

i fratelli minori, egli poteva finalmente pensare a formarsi la vita propria; e, sempre secondo la sua concezione, la voleva comporre ancora di dovere e magari ancora di sacrificio, purchè fosse riscaldata e illuminata dall'affetto.

A Lui l'estremo saluto ardisce inviare a nome di tutti i colleghi chi ultimo per merito, ebbe la fortuna di essergli tra i primi nell'amicizia, e sentì la propria madre, piangente al triste annunzio esclamare: « Gli volevo bene, come se fosse stato un altro mio figliuolo! ».

Pubblicazioni di Luigi Magri.

Essendo quasi tutte comparse in questo giornale, mi limito alle indicazioni bibliografiche e a qualche cenno per illustrarne piuttosto il valore che il contenuto.

Sulla distribuzione delle scariche oscillatorie nei circuiti derivati. Ricerche sperimentali. Nuovo Cimento, *Serie 4ª, Vol. IV, 1896.*

Fu la sua tesi di laurea, e consiste nella verificazione della teoria di Maxwell in un caso particolare accortamente scelto per evitare le enormi complicazioni del caso generale. La tendenza della sua mente a orientare esperienze quantitative, numerose, accurate e complete alla risoluzione sicura di un problema nettamente e chiaramente determinato, senza divagare in quelle esperienze qualitative che molto suggeriscono, ma poco risolvono, è già spiccata in questo suo primo saggio, per il quale si preparò gli apparecchi con abnegazione ammirevole, e condusse le misure con una precisione rara in un principiante. Egli fin d'allora s'impadronì della tecnica che permette la misura del calore svolto dalle scariche nei conduttori metallici, della quale fece poi largo uso insieme col maestro in un campo assai più vasto di ricerche.

Relazione tra l'indice di rifrazione e la densità dell'aria. Nuovo Cimento, *Serie 5ª, Vol. VII, 1904.* Physikalische Zeitschrift, *Jarg. 6, 1905.*

Per questa relazione sono state proposte tre leggi:

$$\frac{n^2-1}{d} = \text{cost.} \qquad \frac{n-1}{d} = \text{cost.} \qquad \frac{n^2-1}{n^2+2} = \text{cost.}$$

le quali logicamente si escludono l'una l'altra. Le esperienze seguite fino allora non erano abbastanza esatte o estese per non accordarsi indifferentemente con tutte e tre, ossia non avevano riscontrato altro che quella proporzionalità tra le variazioni delle due variabili, che esiste in generale

con buona approssimazione, finchè le variazioni stesse non sono abbastanza ampie. Infatti alla seconda, che è la più semplice, ed esprime tale proporzionalità nell'interno della coppia di valori $d = 0$ $n = 1$, si riducono le altre due, quando si trascuri la variazione relativa di $n + 1$ o di $n^2 + 2$, cioè quando l'indice sia poco diverso dall'unità, come è appunto finchè la densità non cresce assai. Già le esperienze che mostrano semplici proporzionalità lasciano sempre il dubbio che non abbiano rivelato la legge caratteristica del fenomeno, ma le più ovvie relazioni generali stabilite dal calcolo differenziale, o piuttosto dal semplice buon senso, che suggerisce appunto la proporzionalità tra causa ed effetto; esse possono essere cioè verificazioni inconcludenti di qualunque teoria, e possono solo riuscire utili all'empirismo per i valori numerici dei coefficienti. Nel caso presente volendo eseguire una verificazione che avesse un vero valore scientifico, cioè che scegliesse fra le tre se vi era, la relazione giusta, il Magri si poneva il problema sperimentale di rivelare chiaramente le variazioni di almeno due delle espressioni proposte come invarianti, variazioni che erano sfuggite ai suoi precursori.

Delle due grandezze n e d questa seconda è certo la più difficile a misurare con esattezza. Il Magri ebbe il senno di seguire l'esempio del Gale, il quale, a differenza di altri, ne faceva la determinazione direttamente, senza passare per la pressione.

Per l'indice n usò un rifrattometro di Jamin, che fece costruire appositamente, ottenendo una stabilità di montatura così perfetta, da permettere di lavorare a lungo, facendo passare più di mille frangie, con sicura costanza del punto di partenza.

Ma quel che più importava era il mantenere questa rigorosa precisione assai al di fuori dei limiti di densità, entro cui erano restati i precedenti sperimentatori.

Così la quistione delle tre leggi fu nettamente decisa in favore della terza, proposta da L. Lorenz e da H. A. Lorentz. E si noti che siccome la formula che l'esprime contiene, come le altre due, una sola costante, non è il caso di pensare alla approssimazione che si ottiene dalle formule del tutto empiriche, tanto migliore quante più costanti indeterminate esse contengono. Questa legge dunque viene dalle esperienze di L. Magri segnalata come quella buona, non solo per l'empirismo, ma per la verità scientifica.

Le stratificazioni nella scintilla elettrica. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. *(Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali). Serie 5ª, Vol. XVI, 1907.*

Scomponendo coll'aiuto dello specchio girante la scintilla oscillatoria, L. Magri scoperse l'esistenza di stratificazioni proprio nel caso opposto a quello in cui siamo abituati a osservarle, cioè con pressioni assai elevate. È un fatto curioso, e che mostra con più evidenza assai di altri osservati dal Villard, come bisogna guardarsi dal riconnettere troppo facilmente e semplicemente le stratificazioni colla grande lunghezza del cammino libero.

L'esperienza del Magri fa inoltre sospettare che anche in altri casi le stratificazioni nella scarica ci sieno, ma sieno celate o da qualche fenomeno concomitante o dalla loro instabilità, e che qualche artifizio sperimentale possa rivelarle.

La scintilla e l'arco. I PROGRESSI RECENTI DELLA FISICA TEORICA SPERIMENTALE ED APPLICATA. *Conferenze tenute nella R. Università di Genova, raccolte e pubblicate per cura di Antonio Garbasso. — Società editrice Dante Alighieri di Albrighi, Segati & C., Milano, Roma, Napoli, 1911.*

Queste conferenze in parte sperimentali, furono da varii scienziati tenute nell'Ottobre 1909, ma la pubblicazione ne andò in lungo. Il Magri nella sua avendo raccolti molti elementi da varie ricerche modernissime e dalla sua personale esperienza, li presentò in forma adatta a un uditorio non di scienziati, ma di persone non profane alla scienza; e, valendosi di felicissime dimostrazioni sperimentali, riuscì ad illustrare in modo facile e persuasivo le linee generali del meccanismo della scintilla e dell'arco, due fenomeni così comuni, e che pure prima della teoria degli ioni parevano quasi inesplicabili.

In collaborazione con Angelo Battelli.

Sui raggi anodici e sui raggi catodici. NUOVO CIMENTO, *Serie 4ª, tomo X, 1899.*

Con esperienze semplici e ingegnose gli autori mostrano come un elettrodo congiunto con un polo di una macchina elettrica in azione, il quale subisce cioè rapide variazioni di potenziale positive e negative, emetta due specie di raggi cioè raggi portanti carica negativa (catodici), e raggi meno penetranti, portanti carica positiva (anodici), i quali sono probabilmente della stessa specie dei Kanalstrahlen del Goldstein.

Sulle scariche oscillatorie.

a) **Prima e seconda Parte.** MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO. *Serie 2ª, tomo LI;* NUOVO CIMENTO, *Serie 5ª, Vol. III, 1902,*

nelle quali per la prima volta la classica teoria della scarica oscillante trovò una verificazione completa colla misura di tutti gli elementi elettrici e colla determinazione accurata della ripartizione dell'energia potenziale del condensatore nel circuito di scarica. Qui ritroviamo i termometri destinati alla misura dell'energia dissipata nelle varie parti del circuito, compresa questa volta anche la scintilla. Cura speciale del Magri fu la misura del periodo col metodo di Feddersen, e ne fece un piccolo capolavoro di finezza e di precisione. Ma un'esperienza fatta bene dice spesso qualche cosa oltre quella per cui è stata istituita: quelle nitide fotografie, oltre il periodo delle oscillazioni elettriche, indicano alcune particolarità interessanti per un altro fenomeno, la scintilla; e chi scrive già se ne valse dal punto di vista spettroscopico, e anche di ciò rende grazie alla memoria dell'amico.

b) **Parte terza.** NUOVO CIMENTO, *Serie 5a*, *Vol. XII, 1906*,

nella quale l'opera personale di L. Magri, che comprende le esperienze sui cicli di magnetizzazione del ferro per alte frequenze, è pregevole per chiarezza di intenti per evidenza di dimostrazione e per importanza di risultati.

c) **Sulle scariche oscillatorie.** MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI. *(Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.) Serie 5a, Vol. VII, 1909*,

che è un saggio di ciò che dovrebbe essere, secondo me, ora una ricerca spettroscopica, cioè lo studio non solo ottico, ma fisicamente completo di un aeriforme luminoso. Luigi Magri, resosi padrone del metodo più recente iniziato dal Lenard per l'arco, e trattandolo colla sua eccellente tecnica fotografica, ottiene risultati ammirevoli ugualmente dal punto di vista scientifico e da quello estetico, specialmente per chi ha veduto gli originali, che le prove in fotocollografia hanno sempre riprodotto imperfettamente.

Le ricerche che si trovano esposte ordinatamente in queste tre memorie definitive dettero luogo mentre si svolgevano anche alle note seguenti.

La scarica oscillatoria nei fili di ferro. RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI. *(Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali) Serie 5a. Vol. XV, 1906.*

La scarica oscillatoria nei solenoidi con anima di ferro. RENDICONTI *c. s. Serie 5a, Vol. XV, 1906.*

L'isteresi magnetica del ferro per correnti di alta frequenza. RENDICONTI *c. s. Serie 5a. Vol. XV, 1906.*

La scintilla elettrica nel campo magnetico. RENDICONTI *c. s. Serie 5a, Vol. XVI, 1907.*

Comportamento dei vapori metallici nella scintilla elettrica. RENDICONTI *c. s. Serie 5a, Vol. XVI, 1907.*

Sullo spettro della scintilla elettrica. RENDICONTI *c. s. Serie 5a, Vol. XVII, 1908.*

In collaborazione con Annibale Stefanini.

Azione del radio sulla scintilla elettrica. RENDICONTI *c. s. Serie 5a, Vol. XIII, 1904.*

Conferma e completa esperienze di vari ricercatori, distinguendo i casi in cui la scarica risulta facilitata da quelli in cui viene impedita.

Firenze, Novembre 1911.

L. PUCCIANTI.

SULLA FUSIONE DEL CARBONIO PER MEZZO DELL'EFFETTO JOULE.

NOTA DEL DOTT. M. LA ROSA.

In una Nota recente [1]), i Sigg. Watts e Mendenhall occupandosi del mio lavoro « Sulla fusione del carbonio per mezzo dell' effetto Joule » [2]), credono di dover pervenire, sulla base di nuove esperienze ad una conclusione diversa da quella da me indicata.

I punti essenziali della loro ricerca sono i seguenti:

1° Assicurare che l' incurvamento del bastoncino di carbone, riscaldato elettricamente, non dipende dal materiale di cementazione.

2° Determinare le temperature alle quali tale fenomeno avviene.

3° Esaminare il modo di prodursi delle asperità, più o meno regolari, sulla superficie laterale, sia quando il bastoncino di carbone venga riscaldato gradualmente e per un certo tempo, sia quando venga riscaldato bruscamente.

Sul primo punto essi concludono che l'incurvamento avviene anche indipendentemente dal materiale di cementazione, in conformità con i miei risultati.

Quanto al secondo, i suddetti AA. trovano che le temperature, a cui l' incurvamento può avvenire, sono più piccole di quelle dell' arco, e ne concludono che esso è dovuto non a fusione incipiente, ma ad un aumento della plasticità del carbonio, per effetto dell' elevata temperatura.

Sul terzo, infine, avendo osservato che le asperità si trovano di preferenza sulle parti giudicate più fredde, e che

[1]) *Ann. d. Phys. Bd.* 35. p. 783, 1911.
[2]) *N. Cim.*, vol. XX, pag. 302, 1910.

bitorzoletti analoghi si sogliono formare anche su carboni fra cui sia stato prodotto l' arco, concludono che tali asperità vengono generate per condensazione del vapore di carbonio.

In base a questi risultati gli AA. pensano che la temperatura più elevata, che si possa raggiungere, riscaldando per mezzo dell' effetto Joule un bastoncino di carbone, sia limitata dal punto di sublimazione di questo corpo alla pressione sotto cui si opera, e che quindi tale temperatura sia tutt' al più uguale — all' interno del filamento — a quella dell' arco.

In verità i fatti su cui i suddetti AA. hanno fermato la loro attenzione non sono tutti, nè i più importanti fra quelli da me addotti a fondamento della mia opinione.

Credo bene che nessuno, me compreso, possa attribuire *l' incurvamento* dei cilindretti, riscaldati elettricamente, ad altra causa che ad una notevole plasticità acquistata dal corpo riscaldato, qualunque esso sia. Su questo punto siamo certamente tutti d' accordo.

Ciò che interessava bene accertare, era se tale plasticità sia propria del carbonio, o sia a questo corpo comunicata dalle impurezze o dal cemento usato nel processo di fabbricazione dei bastoncini.

In proposito, mi si consenta di affermare, che le mie esperienze davano già migliore garanzia sull' attendibilità del risultato, che non quelle degli Autori.

I carboni da me adoperati erano (come dissi nel mio lavoro) i più puri che la Ditta Conradty potè fornirmi; e prima di venire sottoposti ad esperienza furono ulteriormente, e con molta cura, depurati, sottoponendoli per ben nove ore all' azione di una corrente di cloro, a temperatura superiore a 900°. In queste condizioni il cloro *porta via persino la silice,* e non era certo il caso di preoccuparsi ancora di possibili residui degl' idrocarburi serviti alla cementazione. Il residuo di cenere che era di 0,33 % prima del trattamento si ridusse dopo a 0,07 %.

Ora tale purificazione non è senza influenza su i risultati.

È noto che Moissan potè accertare, che i fatti di apparente fusione del carbonio (plasticità, formazione di goccioline, ecc.) ottenuti da Despretz, erano dipendenti proprio da formazione di composti del carbonio con le impurezze. Io stesso sono stato costretto a cercare di raggiungere la più grande purezza possibile del materiale da sperimentare, dopo avere constatata l' importanza grande che le impurezze avevano nel fenomeno. Un campione di carbone alquanto impuro, con circa l' 1 % di cenere (ferro e silice), si piegava con la massima facilità prima ancora che si fosse prodotta tutto intorno ad esso l' aureola luminosa; e dopo il riscaldamento rimaneva spugnoso e di facilissima rottura, esattamente come trovano i Sigg. Watts e Mendenhall; mentre i campioni depurati potevano presentare un piccolo incurvamento, se riscaldati a temperature alquanto più alte di quella a cui si produceva l' aureola, e conservavano sempre una struttura compatta ed una tenacità notevole.

Ora tutto ciò mi porta a ritenere che, se i carboni adoperati dai Sigg. Watts e Mendenhall fossero stati purificati (una tale pratica sembra che sia stata interamente trascurata), i risultati sarebbero stati diversi da quelli riferiti. Essi non avrebbero certo constatato gl'incurvamenti notevoli, che con facilità ottennero, a temperature anche inferiori a 2000°.

Le temperature alle quali gli AA. hanno sperimentato possono dunque essere alquanto più basse di quelle a cui ho fatto le mie esperienze; ciò viene confermato anche da quest' altro fatto, che, mentre nel caso mio un' esperienza *poteva tutt' al più durare pochissimi secondi* (trascorsi i quali il cilindretto scoppiava riducendosi in minutissimi frantumi), nelle ricerche degli AA., un' esperienza *poteva durare 4 o 5 minuti primi.*

Anzi in proposito voglio rilevare che le condizioni delle mie esperienze permettevano di raggiungere temperature più alte di quelle degli AA, benchè questi abbiano potuto disporre di 66 Kilowatt, mentre io disponevo solamente di 15 Kw.

Infatti, mentre nelle mie esperienze la potenza disponibile veniva spesa in un cilindretto di carbone di 3 cm. di

lunghezza e 0,2 cm. di diametro, nelle esperienze degli AA. la lunghezza del cilindro di carbone era 15 o 30 ed il diametro 0,6 cm.

L' energia irradiata da questo cilindro era dunque alquanto più grande — essendo più grande la superficie laterale — di quella irradiata dal mio. Trascurando le altre perdite di energia, che nel caso presente erano assai piccole rispetto alla porzione irradiata, possiamo calcolare l' *ordine di grandezza* delle temperature che nei due diversi casi si potevano raggiungere, cercando il valore della temperatura, per cui la potenza perduta diventava uguale a quella ricevuta. Essendo le temperature raggiunte grandi rispetto quella dell' ambiente si può porre senz' altro:

$$\sigma\,\theta^4 . S = 15{,}000\,; \quad \sigma\,\theta_1^4\,S_1 = 66{,}000\,; \quad \sigma\,\theta_2^4\,S_2 = 66{,}000$$

dove σ è la costante d' irraggiamento, le θ denotano le temperature assolute raggiunte e le S le superfici laterali.

Per queste si ha:

$$S = 2\,\pi \,.\, 0{,}1 \cdot 3 \quad S_2 = 2\,\pi \,.\, 0{,}3 \cdot 15 \quad S_2 = 2\,\pi\, 0{,}3 \cdot 30\,.$$

Dalle relazioni scritte si trae:

$$\frac{\theta}{\theta_1} = \sqrt[4]{\frac{15}{66} \cdot \frac{4{,}5}{0{,}3}} = 1{,}36 \qquad \frac{\theta}{\theta_2} = \sqrt[4]{\frac{15}{66} \cdot \frac{9}{0{,}3}} = 1{,}61.$$

Se poi poniamo $\sigma = 6{,}39 \cdot 10^{-12}$ troviamo: [1]

$$\theta = 5900^\circ \quad \theta_1 = 4300^\circ \quad \theta_2 = 3680^\circ\,.$$

Questo risultato conferma ancora una volta che le esperienze degli AA. cadono dentro limiti di temperatura alquanto più ristretti di quelli a cui le mie sono state spinte. Si può è vero osservare che siccome durante il riscaldamento intenso il cilindro di carbone si assottiglia (per evaporazione e per combustione) le condizioni degli AA. a-

[1]) Il valore di σ adottato è quello del corpo nero; ed essendo più grande di quello del carbonio, può compensare in parte le altre perdite di energia che abbiamo trascurate.

vrebbero dovuto ridursi identiche alle mie; ma ciò non è esatto poichè il cilindretto di carbone, a causa della plasticità che acquista col riscaldamento, cede e si rompe sotto l'azione di forze deboli ma di durata relativamente lunga — quali il proprio peso o una debole pressione interna — ancora prima che possa raggiungere una temperatura elevata. Nel caso degli AA. le condizioni erano rese ancora più sfavorevoli dalla presenza delle impurezze.

Quanto ai bitorzoletti che si producono sulla superficie laterale del carbone ritengo che nelle esperienze degli AA., essi siano tutt' altra cosa che nelle mie; quelli descritti dagli AA. credo che siano uguali a quelli osservati da Drespretz, e dovuti a composti del carbonio con le impurezze, più fusibili di questo corpo.

L' ipotesi che quelli da me osservati siano dovuti a considerazione e, secondo me, insostenibile. L' aspetto e le proprietà dei depositi ottenuti per condensazione dei vapori di carbonio sono interamente diversi da quelli che ho trovato sui cilindretti sottoposti al riscaldamento di Joule.

La differenza profonda fra tali depositi e quelli per sublimazione ho avuto occasione di studiare meglio, e stabilire nettamente, in occasione delle mie esperienze sulla fusione del carbonio nell' arco cantante, e non posso su tal punto conservare dei dubbi.

I depositi di vapore di carbonio sul polo negativo dell' arco si producono sempre sotto forma di polvere incoerente, che si accumula tutt' attorno alla punta del carbone quasi a formare una specie di barba; i bitorzoletti, che spesso vi si osservano, e che vengono menzionati dagli AA., hanno sempre l' origine indicata da Moissan e che già ho ricordata.

Del resto, come già dissi, non sono questi i fatti più importanti in cui ho creduto di potere scorgere elementi di prova, in favore della fusione.

Essi scaturiscono, invece, dall' osservazione al microscopio dei minutissimi frammenti che si ottengono dopo l' esplosione violenta, provocata da una chiusura istantanea — in corto circuito — del filamento ai poli della sorgente di ener-

gia; e ancora meglio dall' *osservazione degli spruzzi grafitici che si ottengono sulle pareti dell' ambiente chiuso, in cui l'esplosione avviene.* L' aspetto di quei frammenti e di queste macchie, e la struttura e la tenacità loro, l'adesione forte alle pareti, tutto parla in modo assai suggestivo in favore dell' ipotesi della fusione.

E qui si badi che nondimeno non ho concluso in favore della fusibilità del carbonio a pressione ordinaria (atmosferica). Nella discussione che ho fatto seguire alle mie ricerche ho detto fra l' altro che la fusione, se avviene, avviene dentro il filamento, dove domina certamente una temperatura più alta di quella della superficie, ed una pressione più grande dell' atmosferica; (come appunto dimostra la forza balistica che provoca la violenta esplosione); e *potrebbe bene avvenire* che una tale pressione, sia dovuta in tutto o in gran parte al vapore di carbonio, e sia *necessariamente vincolato* all' esistenza della fase liquida.

Anzi ho detto nel mio lavoro, che questo punto rimane ancora incerto, e che esperienze sotto pressioni più alte sarebbero state necessarie e molto utili per chiarirlo.

E qui mi si permetta ancora di rilevare, che a me non sembra esatta l' affermazione degli AA., che la temperatura più alta che possa raggiungere l' interno del filamento sia quella del cratere dell' arco. Ammettendo pure che la temperatura raggiunta dal cratere positivo dell'arco sia quella alla quale la tensione di vapore del carbonio uguagli la pressione atmosferica (cosa che non è senz' altro accettabile) si deve sempre ritenere che all' interno del filamento si raggiungano temperature più alte, poichè ivi l' vaporazione non avviene liberamente, e si possono determinare tensioni di vapore alquanto più grandi della pressione atmosferica.

Anzi, se il riscaldamento è rapidissimo, la crosta esterna, esposta all' irradiazione, può essere ancora abbastanza fredda, e poco cedevole, quando le porzioni assiali sono già molto calde; le maggiori pressioni che si possono manifestare all' interno, in tal caso diventerebbero abbastanza grandi, e la temperatura interna potrebbe montare alquanto al disopra di quella, per la quale il carbonio acquista una tensione di

vapore uguale alla pressione atmosferica. Questo assai verosimilmente è il caso delle mie esperienze.

Concludendo credo di potere ancora mantenere la mia opinione sulla comparsa dello *stato* [1]) liquido nelle esperienze in parola. Ed è bene avvertire che tale opinione non è contraditttoria con quella dei Sigg. Watts e Mendenhall — come sembra che questi AA. ritengano. — Il presentarsi dello *stato* liquido secondo i concetti moderni (di Tamann e della sua scuola) può a null'altro essere dovuto che ad una graduale diminuzione della viscosità di una *stessa* ed *inalterata fase* la *fase amorfa* o *liquida*.

La fusione, nel senso ordinario, a cui mi sono sempre attenuto, può dunque ridursi a null'altro che a quello accrescimento della plasticità di cui parlano i nostri AA.

Non pertanto, si può forse ritenere che nelle esperienze da me descritte vengano effettivamente raggiunte le condizioni per una *vera fusione,* poichè il corpo arriva ad acquistare (a quanto sembra) in grado notevole quei caratteri di fluidità che caratterizzano lo *stato* liquido e di più dopo raffreddamento si trova un deposito con i caratteri della *grafite cristallizzata* (caso degli spruzzi grafitici sulla capsula di porcellana).

Se le cose stanno esattamente in questo modo si può dire di essere in presenza di un vero passaggio inverso da liquido (non soprafuso) a solido; ciò che equivale ad affermare, che le condizioni di fusione vengono effettivamente raggiunte.

[1]) La parola *stato* è usata qui nel vecchio senso, ed è riguardata come espressione di un concetto ben distinto da quello indicato dalla parola *fase*.

LE FORZE CAPILLARI E L'EVAPORAZIONE.

CARLO DEL LUNGO.

I.

La pressione superficiale.

Secondo la teoria del Laplace, le molecole d'un liquido che si trovano nello *strato superficiale,* sono soggette ad una forza attrattiva diretta verso l'interno. Questa attrazione, dovuta all'azione delle molecole vicine, comprese dentro *la sfera d'azione*, è massima alla superficie e va decrescendo, diventando nulla al limite inferiore dello strato, la cui altezza è appunto eguale al raggio r della sfera d'azione. La resultante di tutte le forze agenti sulle molecole dello strato, nell' unità di superficie, costituisce la *pressione superficiale* P, che deve essere grandissima, ma che l'esperienza non può dimostrare direttamente. È tuttavia possibile determinarla per via indiretta.

La forza attrattiva sopra l'unità di massa nello strato superficiale, variando con la distanza h dalla superficie, può essere rappresentata da una funzione $f(h)$. Indicando con ρ la densità del liquido, la forza sopra uno strato di spessore dh, alla distanza h dalla superficie, sarà, per unità d' area $\rho f(h)\,dh$; e la somma delle forze, sopra tutto lo strato, ossia la *pressione superficiale* sarà

$$P = \rho \int_0^r f(h)\,dh\,.$$

Ma l'integrale $\int_0^r f(h)\,dh$ misura il lavoro L della forza,

quando l'unità di massa passa dalla superficie all'interno del liquido, traversando tutto lo strato: perciò avremo

$$P = \rho L . \tag{1}$$

Nella vaporizzazione, le molecole che escono dal liquido debbono, prima, traversare lo strato superficiale, compiendo un lavoro L per ogni unità di massa che si vaporizza: inoltre, per distaccarsi dalla superficie, devono eseguire altrettanto lavoro, ossia, in tutto, 2 L. Poichè, la forza di coesione è *simmetrica* rispetto alla superficie esterna, e *sopra* di essa riprende i medesimi valori che *di sotto,* cioè dentro lo strato.

Questo lavoro 2 L nella vaporizzazione dell'unità di massa, deve corrispondere al *calore interno di vaporizzazione* C, cioè al calore totale diminuito del lavoro esterno. Perciò, indicando con $E = 4{,}2.10^7$ l'equivalente meccanico della caloria-grammo, potremo scrivere

$$E\,C = 2\,L \qquad \text{ossia, per la (1), } E\,C = \frac{2\,P}{\rho}$$

da cui

$$P = \frac{E\,\rho\,C}{2} . \tag{2}$$

Questa relazione (salvo l'ipotesi che la densità ρ resti invariata anche nello strato superficiale) è da considerarsi *esatta;* essa ci permette di determinare la pressione P, e ci fa intanto vedere che la pressione superficiale decresce con la temperatura (insieme con ρ e C) e deve esser nulla alla temperatura critica, dove $C = O$.

La (2) ci dà la pressione in *barie* (dine per cm^2). Per averla in atmosfere, occorre dividere per 1.013.030. Si ha, allora,

$$P = \rho\,C\,\frac{4{,}2.10^7}{2.1013030} = 20{,}73.\,\rho\,C .$$

Ecco i valori che si ottengono per alcuni liquidi a 0°

	ρ	C	P (atm)
Acqua	0,999	575,5	11928
Alcool	0,806	223,5	3733
Etere	0,736	86,5	1320
Solf. di Carbonio	1,29	82,8	2214

A temperature più elevate, si trova

Acqua (a 100°)	P = 9852
Alcool (a 50°)	» 3637
Etere (a 30°)	» 1268

Questi valori della pressione P si accordano assai bene con quelli trovati da Van der Waals per via tutto diversa [1]. Egli ammette che, nella sua equazione dei vapori

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = \mathrm{R\,T}$$

il termine $\frac{a}{v^2}$, il quale esprime l'effetto della coesione molecolare, esprima la pressione superficiale del liquido, quando si faccia v eguale al volume della sostanza allo stato liquido. Si avrebbe, dunque, con tale ipotesi

$$\mathrm{P} = \frac{a}{v^2} = a\,\rho^2 .$$

Così, il Van der Waals trova i seguenti valori, in atmosfere:

Acqua	10500 — 10700	*Etere*	1300 — 1430
Alcool	2100 — 2400	*Solf. di C.*	2890 — 2900

Secondo l'ipotesi di Van der Waals, la pressione superficiale P sarebbe invariabile, o quasi, con la temperatura; il

[1]) « Die continuität des gasf. und. fluss. Zustandes ». Zweite Aufl., Leipzig, 1899. I Theil. pag. 110 e 175.

che non è ammissibile. Ma bisogna ricordare che la sua equazione, rappresentante l'isoterma dei vapori, non è che approssimata, e che il termine che esprime la coesione deve variare con la temperatura. Clausius, nella sua formula più corretta, ha sostituito al termine $\frac{a}{v^2}$, un termine più complesso $\frac{a}{T(v+b)^2}$, che decresce appunto con la temperatura.

J. Stefan [1]) ha trovato una formola analoga alla (2), ma seguendo un cammino un po' diverso ed incorrendo in un errore. Egli ammette che, nella vaporizzazione, le molecole si partano dalla superficie del liquido, compiendo un lavoro L eguale a quello necessario per portarle dall' interno alla superficie.

Ma bisogna anche considerare, che per ogni molecola che si distacca dalla superficie, un' altra va a prendere il suo posto provenendo dall' interno. Si può, dunque, considerare inalterato lo strato superficiale, e ammettere che le molecole che si vaporizzano, provengono dall'interno, traversano tutto lo strato e, infine, si distaccano dalla superficie, compiendo in tutto un lavoro *doppio* di quello computato dallo Stefan. Il quale ottiene la formula $P = E C \rho$ (sebbene in altra forma) e trova, naturalmente, valori doppî di quelli ottenuti con la (2); e perciò in disaccordo con quelli trovati da Van der Waals.

II.

La Legge di J. Thomson.

È nota la relazione importante stabilita da J. Thomson, fra la pressione di saturazione di un vapore e la curvatura della superficie liquida.

Se p è la pressione di saturazione presso la superficie piana del liquido, la pressione del vapore stesso, presso una sfera o menisco sferico di raggio R, è data da

$$p + \frac{2\alpha}{\rho} \frac{\sigma}{\rho - \sigma}$$

[1]) *Wied. Annalen.* XXIX, 1886.

dove α è la tensione superficiale, e ρ e σ le densità del liquido e del vapore. Se il menisco è concavo, il secondo termine è negativo.

Il Thomson arrivò a questa formula considerando l'equilibrio del liquido e del vapore alle diverse altezze nei tubi capillari, ammettendo, come fatto d'esperienza, che questo equilibrio c'è, e che il liquido non distilla dalle parti più elevate a quelle più basse. Vediamo, ora, come si può arrivare alla medesima legge per via diretta, partendo dal principio della tensione superficiale e senza occuparci dei dislivelli nei tubi capillari.

Consideriamo un liquido e il suo vapore saturo, di pressione p. Se si vaporizza un volume $d\,v$ di liquido, che allo stato di vapore occupa il volume $d\,w$, si compirà il lavoro esterno $p\,(d\,w - d\,v)$.

Ma se la vaporizzazione avviene sopra una goccia sferica di raggio R, che vaporizzandosi diminuisce di volume e di superficie, la tensione superficiale fornirà un lavoro *positivo*

$$\alpha\,d\,S = 2\,\alpha\,\frac{d\,v}{R} \qquad \text{essendo } d\,S = \frac{2\,d\,v}{R}$$

e perciò il lavoro esterno necessario sarà *minore*, e sarà dato da

$$p(d\,w - d\,v) - 2\,\alpha\,\frac{d\,v}{R} = (d\,w - d\,v)\left(p - \frac{2\,\alpha}{R}\,\frac{d\,v}{d\,w - d\,v}\right);$$

ovvero, poichè $\frac{d\,v}{d\,w - d\,v} = \frac{\sigma}{\rho - \sigma}$

il lavoro verrà espresso da

$$(d\,w - d\,v)\left(p - \frac{2\,\alpha}{R}\cdot\frac{\sigma}{\rho - \sigma}\right)$$

che si riduce a $p\,(d\,w - d\,v)$ per $R = \infty$, cioè nel caso di una superficie piana.

Dunque, per la goccia sferica, è *come se* la pressione esterna da superare fosse minore di p, e, precisamente fosse

$$p - \frac{2\alpha}{R} \cdot \frac{\sigma}{\rho - \sigma} .$$

Quindi la goccia, o il menisco sferico convesso, non sarà in equilibrio col vapore circostante proveniente dalla superficie piana del liquido. Per l'equilibrio, ossia perchè il vapore sia saturo sopra il menisco, la pressione dovrà essere aumentata della quantità corrispondente, ed essere, dunque, non p ma

$$p + \frac{2\alpha}{R} \frac{\sigma}{\rho - \sigma}$$

come vuole la legge di J. Thomson.

R. Liceo di Urbino.

COME SI STABILISCONO I FENOMENI LUMINOSI ALL'INIZIO DELL'ARCO.

DI A. OCCHIALINI.

Del metodo di adescamento dell'arco fra elettrodi staccati e del dispositivo cinematografico per fotografare le varie fasi dell'arco ho avuto occasione di servirmi per osservare alcuni fenomeni che accompagnano l'arco nel periodo iniziale [1]. Dello stesso metodo mi servo ora per indagare in qual modo incominciano i fenomeni luminosi allorchè l'arco si adesca; e in questa nota mi propongo di esporre alcuni risultati di tali ricerche.

Sullo stesso argomento ebbe occasione di intrattenersi soltanto il Villard [2]) mentre osservava i fenomeni luminosi in un arco alternato; e delle conclusioni alle quali è giunto si è valso per dar valore a una sua interpretazione della scarica nei gas.

Appunto per l'aiuto che tali studi possono portare nell'interpretazione della scarica in generale, e particolarmente del meccanismo dell'arco elettrico, io li ho ripresi; tanto più che il mio metodo di adescamento, permettendo un brusco verificarsi di certe circostanze, è atto a rivelare i fenomeni preparatorii e iniziali forse meglio dell'arco alternato, in cui le condizioni variano con continuità.

Per chiarezza riporto qui la figura 1 che indica il dispositivo per ottenere le cinematografie dell'arco. ABC sono i tre carboni che servono per l'adescamento fra elettrodi staccati: fra A e B un arco continuo ha per scopo di elevare

[1]) *Nuovo Cimento*, *18*, 63, 1909; *19*, 311, 1910; *2*, 329, 1911.
[2]) *Journal der Physique*, 7, 350, 1908.

la temperatura del catodo B; se una conveniente differenza di potenziale è stabilita fra C positivo e B negativo un arco scocca fra questi due carboni. O è un obbiettivo che dà un' immagine dei carboni sopra il cilindro D il quale è gire-

Fig. 1.

vole intorno a un asse e si sposta parallelamente a questo quando il dente E è portato a ingranare con la vite che gli sta sopra. Il disco F munito di fori, girando rapidamente nello stesso tempo che il cilindro D gira lentamente, permette il passaggio della luce e l'impressione della carta sensibile distesa su D ad intervalli uguali di tempo.

2. **Propagazione della luminosità nell'arco.** — La figura 2 rappresenta le successive fasi di archi adescati con anodo caldo e con una differenza di potenziale di 70 volta. Nelle diverse immagini appare un ciuffo luminoso attaccato all'anodo ed esteso verso il catodo sempre più di mano in mano che si procede verso la parte inferiore della fotografia, ossia di mano in mano che si considerano immagini più lontane dall'istante di adescamento. Ciò vuol dire che nelle condizioni sudette di adescamento la luminosità si propaga dal positivo al negativo.

Il Villard ha osservato lo stesso risultato in un arco alternato; la luminosità in ogni mezzo periodo si propaga dal po-

sitivo al negativo. Osserviamo che nell'arco alternato gli elettrodi sono caldi necessariamente e l'adescamento avviene nelle circostanze in cui è stata ottenuta la figura 2, circostanze che si realizzano con l'accendere un arco subito dopo averne spento uno preesistente.

Il Villard da questo fatto ha creduto di poter dedurre che nell'arco la scarica si propaga dal positivo al negativo; su questo punto vedremo più tardi che cosa suggerisce l'osservazione.

Fig. 2.

La figura 3 riproduce le diverse fasi di un arco adescato con anodo caldo, quando la differenza di potenziale fra gli elettrodi è 220 volta. Sostanzialmente si verifica lo stesso fenomeno osservato quando la differenza di potenziale è di 70 volta; ancora i fenomeni luminosi si propagano dall'anodo al catodo, ma la velocità di propagazione è assai maggiore quando la differenza di potenziale è di 220 volta. Per avere una idea di questa velocità dalle fotografie, bisogna sapere che in quelle riprodotte nella figura 2 l'intervallo di tempo che intercede fra due immagini consecutive è di 1/44 di secondo, invece nella figura 3 le immagini si susseguono con un intervallo di 1/224 di secondo.

Fig. 3.

3. La propagazione della scarica nell'arco.

— A questo punto si può constatare che la scarica non si inizia all'anodo come si sarebbe tentati di credere dall'iniziarsi e dal procedere della luminosità. Infatti esaminiamo la figura 4 che rappresenta le diverse fasi dell'adescamento ottenuto con catodo caldo con 110 volta e con 6 Mkf. in derivazione sugli elettrodi.

L'arco propriamente detto incomincia alla 5ª immagine. Eppure la scarica è sicuramente incominciata fin dalla 3ª immagine e per convincersene basta osservare la debole

luminosità che parte dal catodo e che si vede chiaramente a cominciare dalla 3ª immagine; e la lunghezza crescente che di questa luminosità si osserva procedendo verso il basso sta ad indicare che essa si propaga dal negativo al positivo.

Dunque la scarica incomincia al catodo dal quale partono i centri negativi iniziatori del fenomeno. In condizioni ordinarie essa in principio non è accompagnata da fenomeni luminosi e procede oscura finchè non ha raggiunto l' anodo. Con una capacità in derivazione si rende visibile anche questa prima parte della scarica.

Fig. 4.

4. La registrazione fotografica continua. — La registrazione cinematografica non si presta all'esame di tutte le particolarità di un fenomeno.

Se con essa si vogliono immagini nette si deve poter considerare la pellicola sensibile come ferma nell'intervallo di tempo che dura la posa di un'immagine. Conseguentemente la velocità della pellicola è sempre assai limitata e quindi con tale metodo non si riesce a scindere le varie parti di un processo rapido.

Il fenomeno esplosivo iniziale dell'arco è appunto tanto rapido da non essere analizzato nell'impressione intermittente. Per esso ho voluto sperimentare la registrazione continua sulla carta sensibile con lo stesso dispositivo che ho descritto qui sopra, salvo la soppressione del disco di zinco munito di fori. In queste condizioni il cilindro può ruotare con qualunque velocità, giacchè su di esso si deve osservare, non più l'immagine dell'arco, ma la posizione della luminosità del gas nei diversi istanti.

Naturalmente con tal metodo l'arco deve essere parallelo all'asse del cilindro rotante. Per escludere la luce data dall'arco ausiliario e quella degli elettrodi che supera di gran lunga quella del gas, ho posto una larga fenditura opportunamente orientata davanti all'otturatore.

5. Propagazione della luminosità nella fase esplosiva. — Delle fotografie eseguite col metodo descritto sopra, quelle di archi adescati su anodo freddo e senza condensatore in derivazione si interpretano male per l'irregolarità con la quale il processo esplosivo si compie.

In molte prove sembra che la luminosità si propaghi dal positivo al negativo, in altre si direbbe che la striscia luminosa abbia origine contemporaneamente su tutta la sua lunghezza.

Quindi inclino a credere che nella fase esplosiva l'arco sia sede di un complesso fenomeno che varia in modo casuale.

Un risultato ben deciso si ottiene esaminando la fase esplosiva di un arco adescato con una capacità in derivazione sugli elettrodi. I fenomeni luminosi si rivelano con un tratto che nella fotografia appare sempre piegato in modo da indicare che esso si inizia all'elettrodo negativo e si propaga ra-

Fig. 5.

Fig. 6.

pidamente verso l'anodo. Le figure 5 e 6 mostrano questo comportamento giacchè, tenuto conto del movimento della pellicola sensibile, la luce vicina all'anodo appare emessa più tardi che quella presso al catodo.

In questo fatto vedo un argomento di più per ritenere che la scarica incomincia sempre dall'elettrodo negativo; però mentre essa si propaga verso l'anodo non è visibile se in derivazione sugli elettrodi non è posta una conveniente capacità.

vapore uguale alla pressione atmosferica. Questo assai verosimilmente è il caso delle mie esperienze.

Concludendo credo di potere ancora mantenere la mia opinione sulla comparsa dello *stato* [1]) liquido nelle esperienze in parola. Ed è bene avvertire che tale opinione non è contradittoria con quella dei Sigg. Watts e Mendenhall — come sembra che questi AA. ritengano. — Il presentarsi dello *stato* liquido secondo i concetti moderni (di Tamann e della sua scuola) può a null'altro essere dovuto che ad una graduale diminuzione della viscosità di una *stessa* ed *inalterata fase* la *fase amorfa* o *liquida*.

La fusione, nel senso ordinario, a cui mi sono sempre attenuto, può dunque ridursi a null'altro che a quello accrescimento della plasticità di cui parlano i nostri AA.

Non pertanto, si può forse ritenere che nelle esperienze da me descritte vengano effettivamente raggiunte le condizioni per una *vera fusione*, poichè il corpo arriva ad acquistare (a quanto sembra) in grado notevole quei caratteri di fluidità che caratterizzano lo *stato* liquido e di più dopo raffreddamento si trova un deposito con i caratteri della *grafite cristallizzata* (caso degli spruzzi grafitici sulla capsula di porcellana).

Se le cose stanno esattamente in questo modo si può dire di essere in presenza di un vero passaggio inverso da liquido (non soprafuso) a solido; ciò che equivale ad affermare, che le condizioni di fusione vengono effettivamente raggiunte.

[1]) La parola *stato* è usata qui nel vecchio senso, ed è riguardata come espressione di un concetto ben distinto da quello indicato dalla parola *fase*.

LE FORZE CAPILLARI E L'EVAPORAZIONE.

CARLO DEL LUNGO.

I.

La pressione superficiale.

Secondo la teoria del Laplace, le molecole d'un liquido che si trovano nello *strato superficiale,* sono soggette ad una forza attrattiva diretta verso l'interno. Questa attrazione, dovuta all'azione delle molecole vicine, comprese dentro *la sfera d'azione*, è massima alla superficie e va decrescendo, diventando nulla al limite inferiore dello strato, la cui altezza è appunto eguale al raggio r della sfera d'azione. La resultante di tutte le forze agenti sulle molecole dello strato, nell'unità di superficie, costituisce la *pressione superficiale* P, che deve essere grandissima, ma che l'esperienza non può dimostrare direttamente. È tuttavia possibile determinarla per via indiretta.

La forza attrattiva sopra l'unità di massa nello strato superficiale, variando con la distanza h dalla superficie, può essere rappresentata da una funzione $f(h)$. Indicando con ρ la densità del liquido, la forza sopra uno strato di spessore dh, alla distanza h dalla superficie, sarà, per unità d'area $\rho f(h)\,dh$; e la somma delle forze, sopra tutto lo strato, ossia la *pressione superficiale* sarà

$$P = \rho \int_0^r f(h)\,dh\,.$$

Ma l'integrale $\int_0^r f(h)\,dh$ misura il lavoro L della forza,

quando l'unità di massa passa dalla superficie all'interno del liquido, traversando tutto lo strato: perciò avremo

$$(1) \qquad P = \rho L .$$

Nella vaporizzazione, le molecole che escono dal liquido debbono, prima, traversare lo strato superficiale, compiendo un lavoro L per ogni unità di massa che si vaporizza: inoltre, per distaccarsi dalla superficie, devono eseguire altrettanto lavoro, ossia, in tutto, 2 L. Poichè, la forza di coesione è *simmetrica* rispetto alla superficie esterna, e *sopra* di essa riprende i medesimi valori che *di sotto,* cioè dentro lo strato.

Questo lavoro 2 L nella vaporizzazione dell'unità di massa, deve corrispondere al *calore interno di vaporizzazione* C, cioè al calore totale diminuito del lavoro esterno. Perciò, indicando con $E = 4{,}2.10^7$ l'equivalente meccanico della caloria-grammo, potremo scrivere

$$E\,C = 2L \qquad \text{ossia, per la (1),} \; E\,C = \frac{2P}{\rho}$$

da cui

$$(2) \qquad P = \frac{E \rho C}{2} .$$

Questa relazione (salvo l'ipotesi che la densità ρ resti invariata anche nello strato superficiale) è da considerarsi *esatta;* essa ci permette di determinare la pressione P, e ci fa intanto vedere che la pressione superficiale decresce con la temperatura (insieme con ρ e C) e deve esser nulla alla temperatura critica, dove $C = O$.

La (2) ci dà la pressione in *barie* (dine per cm²). Per averla in atmosfere, occorre dividere per 1.013.030. Si ha, allora,

$$P = \rho C \frac{4{,}2.10^7}{2.1013030} = 20{,}73.\, \rho C .$$

Ecco i valori che si ottengono per alcuni liquidi a 0°

	ρ	C	P (atm)
Acqua	0,999	575,5	11928
Alcool	0,806	223,5	3733
Etere	0,736	86,5	1320
Solf. di Carbonio	1,29	82,8	2214

A temperature più elevate, si trova

Acqua (a 100°)	P = 9852
Alcool (a 50°)	» 3637
Etere (a 30°)	» 1268

Questi valori della pressione P si accordano assai bene con quelli trovati da Van der Waals per via tutto diversa [1]). Egli ammette che, nella sua equazione dei vapori

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = \mathrm{R\,T}$$

il termine $\frac{a}{v^2}$, il quale esprime l'effetto della coesione molecolare, esprima la pressione superficiale del liquido, quando si faccia v eguale al volume della sostanza allo stato liquido. Si avrebbe, dunque, con tale ipotesi

$$\mathrm{P} = \frac{a}{v^2} = a\rho^2 .$$

Così, il Van der Waals trova i seguenti valori, in atmosfere:

Acqua	10500 — 10700	*Etere*	1300 — 1430
Alcool	2100 — 2400	*Solf. di C.*	2890 — 2900

Secondo l'ipotesi di Van der Waals, la pressione superficiale P sarebbe invariabile, o quasi, con la temperatura; il

[1]) « Die continuität des gasf. und. fluss. Zustandes ». Zweite Aufl., Leipzig, 1899. I Theil, pag. 110 e 175.

che non è ammissibile. Ma bisogna ricordare che la sua equazione, rappresentante l'isoterma dei vapori, non è che approssimata, e che il termine che esprime la coesione deve variare con la temperatura. Clausius, nella sua formula più corretta, ha sostituito al termine $\frac{a}{v^2}$, un termine più complesso $\frac{a}{T(v+b)^2}$, che decresce appunto con la temperatura.

J. Stefan [1]) ha trovato una formola analoga alla (2), ma seguendo un cammino un po' diverso ed incorrendo in un errore. Egli ammette che, nella vaporizzazione, le molecole si partano dalla superficie del liquido, compiendo un lavoro L eguale a quello necessario per portarle dall' interno alla superficie.

Ma bisogna anche considerare, che per ogni molecola che si distacca dalla superficie, un' altra va a prendere il suo posto provenendo dall' interno. Si può, dunque, considerare inalterato lo strato superficiale, e ammettere che le molecole che si vaporizzano, provengono dall'interno, traversano tutto lo strato e, infine, si distaccano dalla superficie, compiendo in tutto un lavoro *doppio* di quello computato dallo Stefan. Il quale ottiene la formula $P = EC\rho$ (sebbene in altra forma) e trova, naturalmente, valori doppî di quelli ottenuti con la (2); e perciò in disaccordo con quelli trovati da Van der Waals.

II.

La Legge di J. Thomson.

È nota la relazione importante stabilita da J. Thomson, fra la pressione di saturazione di un vapore e la curvatura della superficie liquida.

Se p è la pressione di saturazione presso la superficie piana del liquido, la pressione del vapore stesso, presso una sfera o menisco sferico di raggio R, è data da

$$p + \frac{2\alpha}{\rho}\frac{\sigma}{\rho - \sigma}$$

[1]) *Wied. Annalen.* XXIX, 1886.

dove α è la tensione superficiale, e ρ e σ le densità del liquido e del vapore. Se il menisco è concavo, il secondo termine è negativo.

Il Thomson arrivò a questa formula considerando l'equilibrio del liquido e del vapore alle diverse altezze nei tubi capillari, ammettendo, come fatto d'esperienza, che questo equilibrio c'è, e che il liquido non distilla dalle parti più elevate a quelle più basse. Vediamo, ora, come si può arrivare alla medesima legge per via diretta, partendo dal principio della tensione superficiale e senza occuparci dei dislivelli nei tubi capillari.

Consideriamo un liquido e il suo vapore saturo, di pressione p. Se si vaporizza un volume $d\,v$ di liquido, che allo stato di vapore occupa il volume $d\,w$, si compirà il lavoro esterno $p\,(d\,w - d\,v)$.

Ma se la vaporizzazione avviene sopra una goccia sferica di raggio R, che vaporizzandosi diminuisce di volume e di superficie, la tensione superficiale fornirà un lavoro *positivo*

$$\alpha\, d\,S = 2\,\alpha\,\frac{d\,v}{R} \qquad \text{essendo } d\,S = \frac{2\,d\,v}{R}$$

e perciò il lavoro esterno necessario sarà *minore*, e sarà dato da

$$p(d\,w - d\,v) - 2\,\alpha\,\frac{d\,v}{R} = (d\,w - d\,v)\left(p - \frac{2\,\alpha}{R}\,\frac{d\,v}{d\,w - d\,v}\right);$$

ovvero, poichè $\dfrac{d\,v}{d\,w - d\,v} = \dfrac{\sigma}{\rho - \sigma}$

il lavoro verrà espresso da

$$(d\,w - d\,v)\left(p - \frac{2\,\alpha}{R}\cdot\frac{\sigma}{\rho - \sigma}\right)$$

che si riduce a $p\,(d\,w - d\,v)$ per $R = \infty$, cioè nel caso di una superficie piana.

Dunque, per la goccia sferica, è *come se* la pressione esterna da superare fosse minore di p, e, precisamente fosse

$$p - \frac{2\alpha}{R} \cdot \frac{\sigma}{\rho - \sigma}.$$

Quindi la goccia, o il menisco sferico convesso, non sarà in equilibrio col vapore circostante proveniente dalla superficie piana del liquido. Per l' equilibrio, ossia perchè il vapore sia saturo sopra il menisco, la pressione dovrà essere aumentata della quantità corrispondente, ed essere, dunque, non p ma

$$p + \frac{2\alpha}{R} \frac{\sigma}{\rho - \sigma}$$

come vuole la legge di J. Thomson.

R. Liceo di Urbino.

COME SI STABILISCONO I FENOMENI LUMINOSI ALL'INIZIO DELL'ARCO.

DI A. OCCHIALINI.

Del metodo di adescamento dell'arco fra elettrodi staccati e del dispositivo cinematografico per fotografare le varie fasi dell'arco ho avuto occasione di servirmi per osservare alcuni fenomeni che accompagnano l'arco nel periodo iniziale [1]). Dello stesso metodo mi servo ora per indagare in qual modo incominciano i fenomeni luminosi allorchè l'arco si adesca; e in questa nota mi propongo di esporre alcuni risultati di tali ricerche.

Sullo stesso argomento ebbe occasione di intrattenersi soltanto il Villard [2]) mentre osservava i fenomeni luminosi in un arco alternato; e delle conclusioni alle quali è giunto si è valso per dar valore a una sua interpretazione della scarica nei gas.

Appunto per l'aiuto che tali studi possono portare nell'interpretazione della scarica in generale, e particolarmente del meccanismo dell'arco elettrico, io li ho ripresi; tanto più che il mio metodo di adescamento, permettendo un brusco verificarsi di certe circostanze, è atto a rivelare i fenomeni preparatorii e iniziali forse meglio dell'arco alternato, in cui le condizioni variano con continuità.

Per chiarezza riporto qui la figura 1 che indica il dispositivo per ottenere le cinematografie dell'arco. ABC sono i tre carboni che servono per l'adescamento fra elettrodi staccati: fra A e B un arco continuo ha per scopo di elevare

[1]) *Nuovo Cimento*, *18*, 63, 1909; *19*, 311, 1910; *2*, 329, 1911.
[2]) *Journal der Physique*, 7, 350, 1908.

la temperatura del catodo B; se una conveniente differenza di potenziale è stabilita fra C positivo e B negativo un arco scocca fra questi due carboni. O è un obbiettivo che dà un' immagine dei carboni sopra il cilindro D il quale è gire-

Fig. 1.

vole intorno a un asse e si sposta parallelamente a questo quando il dente E è portato a ingranare con la vite che gli sta sopra. Il disco F munito di fori, girando rapidamente nello stesso tempo che il cilindro D gira lentamente, permette il passaggio della luce e l'impressione della carta sensibile distesa su D ad intervalli uguali di tempo.

2. **Propagazione della luminosità nell'arco.** — La figura 2 rappresenta le successive fasi di archi adescati con anodo caldo e con una differenza di potenziale di 70 volta. Nelle diverse immagini appare un ciuffo luminoso attaccato all'anodo ed esteso verso il catodo sempre più di mano in mano che si procede verso la parte inferiore della fotografia, ossia di mano in mano che si considerano immagini più lontane dall'istante di adescamento. Ciò vuol dire che nelle condizioni sudette di adescamento la luminosità si propaga dal positivo al negativo.

Il Villard ha osservato lo stesso risultato in un arco alternato; la luminosità in ogni mezzo periodo si propaga dal po-

sitivo al negativo. Osserviamo che nell'arco alternato gli elettrodi sono caldi necessariamente e l'adescamento avviene nelle circostanze in cui è stata ottenuta la figura 2, circostanze che si realizzano con l'accendere un arco subito dopo averne spento uno preesistente.

Il Villard da questo fatto ha creduto di poter dedurre che nell'arco la scarica si propaga dal positivo al negativo; su questo punto vedremo più tardi che cosa suggerisce l'osservazione.

La figura 3 riproduce le diverse fasi di un arco adescato con anodo caldo, quando la differenza di potenziale fra gli elettrodi è 220 volta. Sostanzialmente si verifica lo stesso fenomeno osservato quando la differenza di potenziale è di 70 volta; ancora i fenomeni luminosi si propagano dall'anodo al catodo, ma la velocità di propagazione è assai maggiore quando la differenza di potenziale è di 220 volta. Per avere una idea di questa velocità dalle fotografie, bisogna sapere che in quelle riprodotte nella figura 2 l'intervallo di tempo che intercede fra due immagini consecutive è di 1/44 di secondo, invece nella figura 3 le immagini si susseguono con un intervallo di 1/224 di secondo.

Fig. 2.

3. La propagazione della scarica nell'arco.

— A questo punto si può constatare che la scarica non si inizia all'anodo come si sarebbe tentati di credere dall'iniziarsi e dal procedere della luminosità. Infatti esaminiamo la figura 4 che rappresenta le diverse fasi dell'adescamento ottenuto con catodo caldo con 110 volta e con 6 Mkf. in derivazione sugli elettrodi.

Fig. 3.

L'arco propriamente detto incomincia alla 5ª immagine. Eppure la scarica è sicuramente incominciata fin dalla 3ª immagine e per convincersene basta osservare la debole

Fig. 4.

luminosità che parte dal catodo e che si vede chiaramente a cominciare dalla 3ª immagine; e la lunghezza crescente che di questa luminosità si osserva procedendo verso il basso sta ad indicare che essa si propaga dal negativo al positivo.

Dunque la scarica incomincia al catodo dal quale partono i centri negativi iniziatori del fenomeno. In condizioni ordinarie essa in principio non è accompagnata da fenomeni luminosi e procede oscura finchè non ha raggiunto l'anodo. Con una capacità in derivazione si rende visibile anche questa prima parte della scarica.

4. La registrazione fotografica continua. — La registrazione cinematografica non si presta all'esame di tutte le particolarità di un fenomeno.

Se con essa si vogliono immagini nette si deve poter considerare la pellicola sensibile come ferma nell'intervallo di tempo che dura la posa di un'immagine. Conseguentemente la velocità della pellicola è sempre assai limitata e quindi con tale metodo non si riesce a scindere le varie parti di un processo rapido.

Il fenomeno esplosivo iniziale dell'arco è appunto tanto rapido da non essere analizzato nell'impressione intermittente. Per esso ho voluto sperimentare la registrazione continua sulla carta sensibile con lo stesso dispositivo che ho descritto qui sopra, salvo la soppressione del disco di zinco munito di fori. In queste condizioni il cilindro può ruotare con qualunque velocità, giacchè su di esso si deve osservare, non più l'immagine dell'arco, ma la posizione della luminosità del gas nei diversi istanti.

Naturalmente con tal metodo l'arco deve essere parallelo all'asse del cilindro rotante. Per escludere la luce data dall'arco ausiliario e quella degli elettrodi che supera di gran lunga quella del gas, ho posto una larga fenditura opportunamente orientata davanti all'otturatore.

5. Propagazione della luminosità nella fase esplosiva. — Delle fotografie eseguite col motodo descritto sopra, quelle di archi adescati su anodo freddo e senza condensatore in derivazione si interpretano male per l'irregolarità con la quale il processo esplosivo si compie.

In molte prove sembra che la luminosità si propaghi dal positivo al negativo, in altre si direbbe che la striscia luminosa abbia origine contemporaneamente su tutta la sua lunghezza.

Quindi inclino a credere che nella fase esplosiva l'arco sia sede di un complesso fenomeno che varia in modo casuale.

Un risultato ben deciso si ottiene esaminando la fase esplosiva di un arco adescato con una capacità in derivazione sugli elettrodi. I fenomeni luminosi si rivelano con un tratto che nella fotografia appare sempre piegato in modo da indicare che esso si inizia all'elettrodo negativo e si propaga ra-

Fig. 5.

Fig. 6.

pidamente verso l'anodo. Le figure 5 e 6 mostrano questo comportamento giacchè, tenuto conto del movimento della pellicola sensibile, la luce vicina all'anodo appare emessa più tardi che quella presso al catodo.

In questo fatto vedo un argomento di più per ritenere che la scarica incomincia sempre dall'elettrodo negativo; però mentre essa si propaga verso l'anodo non è visibile se in derivazione sugli elettrodi non è posta una conveniente capacità.

6. **La luminosità nell'arco fischiante.** — La registrazione fotografica continua permette di studiare con facilità quel periodo in cui l'arco emette il sibilo suo caratteristico.

La Sig.ra Ayrton ha dimostrato già che durante questo sibilo l'arco è intermittente. Facendo la registrazione fotografica dell'arco in queste condizioni si vede che anche la luminosità è interrotta. Se non si prendono particolari precauzioni tali pulsazioni di luminosità si mostrano sulla carta circonfuse dalla luce che si mantiene fra gli elettrodi anche durante l'interruzione.

Per rendere nette le fotografie ho disposto sul rullo la carta a rovescio in modo che la parte sensibile non fosse rivolta verso l'esterno. La luce fissa più debole rimaneva allora assorbita dalla carta e solo la luce interrotta più intensa giungeva a impressionare l'emulsione.

La figura 7 riproduce l'aspetto di una fotografia ottenuta in queste condizioni: la luce ad ogni impulso si propaga dal positivo al negativo come nell'adescamento con anodo caldo e senza condensatore.

Fig. 7.

7. **Conclusioni.** — Da quanto precede credo di poter stabilire le seguenti conclusioni:

1° Con anodo caldo e senza capacità i fenomeni luminosi si propagano dal positivo al negativo. Essi però sono preceduti da una scarica che procede dal negativo al positivo.

2° Questa scarica diventa visibile se una capacità di qualche Mkf. è posta in derivazione sugli elettrodi.

LE CORRENTI TELLURICHE AL MONTE ROSA.

Nota del Prof. A. AMERIO.

1. — Le mie ricerche sulla radiazione solare mi trattengono nelle varie stazioni d'osservazione al M. Rosa per circa tre mesi all'anno.

Per utilizzare le giornate nebbiose, durante le quali è impossibile che io attenda alla mia principale occupazione, mi ero proposto lo studio delle correnti telluriche, che in tale località presenta speciale interesse, date le enormi differenze di livello, utilizzando a tale scopo la linea telefonica di recente impiantata ad unire i vari Istituti scientifici del M. Rosa [1]).

Questi Istituti sono:

1° L'Osservatorio Meteorologico di Alagna Sesia (altezza m. 1200).

2° L'Istituto Mosso al col d'Olen (altezza m. 2900).

3° La capanna Regina Margherita, situata sulla punta Gnifetti (altezza 4559 m.) che comprende oltre a una sezione del C. A. I. una sezione di Fisiologia e un Osservatorio meteorologico.

Lo sviluppo della linea è di circa 22 Km. e il dislivello fra le stazioni estreme è di m. 3360.

Era quindi da attendersi che alle ordinarie correnti telluriche si sovrapponessero gli effetti del campo elettrico terrestre.

Scopo mio era precisamente di ricercare:

1° Se quest'effetto si rendeva palese;

[1]) Camillo Alessandri. « Il telefono al M. Rosa ».

2° Se si verificava *l' effetto di altitudine* imaginato da B. Brünhes [1]) per spiegare le notevoli differenze di potenzialo riscontrate tra il Puy de Dôme e Clermont con altezze e con dislivelli molto minori.

3° Se, come il Brühnes trova in quel caso, *l' elettricità negativa abbia tendenza a cadere dall' alto al basso.*

Ottenuta l'autorizzazione dal Ministero delle Poste e Telegrafi potei cominciare le misure ai primi del mese di agosto del 1910 e farne quattro serie.

2. — Per comprendere facilmente l' andamento della ricerca bisogna avere un concetto della linea.

Questa è *a filo unico* e presenta le cinque stazioni seguenti:

1° Alagna Sesia: Osservatorio, con prolungamento all' ufficio postale (alt. m. 1200).

2° Alpe Sevy (alt. 2000 m. circa).

3° Istituto Mosso del col d' Olen (m. 2900).

4° Capanna Gnifetti (m. 3647).

5° Capanna Regina Margherita (m. 4559).

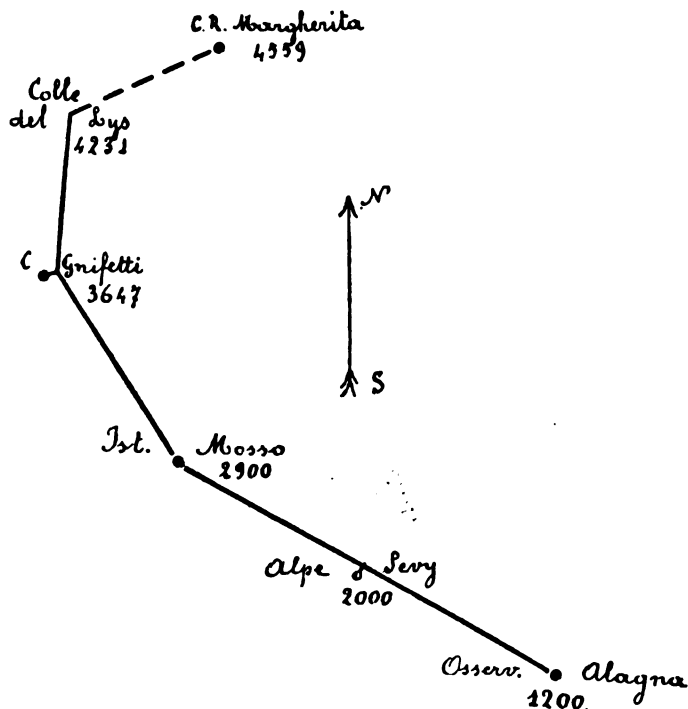
Esse sono disposte come si vede nell' unito schizzo e all' epoca delle misure erano tutte in serie meno la seconda e la terza che erano in derivazione e si inserivano ad ore convenute.

La linea parte da Alagna e, su pali di legno con isolatori di porcellana, giunge all'Alpe Sevy indi all'Istituto Mosso con un percorso di Km. 10,5 e con direzione complessiva ovest-nord-ovest.

Prosegue poi con lo stesso sistema di isolamento, attraverso terreni rocciosi e a ghiacciai, presentando una campata che da sola è lunga un chilometro, e giunge alla capanna Gnifetti con un percorso di oltre Km. 4, in direzione media nord-nord-ovest.

Dalla capanna Gnifetti sale, con lo stesso isolamento, coi pali piantati sempre nel ghiacciaio e rimane sempre fuori

[1]) B. Brünhes. *C. R.*, vol 147, pag. 1445; 1908. B. Brünhes e P. David. *C. R.*, vol 149, pag. 74. 1909.

della neve, fino al colle del Lys con direzione nord, superando un dislivello di circa m. 600 in circa tre chilometri di percorso.

Dal colle del Lys prosegue *sempre sepolta nella neve* fin sotto la capanna Regina Margherita, superando il dislivello di 330 m. circa con tre chilometri di linea, e con direzione media est-nord-est.

Fino alla capanna Gnifetti il filo è di ferro col diametro di mm. 3,9 e con 12 ohm di resistenza per chilometro; nel tratto superiore è in filo più sottile.

3. — Le serie di misure eseguite furono le seguenti:

1° All' Istituto Mosso fino al 16 agosto.

2° All' Osservatorio Meteorologico della capanna R. Margherita fino al 10 settembre.

3° Alla capanna Gnifetti nei giorni 12 e 13 settembre.

4° All' Istituto Mosso dal 13 al 16 novembre.

Il metodo seguito fu in fondo quello di compensazione, applicando cioè alla linea una differenza di potenziale ben determinata in modo da compensare la corrente della linea che veniva indicata da un galvanometro [1]).

La disposizione, troppo ovvia perchè la descriva, permetteva di fare alternatamente le letture delle deviazioni galvanometriche prodotte dalla corrente della linea e di procedere alla compensazione.

Nelle stazioni intermedie poi si facevano alternando le letture per le correnti delle due parti della linea, della linea totale e delle singole compensazioni.

Per lo più, trattandosi di correnti variabili ed essendo le deviazioni del galvanometro proporzionali ad esse, era più comodo non regolare la corrente di compensazione ma leggere le deviazioni che essa produceva e calcolare così le f. e. m. corrispondenti alle correnti della linea.

Per la stessa ragione bisognava fare rapidamente molte misure.

4. — Vediamo ora i singoli risultati.

Al col d' Olen misuravo le differenze di potenziale e tra la Margherita e il col d' Olen, e' tra questo e Alagna, E tra la Margherita e Alagna. Come controllo doveva riuscire:

$$E = e + e' .$$

Così, per citare un esempio, dall' insieme delle misure fatte il 12 agosto, in cui le correnti non furono molto irregolari risulta:

[1]) Questo mi fu prestato dal Dott. Camillo Alessandri che vivamente ringrazio.

Differenza di potenziale in millivolt tra

C. R. Margherita e Olen	Olen-Alagna	C. R. Margherita-Alagna	id. calcolate
+ m. v. 190	— 395	— 187	— 205

In media si ebbero poi rispettivamente i seguenti valori:

+ 176	— 436	— 256	— 260

I valori massimi e minimi furono rispettivamente

+ 192	— 490	— 338
+ 148	— 370	— 187

Ma durante tutta questa serie mi si presentò, per una sola volta, il fatto che la stazione di vetta fu leggermente negativa rispetto all' Olen (— 12 m. v.); le determinazioni relative furono assai irregolari, e talvolta il senso della corrente si invertiva.

Sarebbe certo interessante indagare se questa inversione corrisponda a burrasche magnetiche o ad altre cause ma per ciò occorrerà stabilire un sistema di regolari registrazioni.

Trasferitomi il giorno 18 agosto alla c. R. Margherita avrei voluto, appena sistemati gli apparecchi inerenti alla mia ricerca sulla radiazione solare, ricominciare le esperienze sulla linea.

Ma questa era stata guastata da un uragano e dovetti attendere fino al 26 per proseguire poi tutte le sere che il tempo permetteva.

Per le misure in questa stazione procedevo così: Ad ora convenuta il Dott. Aggazzotti, Direttore dell' Istituto del Col d' Olen, metteva la linea a terra all' Olen e così io misuravo le correnti tra la Margherita e detta stazione; dopo un quarto d' ora circa, tolta la terra ristabiliva la comunicazione con Alagna ed io misuravo le correnti tra la Margherita e Alagna.

I risultati avrebbero dovuto essere conformi a quelli avuti al col d' Olen, se la linea fosse stata perfettamente iso-

lata. Ma il fatto che per più chilometri sotto alla capanna R. Margherita il filo corre sotto la neve introduce una derivazione tale che i risultati sono solo *qualitativamente* conformi.

Così si ottenne tra la Margherita e l' Olen la differenza di + 3 m. v., tra la Margherita e Alagna — 6,1.

Solo due volte la stazione R. Margherita risultò negativa rispetto all' Olen di circa 1. m. v.

In qualche misura che feci col filo isolato all' Olen, a terra alla Margherita il galvanometro indicò una corrente di parecchi microampère *diretta dall' alto al basso.*

Questa è dovuta alla differenza di potenziale che esiste fra la Margherita e la zona ove è stabilita la derivazione sopradetta.

Veniamo ora alla terza stazione: capanna Gnifetti. Avevo deliberato di pernottare in detta capanna all'epoca della discesa dalla punta Gnifetti, che avvenne il 12 settembre, per fare alcune misure, e, costretto dal cattivo tempo a trattenermi ne approfittai per eseguirne anche la mattima del 13.

Essendo detta stazione derivata sulla linea, per far le misure era necessario far isolare la stazione superiore o quelle inferiori. Ma per causa del tempo cattivo non fu possibile, essendo pericoloso, far isolare la stazione superiore, così che dovetti limitarmi a far isolare le altre e a misurare quindi le sole correnti tra la Margherita e la Gnifetti.

La stazione superiore risultò *sempre* positiva rispetto alla Gnifetti e precisamente, in media di 95 m. v.

Finalmente ridisceso all' Istituto Mosso ripresi subito le misure nel modo seguente:

All' ora convenuta facevo mettere in comunicazione la stazione della capanna Gnifetti e facevo le misure delle correnti tra essa e l' Olen, tra essa e Alagna, indi fattala escludere procedevo come nella prima serie.

Le esperienze furono fatte la sera stessa del 13 in cui discesi e poi fino al 16, giorno in cui la linea venne parzialmente smontata.

I risultati furono pel giorno 13:

Gnifetti-Olen	Olen-Alagna	Gnifetti-Alagna
+ 338	— 365	— 31
Margherita-Olen		Margherita-Alagna
+ 409	— 365	+ 15

Ma nei giorni successivi — *cadendo continuamente la neve* — le cose cambiarono, pare gradatamente, e si ebbe il giorno 14:

Gnifetti-Olen	Olen-Alagna	Gnifetti-Alagna
— 70	+ 125	+ 25
Margherita-Olen		Margherita-Alagna
— 106	+ 125	+ 21

e infine il giorno 16

Gnifetti-Olen	Olen-Alagna	Gnifetti-Alagna
— 450	— 60	— 570

che sono risultati completamente diversi dai più comuni.

Si noti però che dal 12 al 16, la neve venne senza interruzione per un' altezza di molto superiore al metro così da seppellire la linea in molti punti, ciò che può aver avuto un' azione per ora poco precisabile.

RISULTATI. — Data la descritta derivazione del colle del Lys i valori attribuiti alla stazione c. Regina Margherita spettano effettivamente ad un punto più basso, e cioè al colle del Lys (4231 m.).

Nella maggior parte delle misure eseguite risultò che la stazione più elevata è positiva rispetto alle inferiori andando dalla vetta al col d' Olen, ma sotto questo *le parti si invertono.*

Quindi al M. Rosa per le piccole altezze le correnti si comportano come al Puy de Dôme, cioè l'elettricità negativa ha tendenza a cadere dall'alto al basso, come dice il Brünhes,

ma *per le grandi altezze* avviene precisamente l' opposto, *forse per l' azione del campo terrestre.*

Le differenze di potenziale chilometriche si mantengono abbastanza basse, si da non dover invocare alcun effetto di altitudine, se non forse come conseguenza dell'azione sopradetta del campo terrestre alle grandi altezze.

Sarebbe certo interessante indagare più d' appresso le cause di questa speciale distribuzione e delle grandi variazioni che essa subisce in relazione colle perturbazioni magnetiche e meteorologiche.

Per ciò occorrerà registrare in modo continuo le correnti, ciò che mi propongo di fare in una prossima stagione estiva. Per questa ragione l' attuale ricerca non deve intendersi che come preliminare.

Ringrazio caldamente il Ministero delle Poste e Telegrafi per avermi concessa la linea, i Dott. Aggazzotti e Alessandri per l' aiuto datomi in vario modo nel corso della ricerca.

Col d' Olen. Istituto Mosso,
agosto 1911.

SULL'IMPIEGO DELLE FUNZIONI ELLISSOIDALI ARMONICHE NEI PROBLEMI RELATIVI AD UN INVOLUCRO ELLISSOIDICO.

NOTA DI E. DANIELE.

In una Memoria ben nota [1] il Morera risolve, coll'impiego di quelle funzioni ch'Egli chiama *ellissoidali armoniche di 2ª specie,* il seguente problema: costruire una funzione armonica all'esterno ed all'interno di un ellissoide, che assuma, sulla superficie di questo, i valori di un polinomio comunque dato.

La soluzione è fondata su un teorema, secondo il quale un polinomio qualsiasi è sempre esprimibile nella forma

$$(1)\qquad \sum_{\lambda\mu\nu} \alpha_{\lambda\mu\nu} \frac{\partial^r U_r}{\partial x^\lambda\, \partial y^\mu\, \partial z^\nu}$$

$$(\lambda + \mu + \nu = r\,; \qquad r = 0\,, 1\,, 2\,, \ldots\,, m)\,,$$

essendo

$$(1')\quad \begin{cases} U_r = \displaystyle\int_0^\infty (N - 1)^r \frac{ds}{R(s)} \\ N = \dfrac{x^2}{a^2 + s} + \dfrac{y^2}{b^2 + s} + \dfrac{z^2}{c^2 + s}\,, \quad R(s) = \sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}\,; \end{cases}$$

$a\ b\ c$ indicano i semiassi dell'ellissoide, ed m è il grado del dato polinomio.

Non vi è difficoltà ad estendere il risultato di Morera al caso in cui si voglia considerare lo spazio, esterno ed interno,

[1] « Sull'attrazione degli ellissoidi e sulle funzioni armoniche ellissoidali di 2ª specie ». (*Mem. della R. Acc. d. Scienze di Torino*, 1904-05). Cfr. in particolare i §§ 7-11.

ad un involucro limitato da due ellissoidi omofocali, e la funzione da costruirsi debba coincidere, sulle superficie dei due ellissoidi, rispettivamente con due polinomii assegnati. È quanto espongo in questa breve Nota nei n.i 1-4: alla funzione cercata si può dare la forma (4), che comprende come caso particolare la nota soluzione di Morera (n. 5).

La funzione costruita dal Morera si può interpretare come la funzione potenziale di una massa newtoniana distribuita sulla superficie dell'ellissoide con una certa densità. Nel caso dell'involucro la funzione che si trova è ancora la funzione potenziale d'una massa distribuita superficialmente sull'uno e sull'altro ellissoide (n. 6).

Termino (n. 7) con una piccola applicazione al problema dell'induzione magnetica per l'involucro ellissoidico, facendo vedere come le formole da me trovate in una Nota precedente [1]) siano suscettibili di una semplificazione.

1. Chiameremo E ed E' le superficie dei due ellissoidi, esterno ed interno, che limitano l'involucro, e diremo $a\,b\,c$, $a'\,b'\,c'$ i loro semiassi, legati dalle relazioni

$$a'^2 - a^2 = b'^2 - b^2 = c'^2 - c^2 = \delta \,, \quad (\delta < 0)\,.$$

Accanto ad U_r definita dalle (1') introdurremo anche la funzione

$$V_r = \int_\sigma^\infty (N-1)^r \frac{ds}{R(s)} \,,$$

ove σ indica la radice maggiore dell'equazione in s: $N = 1$; ed è positiva per i punti $(x\,y\,z)$ esterni all'ellissoide E, negativa per i punti interni.

Siano m e m' i gradi dei polinomii coi quali la funzione da costruirsi deve coincidere risp. su E ed E', e *cominciamo a supporre* $m > m'$.

[1]) « Sull'induzione magnetica di un involucro ellissoidico »; *N. Cimento*, (6), vol. II (1911).

Chiamando S_e lo spazio esterno ad E, — S_i lo spazio compreso fra E ed E', — e $S_{e'}$ lo spazio interno ad E', porremo risp. in questi tre spazi:

$$(2)\begin{cases} W_e = \sum\limits_{\lambda\mu\nu} \alpha_{\lambda\mu\nu} \dfrac{\partial^r V_r}{\partial x^\lambda\, \partial y^\mu\, \partial z^\nu} \\ W_i = \sum\limits_{\lambda\mu\nu} \beta'_{\lambda\mu\nu} \dfrac{\partial^r V_r}{\partial x^\lambda\, \partial y^\mu\, \partial z^\nu} + \sum\limits_{\lambda\mu\nu} \rho_{\lambda\mu\nu} \dfrac{\partial^r U_r}{\partial x^\lambda\, \partial y^\mu\, \partial z^\nu} + (N_0 - 1)\, \Pi_{m-2} \\ W_{e'} = \sum\limits_{\lambda\mu\nu} \alpha'_{\lambda\mu\nu} \dfrac{\partial^r U_r}{\partial x^\lambda\, \partial y^\mu\, \partial z^\nu} + (N'_0 - 1)\, \Pi'_{m'-2} \end{cases}$$

$$(\lambda + \mu + \nu = r).$$

In queste formole si è posto:

$$N_0 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, \quad N'_0 = \frac{x^2}{a'^2} + \dots;$$

inoltre Π_{m-2} e $\Pi'_{m'-2}$ sono due polinomii in $x\,y\,z$ dei gradi indicati dagli indici. Quanto ad r, percorrerà tutti i valori interi da 0 ad m nelle somme che figurano in W_e e W_i, mentre andrà da 0 a m' nella somma che figura in $W_{e'}$.

Notiamo subito che il computo dei coefficienti $\alpha\, \beta\, \alpha'\, \beta'$ e di quelli che compongono i polinomii Π e Π' ci dà come loro numero complessivo:

$$3\,H + H' + K + K',$$

essendo

$$H = 1 + 3 + 6 + \dots + \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

$$K = 1 + 3 + 6 + \dots + \frac{(m-1)\,m}{2},$$

mentre H' e K' si ottengono da H e K sostituendo m' ad m.

2. Lasciando per ora indeterminati tutti questi coefficienti, considereremo le (2) come le formole di definizione di un'unica funzione W, alla quale imporremo le seguenti con-

dizioni: *a)* sia continua in tutto lo spazio, anche attraverso le superficie E ed E', — *b)* sia armonica nelle tre regioni S_e S_i $S_{e'}$ e nulla all'infinito, — *c)* su E e su E' coincida risp. coi due polinomii supposti dati, dei gradi m ed m'.

La condizione *a)* è soddisfatta appena si faccia coincidere W_e con W_i sulla superficie E, e W_i con $W_{e'}$ su E': poichè su E e sugli ellissoidi omofocali le derivate r^{me} di V_r diventano polinomii di grado r, la prima di quelle coincidenze equivale a identificare due certi polinomii di grado m; mentre la seconda coincidenza conduce all'identità fra un polinomio di grado m ed uno di grado $m' < m$. Ad ogni modo la condizione *a)* dà luogo a 2 H relazioni lineari omogenee fra i coefficienti incogniti nelle (2).

Quanto alla condizione *b)* le proprietà generali delle funzioni V_r e delle loro derivate assicurano senz'altro l'armonicità di W in S_e ed il suo annullarsi all'infinito. Rimane soltanto da considerare W_e e la parte polinomiale di W_i, e così si ottengono altre K + K' relazioni lineari ed omogenee fra le incognite.

La condizione *c)* infine, che conduce a identificare, su E ed E' risp., due polinomii dei gradi m ed m' con due polinomii analoghi a coefficienti noti, dà luogo ad un nuovo gruppo di equazioni lineari (non più omogenee) in numero di H + H'.

In totale dunque le condizioni imposte alla funzione W sono

$$3\,H + H' + K + K',$$

cioè tante quante sono le incognite.

Si vede subito che il determinante dei coefficienti in questo sistema di equazioni non può essere nullo. Se difatti lo fosse, vorrebbe dire che, sostituendo lo zero ai termini noti di quelle equazioni, sarebbe possibile soddisfare al nuovo sistema con valori non tutti nulli delle incognite; ma allora si sarebbero costruite tre funzioni W_e W_i $W_{e'}$, armoniche risp. in S_e S_i $S_{e'}$, e non identicamente nulle, che s'annullano sul contorno (la W_e s'annulla su E e all'infinito); il che è assurdo. Le equazioni che nascono dalle condizioni *a)* *b)* *c)* de-

terminano dunque completamente i coefficienti di W, e quindi questa funzione è rappresentabile colle (2).

3. Il ragionamento ora fatto si applica ancora, dopo qualche leggera modificazione alle (2), al caso in cui si abbia $m < m'$. Queste modificazioni si riferiscono esclusivamente alla parte W_i, dove bisognerà supporre che le somme rispetto ad r sian fatte da 0 a m', ed inoltre il polinomio Π_{m-2} andrà sostituito con un altro $\Pi_{m'-2}$. Dopo ciò si troverà che i coefficienti incogniti sono in numero di

$$H + 3H' + 2K',$$

ed altrettante sono le equazioni che li legano.

Quando poi fosse $m = m'$, tutte le somme nelle (2) andrebbero fatte da 0 ad m, mentre i polinomii Π in W_i e $W_{e'}$ sarebbero entrambi di grado $m - 2$.

4. In principio di questa Nota fu già ricordato il teorema, secondo il quale ogni polinomio in $x\,y\,z$ è esprimibile nella forma (1). In base a quel teorema si possono determinare dei coefficienti γ e γ' tali da aversi identicamente:

$$(3)\quad \begin{cases} (N_0 - 1)\,\Pi_{m-2} = \sum\limits_{\lambda\mu\nu} \gamma_{\lambda\mu\nu} \dfrac{\partial^r U_r}{\partial x^\lambda\, \partial y^\mu\, \partial z^\nu}\,, & (r = 0, 1, \ldots, m) \\[2ex] (N'_0 - 1)\,\Pi'_{m'-2} = \sum\limits_{\lambda\mu\nu} \gamma'_{\lambda\mu\nu} \dfrac{\partial^r U_r}{\partial x^\lambda\, \partial y^\mu\, \partial z^\nu}\,, & (r = 0, 1, \ldots, m'). \end{cases}$$

Ed allora, sostituendo nelle (2), e leggendo β in luogo di $\beta + \gamma$, e α' in luogo di $\alpha' + \gamma'$, si vede che *la funzione* W *è rappresentabile colle seguenti formole:*

$$(4)\quad \begin{cases} W_e = \sum \alpha_{\lambda\mu\nu} \dfrac{\partial^r V_r}{\partial x^\lambda\, \partial y^\mu\, \partial z^\nu} \\[2ex] W_i = \sum \beta'_{\lambda\mu\nu} \dfrac{\partial^r V_r}{\partial x^\lambda\, \partial y^\mu\, \partial z^\nu} + \sum \beta_{\lambda\mu\nu} \dfrac{\partial^r U_r}{\partial x^\lambda\, \partial y^\mu\, \partial z^\nu} \\[2ex] W_{e'} = \sum \alpha'_{\lambda\mu\nu} \dfrac{\partial^r U_r}{\partial x^\lambda\, \partial y^\mu\, \partial z^\nu}\,, \end{cases}$$

le quali sono più semplici delle (2) in quanto non contengono i termini coi polinomii Π e Π'. Naturalmente i coefficienti β e α' hanno valori diversi nelle (2) e nelle (4).

5. Il caso particolare dell'ellissoide pieno, limitato dalla superficie E, si fa rientrare in quello dell'involucro annullando nelle (4) tutti i coefficienti α' e β'. Il prolungamento poi della funzione

$$W_i = \Sigma \beta_{\lambda\mu\nu} \frac{\partial^r U_r}{\partial x^\lambda \, \partial y^\mu \, \partial z^\nu}$$

nello spazio S_e si può fare, invece che colla

$$\Sigma \alpha_{\lambda\mu\nu} \frac{\partial^r V_r}{\partial x^\lambda \, \partial y^\mu \, \partial z^\nu} , \tag{5}$$

coll'altra

$$\Sigma \beta_{\lambda\mu\nu} \frac{\partial^r V_r}{\partial x^\lambda \, \partial y^\mu \, \partial z^\nu} , \tag{5'}$$

i cui valori coincidono con quelli della precedente, trattandosi di due funzioni entrambe armoniche in S_e, nulle all'infinito e coincidenti sulla superficie E [1]).

[1]) Si comprende come le due funzioni (5) e (5') possano riuscire identiche, malgrado le α sian diverse dalle β, quando si pensi alle relazioni che hanno luogo fra le derivate r^{me} di V_r, come conseguenza della $\Delta^2 V_r = 0$, ed inoltre alle svariate identità che legano gli integrali ellittici del tipo

$$\int_0^\infty \frac{1}{(a^2+s)^\lambda \, (b^2+s)^\mu \, (c^2+s)^\nu} \frac{ds}{R} , \tag{6}$$

mediante i quali si compongono tanto le α quanto le β. Nei casi particolari riesce facile riscontrare direttamente la coincidenza di (5) e (5'). Sarebbe però interessante stabilire le formole generali che permettono il trapasso dall'una espressione all'altra: in altre parole, scrivere esplicitamente sia le relazioni che legano le α alle β, sia le relazioni, di cui si deve far uso, che intercedono fra gli integrali (6).

6. Se diciamo n ed n' le normali, interna ed esterna, al contorno dell' involucro, e si calcola h sul contorno mediante la formola

$$\frac{\partial W}{\partial n} + \frac{\partial W}{\partial n'} = -4\pi h\,,$$

si trova per h un polinomio in $x\,y\,z$ moltiplicato per la distanza (p o p') del centro comune dei due ellissoidi E ed E' dal pian tangente a quella delle due superficie in cui si calcola h. Si ha dunque, come estensione di un noto teorema di Morera (Memoria citata, § 8): *La funzione armonica all' interno ed all' esterno dell' involucro, che s' annulla all' infinito e coincide, sui due ellissoidi omofocali* E *ed* E' *che limitano l' involucro, risp. con due polinomii arbitrariamente dati, è la funzione potenziale di una massa newtoniana distesa su* E *e su* E' *con densità uguale al prodotto di un polinomio per la distanza del centro dell' involucro dal piano tangente al contorno.*

7. Il risultato ottenuto al n. 4, che consiste nell' assegnare la forma (4) alla funzione armonica da noi chiamata W, si applica immediatamente al problema dell' induzione magnetica dell' involucro, supposto che la funzione potenziale del campo inducente prenda in S_i i valori di un polinomio di un certo grado m.

La soluzione del problema è contenuta nelle formole (6) della mia Nota citata in principio, che definiscono la funzione potenziale Q del magnetismo indotto. Ora quelle formole non sono altro che le (2) della presente Nota, nelle quali si faccia $m = m'$, ed inoltre si trasporti il termine $(N'_0 - 1)\,\Pi'_{m-2}$ da $W_{e'}$ in W_i, e si legga (in $W_{e'}$) U'_r in luogo di U_r. Evidentemente il trasporto di quel termine, come pure la sostituzione di U'_r ad U_r, non hanno nessuna influenza sostanziale sui ragionamenti e sui calcoli che conducono alle formole risolutive. Ed allora, osservando che la funzione Q di quella Nota ha esattamente tutti i caratteri della nostra funzione W, ora definita dalle (2), concludiamo: *La funzione*

potenziale del magnetismo indotto nell' involucro ellissoidico, nell' ipotesi che la funzione potenziale del campo inducente si riduca nell' involucro ad un polinomio di grado m, si può mettere sotto la forma seguente:

$$Q_e = \Sigma\, \alpha_{\lambda\mu\nu} \frac{\partial^r V_r}{\partial x^\lambda\, \partial y^\mu\, \partial z^\nu}$$

$$Q_i = \Sigma\, \beta'_{\lambda\mu\nu} \frac{\partial^r V_r}{\partial x^\lambda\, \partial y^\mu\, \partial z^\nu} + \Sigma\, \beta_{\lambda\mu\nu} \frac{\partial^r U_r}{\partial x^\lambda\, \partial y^\mu\, \partial z^\nu} + \beta\, U_0$$

$$Q_{e'} = \Sigma\, \alpha'_{\lambda\mu\nu} \frac{\partial^r U_r}{\partial x^\lambda\, \partial y^\mu\, \partial z^\nu} + \alpha' U_0 ,$$

ove tutte le somme s'intendono fatte, rispetto ad *r*, da 1 ad *m*.

SUL RAPPORTO ESISTENTE TRA L'ENERGIA SPESA IN UN TUBO SORGENTE DI RAGGI X E LA JONIZZAZIONE PRODOTTA DAI RAGGI EMESSI.

Studio sperimentale del Prof. P. CARDANI.

In una ricerca pubblicata nel 1904 ho cercato di determinare la relazione esistente tra la dispersione elettrica prodotta dai raggi del Röntgen e l'energia disponibile nel tubo, dal quale i raggi stessi venivano prodotti, ed ho dimostrato come dalle esperienze fatte si potesse ricavare la seguente legge, che, cioè, *la quantità di energia, che, trasportata dai raggi x, viene spesa nella jonizzazione dell' aria attraversata dai raggi medesimi, cresce proporzionalmente alla quantità di energia di cui si può disporre agli elettrodi del tubo.*

I risultati ottenuti mi invogliarono a proseguire nello studio intrapreso nell' intendimento, non solo di conseguire maggiore precisione nella misura degli elementi che concorrono alla produzione dei fenomeni tanto complessi che si manifestano per il passaggio delle scariche nei gas molto rarefatti, ma anche per ampliarlo, cercando di stabilire quale influenza eserciti la resistenza inserita nel circuito sull' energia disponibile agli elettrodi del tubo e sulla jonizzazione prodotta dai raggi Röntgen e come il fenomeno si modifichi con la pressione esistente nel tubo.

Descrizione degli apparecchi e metodi di misura.

Le scariche adoperate in queste ricerche sono state quelle così dette impulsive. Ciascuna delle due batterie era formata di 4 condensatori cilindrici accuratamente isolati e disposti in cascata: con opportuni collegamenti si potevano con molta facilità

accoppiare diversamente tra loro, così che la capacità poteva approssimativamente modificarsi tra i valori 1, corrispondente alle 8 bottiglie disposte in cascata, e 16 corrispondente alle 8 bottiglie formanti due batterie disposte in cascata ed ognuna costituita di 4 bottiglie disposte in parallelo: del resto, come sarà detto più avanti, le quantità di elettricità impegnate nelle diverse scariche, venivano direttamente misurate.

Tra le armature estreme delle batterie era inserito il circuito di scarica contenente il tubo col quale si sperimentava: e in questo circuito si trovavano una serie di resistenze, tutte disposte dalla stessa parte del tubo e precisamente tra il catodo e l'armatura della rispettiva batteria; il punto dove si staccava da questa armatura il circuito di scarica era posto in comunicazione con la terra.

Queste resistenze erano in parte metalliche ed in parte elettrolitiche, costituite da una soluzione di glicerina di opportuna concentrazione. Le resistenze metalliche erano costituite da 24 lastre rettangolari di ebanite, sopra ognuna delle quali era avvolto un filo sottilissimo di manganina della resistenza di 10000 ohm. Queste resistenze erano fissate sopra bastoni di vetro verde con fili di seta paraffinata, in modo di avere un ottimo isolamento: si aveva così disponibile per esser inserita nel circuito una resistenza metallica totale di 240000 ohm, divisibile in parti di 10000 ohm ciascuna.

Le resistenze elettrolitiche erano costituite da tre tubi di vetro ricurvi, molto sottili, in modo che ogni tubo presentasse una resistenza compresa tra 400000 e 500000 ohm. Come diremo in seguito, si determinava il valore di queste resistenze, ogni qualvolta venivano adoperate. Queste resistenze elettrolitiche erano anch'esse accuratamente isolate.

La distribuzione delle resistenze, cominciando dal punto a terra e andando verso il catodo era la seguente: prima si trovavano le resistenze metalliche e di seguito quelle elettrolitiche: esse potevano facilmente escludersi od inserirsi con opportuni archetti metallici.

Le due armature delle batterie, tra le quali era inserito il circuito di scarica, erano anche tra loro direttamente col-

legate per mezzo di una resistenza grandissima rispetto alle altre che si trovavano nel circuito del tubo, così che la carica dei condensatori potesse avvenire sempre regolarmente, anche quando il tubo faceva parte del circuito di scarica.

Tra le due armature delle batterie comunicanti con la macchina era invece inserito lo spinterometro principale, con sfere di 43 mm. di diametro ed aventi le parti prospicienti ricoperte di platino.

La questione principale era quella di determinare con esattezza l' energia effettivamente spesa nel tubo.

Se la introduzione del tubo nel circuito di scarica non modificasse profondamente le condizioni della scarica medesima, in modo che l' energia totale disponibile rimanesse sensibilmente costante, la determinazione dell' energia spesa nel tubo si otterebbe facilmente, determinando l' energia che si manifesta nel resto del circuito da prima quando il tubo è escluso e in seguito quando il tubo vi è inserito: la differenza dei due valori darebbe manifestamente l' energia spesa nel tubo.

La questione però si complica assai per il fatto che il tubo funziona come da valvola e la quantità di elettricità, che si scarica quando il tubo è escluso, è molto maggiore di quella che si scarica quando invece il tubo è inserito nel circuito.

Sia V il valore della differenza di potenziale raggiunto dalle armature del condensatore nel momento in cui avviene la scintilla, V_1 il valore della differenza di potenziale residuo tra le armature medesime subito dopo avvenuta la scarica: la formola

$$E = \frac{1}{2} c (V^2 - V_1^2)$$

darebbe l' energia E disponibile, essendo c la capacità del condensatore.

Ma qui sarà bene osservare che la formola è vera soltanto se la capacità del condensatore è indipendente dal valore iniziale e finale di V e quindi se la quantità di elettricità che si scarica è rigorosamente proporzionale alla caduta

del potenziale. Ora, dalle esperienze che riferirò in seguito, questo non risulta confermato: la quantità di elettricità che prende parte al fenomeno segue una legge molto complessa secondo i valori di V e di V_1: ho quindi fatto uso della formola

$$E = \frac{1}{2}(V + V_1)\,Q$$

che nelle attuali esperienze meglio conveniva della formola precedente.

Se quando è inserito il tubo, il valore della differenza del potenziale residuo è V_2 e la quantità di elettricità che si scarica è q, l'energia disponibile E_1 sarà data da

$$E_1 = \frac{1}{2}(V + V_2)\,q$$

e quindi

$$E_1 = \frac{V + V_2}{V + V_1}\,\frac{q}{Q}\,E\,.$$

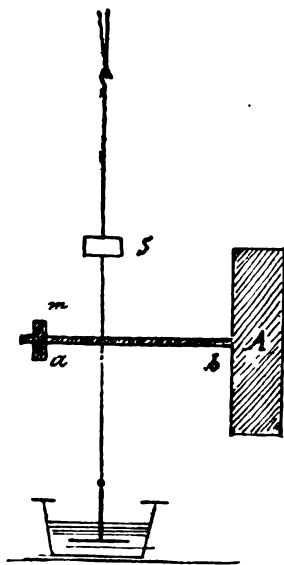
Conoscendo dunque l'energia totale disponibile E quando è escluso il tubo, si potrà ricavare quella disponibile quando invece il tubo è incluso misurando V, V_1, V_2, q e Q; conoscendo poi in quest'ultimo caso l'energia ε assorbita nelle resistenze, è chiaro che l'energia W spesa nel tubo sarà data da

$$W = E_1 - \varepsilon\,.$$

Metodo di misura dell'energia E.

Per la misura dell'energia E si è fatto uso di uno speciale elettrometro costituito da due piattelli verticali e paralleli, fra i quali era mobile una lastrina sottilissima di alluminio.

Questa lastrina A era portata da una asticina orizzontale *a b* fissata ad un filo verticale di platino, come si vede nella figura.

Un piccolo contrappeso M faceva mantenere tutto il filo di platino, sostenuto da una sospensione bifilare, in posizione verticale così che il filo di platino faceva parte dell' asse di rotazione del sistema. Il filo di platino pescava inferiormente in un bicchierino contenente acqua e glicerina; al disopra era stato versato per due o tre mm. dell' olio di vasellina per impedire l' evaporazione ed eliminare gli inconvenienti della capillarità: il liquido del bicchierino comunicava col suolo.

Uno specchietto S serviva per le letture mediante cannocchiale e scala.

Tutto l' apparecchio era custodito in una grande cassa metallica; le letture si facevano attraverso una finestra praticata in una delle pareti laterali, chiusa da un vetro ben piano.

Uno dei piattelli verticali, rispetto ai quali la lastrina A si trovava simmetricamente disposta, era accuratamente isolato e comunicava con quel punto del circuito dal quale doveva partire la carica che serviva per la misura dell'energia: il piattello opposto era comunicante col suolo.

Ora è noto che, se si indica con α la deviazione massima che si ottiene per l'impulso che la lastrina riceve in un tempuscolo τ, durante il quale il piattello isolato si trova sottoposto ad un potenziale variabile, quando τ sia così piccolo da poter supporre che in questo brevissimo intervallo di tempo la lastrina non si sia sensibilmente scostata dalla posizione di riposo, se si indica con r la resistenza interposta tra quel punto del circuito che comunica col piattello isolato e il punto del circuito che trovasi a terra, si ha

$$\alpha = B r e ,$$

dove B è un coefficiente che dipende dalle condizioni dell'apparecchio e dalle unità di misura scelte ed e è l'energia che si dissipa nella resistenza r per l'effetto Joule. Nell'unità di resistenza l'energia σ sarà dunque

$$\sigma = \frac{e}{r} = \frac{1}{B} \frac{\alpha}{r^2}$$

e se nel circuito la resistenza totale fosse R, l'energia totale E sarebbe data da

$$E = R \sigma = \frac{1}{B} \frac{R}{r^2} \alpha ;$$

prendendo una unità speciale di energia per la quale fosse $B = 1$, la formola si ridurrebbe a

$$E = \frac{R}{r^2} \alpha .$$

È facile una verifica dell'apparecchio: se, lasciando immutate le condizioni del circuito, si deriva il piattello sopra un altro punto del circuito per il quale la resistenza interposta fino al punto a terra sia r_1, la deviazione α' deve essere tale da aversi

$$\frac{\alpha}{r^2} = \frac{\alpha'}{r_1^2}$$

e quindi per E un valore costante. E questa verifica si è sempre fatta per conoscere in determinate condizioni del cir-

cuito l' energia totale disponibile, ottenendo sempre valori tra loro concordantissimi.

Si è fatto uso della formola precedente per ottenere il valore R delle resistenze elettrolitiche quando venivano inserite nel circuito di scarica.

Misura del potenziale.

Per la misura del potenziale si è fatto uso di un elettrometro Righi, nel quale era stato curato particolarmente l' isolamento della parte interna.

Un interruttore a cerniera permetteva di stabilire o togliere la comunicazione dell' ago dell' elettrometro con uno dei conduttori dello spinterometro principale: l' interruttore veniva manovrato con un filo di seta paraffinata dal posto dove si leggevano con un cannocchiale le deviazioni dell'ago riferite ad una scala graduata opportunamente disposta: l'involucro esterno dell' elettrometro comunicava col suolo.

Per ottenere il valore del potenziale di scarica, si lasciava in modo permanente la comunicazione tra l' elettrometro e lo spinterometro e si regolava la velocità della macchina in modo che l'elettrometro potesse sicuramente seguire la variazione del potenziale del condensatore fino al momento in cui scoccava la scintilla. Se δ è la deviazione osservata, è noto che si ha

$$V = k\sqrt{\delta}$$

dove k è una costante che dipende dalle condizioni nelle quali funziona l' elettrometro.

Quando invece si voleva misurare il potenziale residuo, si isolava con l' interruttore l' elettrometro e si stabiliva per un brevissimo tempo la comunicazione tra lo stesso elettrometro e lo spinterometro immediatamente dopo avvenuta la scarica.

Per l' esattezza di queste ultime misure era evidentemente necessario che l' elettrometro tenesse molto bene la carica e quindi molto accurato fosse il suo isolamento.

Misura delle quantità di elettricità.

Per la misura delle quantità di elettricità ho seguito molti metodi, quello dell'elettrometro balistico, quello alcalimetrico, quello del galvanometro ma con risultati non molto soddisfacenti; e mi sono convinto che il metodo che dava ancora i migliori risultati era quello più semplice e sbrigativo di tener conto dei giri della macchina, facendo in modo che questa girasse in modo uniforme: per questo la macchina di Holtz-Woss era mossa con motore elettrico nel quale circolava la corrente costante di una batteria di accumulatori.

Naturalmente le misure di q e Q venivano fatte a breve intervallo l'una dall'altra, così da potersi ritenere costante il rendimento della macchina: e siccome nei calcoli entrava il rapporto $\frac{q}{Q}$, è chiaro che presentava grande interesse soltanto la condizione che la macchina funzionasse nello stesso modo mentre si misuravano i due termini del rapporto.

Misura della jonizzazione.

Il tubo generatore dei raggi Röntgen era posto dinnanzi ad una finestra circolare praticata su una spessa lastra di piombo, la quale a sua volta chiudeva un'apertura fatta nel muro che separava la stanza dove si producevano le scariche da quella dove si trovavano gli apparecchi per la misura della jonizzazione.

La finestra della lastra di piombo era protetta da una sottile lastra di alluminio, isolata, la quale si manteneva carica mediante una apposita pila di 338 elementi. Dietro la lastra di alluminio, a qualche centimetro di distanza, si trovava disposto verticalmente ed accuratamente isolato un disco di rame di diametro alquanto maggiore della finestra circolare della lastra di piombo: il centro della finestra ed il centro del disco erano posti nella stessa retta orizzontale. Il disco di rame, ricoperto di nero fumo per evitare l'emissione di raggi secondari, comunicava con l'ago di un elettrometro del

Mascart, del quale le due coppie di quadranti erano portate a potenziali eguali e contrari mediante una pila di 120 elementi: così con l' elettrometro si misurava la carica che per effetto della jonizzazione veniva trasportata dalla lamina di alluminio sul prospiciente disco di rame. L' elettrometro e la pila erano contenuti in una grande cassa metallica, la quale per mezzo di spessa stagnola, di cui era tapezzata l' apertura aperta nel muro, si prolungava fino alla lastra di piombo: così che anche il disco metallico ed il filo di comunicazione tra il disco e l' elettrometro erano nell' interno del conduttore chiuso che conteneva l' elettrometro e la pila.

La sensibilità dell' elettrometro era mantenuta costante, provandone la deviazione con una pila campione e correggendo le piccole variazioni con leggeri spostamenti della scala.

Per ottenere in ogni caso valori paragonabili, sarebbe stato necessario che il campo esistente tra la lastrina di alluminio ed il disco di rame comunicante con l' elettrometro fosse stato così intenso da esser sicuri che tutti i joni prodotti dai raggi Röntgen provenienti dal tubo avrebbero ceduto le loro cariche sulle armature che limitavano il campo medesimo.

Siccome non mi è stato possibile disporre di un campo così intenso, ho supplito col calcolo, per mezzo della relazione che esiste tra la carica I_0 che viene raccolta per ogni unità di superficie in un campo molto intenso, quando cioè la quantità di elettricità accusata dall' elettrometro sia corrispondente a quella di tutti i joni prodotti, e la carica I che invece si osserva quando tale condizione di cose non è soddisfatta è quindi una parte dei joni prodotti si ricombina.

Ponendo

$$e = \frac{\alpha}{4\pi(k_1 + k_2)},$$

dove α rappresenta il coefficiente di ricombinazione dei joni positivi e negativi, k_1 e k_2 rappresentano rispettivamente le mobilità delle due specie di joni, e indicando con σ la den-

sità elettrica sulle armature del condensatore, il Langevin ha dimostrato la relazione

$$\frac{e}{\sigma} I = \log \left(1 + \frac{e}{\sigma} I_0 \right).$$

La formola suppone che la quantità Q_0 di elettricità sia sufficientemente piccola in modo che la presenza dei joni nel gas non modifichi sensibilmente il valore del campo.

Per determinare I_0 si misurano le due quantità di elettricità I_1 ed I_2 raccolte per due campi differenti per i quali le densità siano σ_1 e $\sigma_2 = m \sigma_1$; ponendo

$$(1) \qquad \frac{e}{\sigma} I_0 = x$$

si hanno le due equazioni

$$(2) \qquad \frac{e}{\sigma_1} I_1 = \log (1 + x) ; \qquad \frac{e}{\sigma_2} I_2 = \log \left(1 + \frac{x}{m} \right)$$

ed anche

$$\frac{I_1}{I_2} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\log (1 + x)}{\log \left(1 + \frac{x}{m} \right)} .$$

Con approssimazioni successive si giunge facilmente a stabilire il valore di x che soddisfa all' equazione, mentre le quantità I_1 ed I_2 si misurano con l' elettrometro e le quantità σ_1 e σ_2 sono proporzionali ai valori del potenziale ai quali viene portata la lastrina e quindi anche al numero degli elementi della pila di carica della lastrina medesima. Noto il valore di x, si può dalla (2) ricavare il valore di $\frac{e}{\sigma}$, che rimane costante in tutte le esperienze purchè rimanga costante la pressione del gas nel quale avviene la jonizzazione ed il valore del campo col quale si sperimenta. Conosciuto il valore di $\frac{e}{\sigma}$ per mezzo della (1) sarà facile calcolare il valore di I_0 per ogni valore di I.

Determinazione sperimentale del coefficiente $\frac{V + V_2}{V + V_1} \frac{q}{Q}$.

Come ho accennato più sopra, le misure dell'energia disponibile nel circuito sarebbero state molto più spedite se si fosse potuto far uso della formola

$$E = \frac{1}{2} (V^2 - V_1^2) C$$

poichè, essendo nell' elettrometro Righi

$$V^2 = k \delta \quad e \quad V_1^2 = k \delta_1$$

dove δ e δ_1 indicano le deviazioni lette nella scala, si avrebbe

$$E = \frac{k}{2} (\delta - \delta_1) C$$

e quindi se C fosse costante, dovrebbe ancora esser costante il valore $\frac{E}{\delta - \delta_1}$.

Nel seguente prospetto sono riportati per diverse distanze esplosive i valori di δ e δ_1; inoltre sono riportati i valori α' che si ottennero nell' elettrometro balistico: e poichè la resistenza R inserita nel circuito era di 24 presa come unità la resistenza di 10000 ohm, e la resistenza r sulla quale era derivato l' ago dell' elettrometro era di 2, l' energia E si otteneva dalla relazione

$$E = \frac{R}{r^2} \alpha' = 6 \alpha'$$

DE	δ	δ_1	$\delta - \delta_1$	α'	E	$\frac{E}{\delta - \delta'}$
cm.						
1,0	19,5	2,5	17,0	4,8	28,8	1,70
1,5	40,0	4,0	36,0	11,0	66,0	1,83
2,0	56,0	6,0	50,0	16,7	100,2	2,00
2,5	64,5	6,2	58,3	22,5	135,0	2,32
3,0	74,0	7,0	67,0	27,4	164,4	2,45

Dallo specchietto risulta manifesto che il rapporto $\frac{E}{\delta - \delta_1}$, e per ciò anche la capacità del condensatore, non rimane costante quando si fa variare la differenza di potenziale esistente tra le due armature: riconfermandosi così un fatto già noto, dell' influenza cioè che esercita sulla quantità di elettricità che si scarica la differente penetrazione delle cariche nel coibente e la variazione della costante dielettrica.

Ho quindi verificato se meglio rispondesse allo scopo l' altra formola

$$E = k \frac{V + V_1}{2} Q$$

dove k è una costante che dipende dalle unità di misura che si scelgono per V e per Q: si dovrebbe in tal caso avere

$$\frac{E}{(V + V_1) Q} = \text{costante} .$$

Nel seguente specchietto sono riportati i valori ottenuti: Q è espresso in giri della macchina.

DE	δ	$V=\sqrt{\delta}$	δ_1	$V_1=\sqrt{\delta_1}$	$V+V_1$	Q	$(V+V_1)Q$	E	$\frac{E}{(V+V_1)Q}$
cm.									
1,0	19,5	4,4	2,5	1,6	6,0	1,7	10,2	29,0	2,84
1,5	40,0	6,3	4,0	2,0	8,3	2,6	23,6	66,0	2,80
1,8	50,0	7,1	5,4	2,3	9,4	2,9	27,3	83,4	3,05
2,0	56,0	7,5	6,0	2,4	9,9	3,4	33,7	100,2	2,97
2,5	64,5	8,0	6,2	2,5	10,5	4,2	44,1	135,0	3,06
3,0	74,0	8,6	7,0	2,6	11,2	5,1	57,1	164,4	2,87

I valori dell' ultima colonna mostrano dunque chiaramente che la formola è verificata in modo soddisfacente e che quindi anche i metodi adoperati per le misure di V, di Q e di E rispondono bene allo scopo.

Per ricavare il valore del coefficiente $\frac{V+V_2}{V+V_1} \cdot \frac{q}{Q}$ che d' ora innanzi indicheremo con la lettera M, ho quindi inserito il tubo ed ha determinato i valori di V_2 e q, essendo tutte le altre quantità riportate nel precedente specchietto. I risultati ottenuti sono i seguenti:

Resistenza inserita nel circuito: $R = 24$.

Capacità del condensatore: $C = 2$ bottiglie in cascata.

DE	δ_2	$V_2=\sqrt{\delta_2}$	q	M
cm.				
1	13,7	3,7	0,54	0,429
1,5	28,0	5,3	1,00	0,491
1,8	30,2	5,5	1,27	0,586
2,0	32,5	5,7	1,65	0,645
2,5	37,2	6,1	2,40	0,767
3,0	39,7	6,3	3,2	0,834

Restava infine di determinare il valore del coefficiente $M = \frac{V + V_2}{V + V_1} \cdot \frac{q}{Q}$ lasciando costante la distanza esplosiva, e quindi il potenziale di scarica, e variando invece la resistenza inserita nel circuito: è noto infatti che, aumentando la resistenza, diventa minore la quantità di elettricità che si scarica e quindi per ogni valore di V devono variare i valori di V_1, V_2, q e Q.

Nel seguente specchietto sono riportati i risultati ottenuti nelle seguenti condizioni del circuito:

Distanza esplosiva: D E = 2 cm.

Deviazione dell'elettrometro Righi: $\delta = 69$; $V = \sqrt{\delta} = 8,3$.

Da tutte le serie fatte risulta che il valore del coefficiente $\frac{V + V_2}{V + V_1} \frac{q}{Q}$ è indipendente dalla capacità del condensatore: la serie qui sotto riportata è stata ottenuta con la capacità di 2 condensatori disposti in cascata.

R (ohm)	δ_1	$V_1 = \sqrt{\delta}$	δ_2	$V^2 = \sqrt{\delta_2}$	$\frac{V + V_2}{V + V_1}$	Q	q	M
120 000	7,3	2,7	36,0	6,0	1,30	3,6	1,83	0,663
240 000	10,4	3,2	40,0	6,3	1,27	3,5	1,80	0,647
650 000	12,3	3,5	50,4	7,1	1,30	3,3	1,42	0,560
1300 000	15,2	3,9	56,2	7,5	1,29	3,1	1,17	0,490
1850 000	18,5	4,3	59,3	7,7	1,27	2,9	1,00	0,432

Con i valori di R e di M ho quindi tracciata una curva su carta millimetrata e da questa curva ho poi tratti i valori di M per quelle altre resistenze che durante le esperienze venivano inserite nel circuito.

Determinazione della capacità dei condensatori.

Come ho accennato da principio, in queste ricerche poteva disporre di 8 condensatori isolati, i quali potevano col-

locarsi o in cascata o in batteria. Siccome i condensatori non erano tutti eguali, ho anzitutto misurato la loro capacità dall' energia che essi fornivano nelle stesse condizioni del circuito.

Essendosi posta la resistenza del circuito eguale a 240000 ohm ed essendosi derivato sull' elettrometro 20000 ohm, il valore di k per il quale dovevasi moltiplicare la lettura dell' elettrometro balistico per avere l' energia totale era, prendendosi sempre per unità la resistenza di 10000 ohm,

$$k = \frac{R}{r^2} = \frac{24}{4} = 6 .$$

I risultati ottenuti furono i seguenti:

gli otto condensatori disposti in cascata

$$\alpha' = 3,9 \quad k = 6 \quad E_T = 23,4 ;$$

quattro condensatori disposti in cascata

$$\alpha' = 8,5 \quad k = 6 \quad E_T = 51,0 ;$$

due condensatori disposti in cascata

$$\alpha' = 16,7 \quad k = 6 \quad E_T = 100,2 ,$$

quattro condensatori disposti due per due in batteria e le due batterie disposte in cascata

$$\alpha' = 36,0 \quad k = 6 \quad E_T = 216,0 ;$$

sei condensatori disposti tre per tre in batteria e le due batterie disposte in cascata

$$\alpha' = 56,0 \quad k = 6 \quad E_T = 336,0 ;$$

otto condensatori disposti quattro per quattro in batteria e le due batterie disposte in cascata

$$\alpha' = 74,7 \quad k = 6 \quad E_T = 448,2 ;$$

Prendendo dunque come 1 la capacità degli otto condensatori disposi in cascata, le capacità delle altre combinazioni sono le seguenti:

otto condensatori in cascata	$C = 1$
quattro condensatori in cascata	$C = \frac{51}{23,3} = 2,18$
due condensatori in cascata	$C = \frac{100,2}{23,4} = 4,28$
quattro condensatori disposti due per due in batteria e le due batterie disposte in cascata	$C = \frac{216,0}{23,4} = 9,23$
sei condensatori disposti tre per tre in batteria e le due batterie disposte in cascata	$C = \frac{336,0}{23,4} = 14,36$
otto condensatori disposti quattro per quattro in batteria e le due batterie disposte in cascata	$C = \frac{448,2}{23,4} = 19,15$

Determinazione di I_0.

Per determinare quale sarebbe stata la deviazione che si sarebbe avuta all' elettrometro che riceveva la carica per la jonizzazione dell' aria prodotta dai raggi del Röntgen, se il campo fosse stato così intenso che tutti i joni prodotti avessero cedute le loro cariche alle armature che limitavano il campo medesimo, ho fatto uso, come già dissi, della formola seguente:

$$\frac{I_1}{I_2} \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\log(1 + x)}{\log\left(1 + \frac{x}{m}\right)},$$

nella quale I_1 ed I_2 rappresentano le deviazioni dell' elettrometro quando la lastrina di alluminio attraversata dai raggi Röntgen era caricata rispettivamente con un numero di elementi σ_2 e σ_1 ed $m = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$.

Posta la capacità $C = 2,18$ e inserita la resistenza di 80000 ohm, ho ottenuto con una distanza esplosiva di 2 cm. i seguenti valori:

Lastrina	caricata	con	338	elementi	$I_1 = 75$
»	»	»	120	»	$I_2 = 58$

così che la formola dava

$$\frac{75}{58} \cdot \frac{120}{338} = \frac{\log(1+x)}{\log\left(1 + \frac{x}{\frac{120}{338}}\right)}$$

e da questa si trova

$$x = 0,48 .$$

Ho quindi fatto diverse misure cambiando il numero degli elementi e confrontando i risultati ottenuti e quelli calcolati dalla formola precedente ponendo come cognito $I_1 = 75$ e come incognito il valore di I_2. Nel seguente prospetto sono riportati i valori ottenuti:

N°. degli elementi della pila di carica	I_2 osservato	I_2 calcolato
338	75	75,0
238	70	70,4
184	66	66,4
120	58	58,3
60	44	43,7

L' accordo tra i valori osservati e quelli calcolati è dunque completo.

Siccome tutte le esperienze furono fatte con la lastrina di alluminio caricata con tutti i 338 elementi della pila, per calcolare I_0 occorreva determinare $\frac{\varepsilon}{\sigma_1}$ dalla formola

$$\frac{\varepsilon}{\sigma_1} I_1 = \log(1+x) ;$$

ponendo $x = 0,48$ e $I_1 = 75$, si trova $\frac{\varepsilon}{\sigma_1} = 0,0023$.

Per un altro valore di I osservato nell' elettrometro la precedente equazione permette di determinare il val re di x e per mezzo della formola

$$\frac{\varepsilon}{\sigma_1} I_0 = x$$

si può quindi conoscere il valore di I_0 corrispondente al valore I osservato.

Riassunto generale delle esperienze.

Nei seguenti prospetti sono riassunti i risultati ottenuti lasciando costante la distanza esplosiva dello spinterometro di 2 cm. e variando invece la capacità del condensatore e la resistenza inserita nel circuito.

Per maggiore chiarezza richiamo il significato delle singole lettere che si trovano in testa delle colonne.

R resistenza in ohm inserita nel circuito di scarica, presa come unità la resistenza di 10^4 ohm.

M coefficiente per il quale si deve moltiplicare l' energia totale misurata quando il tubo è escluso, per ottenere quella che prende parte alla scarica quando invece il tubo è incluso.

r_1 resistenza sulla quale è derivato l' elettrometro balistico, quando il tubo è escluso;

α' deviazione osservata nell' elettrometro balistico quando il tubo è escluso;

$E_T = \frac{R}{r_1} \alpha'$ energia totale che si manifesta nel circuito quando il tubo è escluso;

$E'_T = M E_T$ energia che si deve avere nel circuito quando il tubo è incluso;

r_2 resistenza sulla quale è derivato l' elettrometro balistico quando il tubo è incluso;

α'' deviazione osservata nell' elettrometro balistico quando il tubo è incluso;

$\varepsilon_2 = \frac{R}{r_1^2} \alpha''$ energia che si manifesta nella resistenza R quando il tubo è incluso;

$W = E'_T - \varepsilon_2$ energia che deve manifestarsi nel tubo;

I jonizzazione misurata dalla deviazione dell' elettrometro del Mascart;

I_0 jonizzazione, che l' elettrometro misurerebbe se tutti i joni prodotti dai raggi Röntgen cedessero le loro cariche alle armature che limitano il campo, calcolato con le formole precedentemente riferite.

Nelle colonne W_c (calcolato) ed I_{oc} (calcolato) si trovano riportati i valori di W e di I_0 ottenuti con le seguenti formole:

$$W_c = A\, 10^{-bR}$$

$$I_{oc} = \frac{B}{S + R}$$

dove A, B, b ed S sono delle costanti: ritorneremo in seguito su queste due formole.

Capacità C = 1 Distanza esplosiva 2 cm.

R	M	r_1	α'	E_T	E'_T	r_2	α''	ε	W	W_c	I	I_0	$100 \frac{W}{I_0}$	I_{0c}
0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	15,3	—	100	15,3	99,3
4	0,672	2	24,0	24,0	16,1	4	1,2	0,3	15,8	15,1	36	91	17,3	91,0
8	0,667	2	11,9	23,8	15,9	6	3,3	0,7	15,2	14,8	33	83	18,3	84,0
16	0,655	4	23,5	23,5	15,4	10	6,9	1,1	14,3	14,3	28	69	20,7	73,1
24	0,647	4	15,7	23,5	15,2	10	5,9	1,4	13,8	13,8	26	65	21,2	64,7
50	0,610	6	16,6	23,2	14,1	6	1,5	2,1	12,0	12,3	20	47	25,5	47,0
97	0,545	8	15,2	23,0	12,5	8	1,5	2,2	10,3	10,3	14	34	30,3	31,4
148	0,480	10	15,3	22,6	10,8	10	1,6	2,4	8,4	8,1	10	24	35,0	23,1

Capacità C = 2,18 Distanza esplosiva 2 cm.

R	M	r_1	α'	E_T	E'_T	r_2	α''	ε	W	W_c	I	I_0	$100 \frac{W}{I_0}$	I_{0c}
0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	34,4	—	222	15,5	222
4	0,672	1	13,2	52,8	35,5	2	1,2	1,2	34,3	33,9	76	215	15,9	210
8	0,667	2	27,0	54,0	36,0	2	0,8	1,6	34,4	33,2	71	199	18,0	199
12	0,661	2	17,5	52,5	34,6	2	0,7	2,1	32,5	32,5	68	188	17,3	189
16	0,655	3	29,0	51,6	33,8	3	1,3	2,3	31,5	31,8	68	188	16,7	180
20	0,651	3	23,0	51,1	33,3	3	1,1	2,4	30,9	31,1	63	172	18,0	172
24	0,647	3	19,0	50,7	32,8	3	1,0	2,7	30,1	30,5	61	165	18,2	164
69	0,582	5	17,5	48,4	28,2	5	1,8	5,0	23,2	24,0	44	114	20,3	111
110	0,527	6	15,2	46,6	24,5	6	1,7	5,2	19,3	19,3	34	85	22,7	85
147	0,480	8	19,2	44,0	21,2	8	2,4	5,5	15,7	15,8	29	72	21,8	70

Capacità C = 4,28 Distanza esplosiva 2 cm.

R	M	r_1	α'	E_T	E'_T	r_2	α''	s	W	W.	I	I_0	$100 \frac{W}{I_0}$	I_{0c}
0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	66,2	—	447	14,8	451
4	0,672	1	25,5	102,0	68,5	1	0,5	2,0	66,5	64,9	131	435	15,3	431
8	0,667	2	50,8	101,6	67,7	2	1,6	3,2	64,5	63,6	127	417	15,4	412
12	0,661	2	33,8	101,4	67,0	2	1,4	4,2	62,8	62,4	122	395	17,4	395
16	0,655	2	25,3	101,2	66,2	2	1,3	5,2	61,0	61,2	119	382	16,0	379
20	0,651	2	20,1	100,5	65,4	2	1,2	6,0	59,4	60,0	114	360	16,5	364
24	0,647	2	16,7	100,2	64,8	2	1,2	7,2	57,6	58,8	112	352	16,3	351
69	0,582	3	12,5	95,8	55,6	3	1,3	10,0	45,6	47,1	83	247	18,4	248
110	0,527	5	21,1	92,8	48,9	5	2,4	10,6	38,3	38,5	71	199	19,2	196
149	0,480	5	15,1	90,0	43,2	5	1,8	11,0	32,2	31,8	60	163	19,7	163

Capacità C = 9,23 Distanza esplosiva 2 cm.

R	M	r_1	α'	E_T	E'_T	r_2	α''	s	W	W..	I	I_0	$100 \frac{W}{I_0}$	I_{0c}
0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	139	—	1156	12,0	1184
8	0,667	1	27,3	218,4	145,7	1	1,0	8,0	137,7	134,0	236	1082	12,7	1083
12	0,661	1	18,1	217,2	143,6	1	0,9	10,8	132,8	132	230	1035	13,0	1039
16	0,655	1	13,5	216,0	141,5	1	0,7	11,2	130,3	129	223	982	13,2	988
20	0,651	1	10,8	216,0	140,6	2	2,6	13,0	127,6	127	220	961	13,2	961
24	0,647	2	36,0	216,0	139,7	2	2,4	14,4	125,3	125	216	931	13,4	926
44	0,620	2	19,3	212,3	131,6	2	1,6	17,6	114,0	114,5	196	793	15,5	784
51	0,610	3	37,2	210,8	128,6	3	3,2	18,1	110,5	111	191	761	14,5	744
54	0,604	3	35,0	210,0	126,8	3	3,2	19,2	107,6	109,7	186	727	14,8	727
76	0,565	3	24,7	208,6	117,8	3	2,4	20,3	97,5	99,6	170	635	15,3	629
117	0,520	3	15,7	204,1	106,1	3	1,6	20,8	85,3	83,2	145	502	17,0	502
160	0,460	4	19,8	198,0	91,1	4	2,2	22,0	69,1	69,0	124	404	17,1	414

Capacità C = 14,36 — Distanza esplosiva 2 cm.

R	M	r_1	α_1	E_T	E'_T	r_2	α''	s	W	W_c	I	I_0	$100\frac{W}{I_0}$	I_{0c}
0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	220,5	—	1995	11,1	2023
12	0,661	1	28,2	338,4	223,7	1	1,2	14,4	209,3	209	303	1730	12,1	1778
24	0,647	2	55,8	334,8	216,6	2	3,7	22,2	194,4	198	292	1605	12,1	1586
67	0,588	2	19,5	326,6	192,0	2	1,8	30,2	161,8	163	250	1200	13,5	1144
90	0,555	3	32,0	320,0	177,6	3	3,1	31,0	146,6	147	230	1035	14,1	996
121	0,510	4	41,5	313,8	160,0	4	4,2	31,6	128,4	128	216	931	13,8	848
169	0,445	4	28,7	303,1	134,9	4	3,0	31,7	103,2	103	178	681	15,1	689

Capacità C = 19,15 — Distanza esplosiva 2 cm.

R	M	r_1	α_1	E_T	E'_T	r_2	α''	s	W	W_c	I	I_0	$100\frac{W}{I_0}$	I_{0c}
0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	288	—	2704	10,7	2800
24	0,647	1	18,6	446,4	288,8	1	1,2	28,8	260,0	260	340	2200	11,8	2200
68	0,582	2	25,7	437,0	254,3	2	2,4	40,8	213,5	215	295	1637	13,1	1581
120	0,510	2	14,1	423,0	215,7	2	1,4	42,0	173,7	173	246	1165	14,8	1186
169	0,445	3	21,9	411,2	183,0	3	2,3	43,2	139,8	140	220	961	14,5	961

Nel seguente prospetto sono riportati i valori dei coefficienti delle formole con le quali sono stati calcolati i valori di W_c e I_{oc}.

Capacità C	A	$\frac{A}{C}$	b	B	S	$\frac{B}{C}$
1	15,3	15,3	0,00190	4468	45,1	4468
2,18	34,4	15,7	0,00230	15124	68,0	7001
4,28	66,2	15,4	0,00214	37999	84,2	8877
9,23	139,0	15,0	0,00190	101962	86,1	11046
14,36	220,5	15,3	0,00195	176608	87,3	12298
19,15	288,0	15,1	0,00185	247280	88,4	12912

La formola

$$W_c = A\, 10^{-bR}$$

indica anzitutto che *l' energia disponibile nel tubo decresce in progressione geometrica quando la resistenza del circuito aumenta in proporzione aritmetica.*

Riguardo alle costanti A e b, dallo specchietto risulta che la costante A, per una determinata distanza esplosiva e per un determinato valore della resistenza, è proporzionale alla capacità del condensatore e che il coefficiente b essendo per tutte le capacità lo stesso dipende soltanto dalle unità di misura scelte.

Per quanto riguarda la jonizzazione, la formula:

$$I_{oc} = \frac{B}{S + R}$$

dimostra anzitutto che il tubo si comporta come una resistenza che si aggiunge alla resistenza R del circuito; e dal valore di S si vede che questa resistenza aumenta con la capacità e tende verso un limite raggiunto il quale l' influenza della capacità non è più sensibile.

Riguardo invece alla costante B, essa cresce da prima molto più rapidamente della capacità e soltanto per capacità elevate tende ad aumentare proporzionalmente alla capacità. Così che si potrebbe dire che per valori della capacità relativamente grandi e poichè S diventa pure costante, la jonizzazione per determinate condizioni di distanza esplosiva e di resistenza del circuito cresce proporzionalmente alla capacità adoperata.

Tenuto quindi conto che anche l' energia disponibile nel tubo è proporzionale alla capacità, risulta, ciò che del resto si vede anche nei numeri riportati negli specchietti, che la jonizzazione per capacità sufficientemente rilevanti è proporzionale alla energia disponibile nel tubo.

Dagli specchietti risulta inoltre manifesto che la jonizzazione decresce molto rapidamente per tutte le capacità adoperate col crescere della resistenza del circuito: ma il fatto in gran parte dipende dalla diminuzione dell' energia disponibile nel tubo.

Particolare interesse presenta la questione relativa alla migliore utilizzazione dell'energia disponibile nel tubo in rapporto alla jonizzazione, ed a questo proposito servono i valori contenuti nelle colonne che danno i quozienti $100 \frac{W}{I_0}$.

Da questi valori si vede:

1° che, per lo stesso valore della resistenza, l' utilizzazione migliora col crescere della capacità, perchè col crescere della capacità diminuisce il valore dell' anzidetto quoziente:

2° che, per la stessa capacità l' utilizzazione peggiora col crescere della resistenza e l' influenza della resistenza è tanto più sensibile quanto minore è la capacità adoperata.

Ora, poichè l' energia necessaria a produrre una determinata jonizzazione deve ritenersi costante, è chiaro che la parte di energia che si dissipa nelle azioni interne del tubo è, in rapporto all' energia disponibile, maggiore quando si adoperino piccole capacità e forti resistenze.

Per resistenze trascurabili, poichè il valore del quoziente $100 \frac{W}{I_0}$ è poco diverso per tutte le capacità adoperate, si

potrà quindi ritenere che la jonizzazione sia proporzionale all' energia disponibile nel tubo.

Riassunto delle esperienze con distanze esplosive differenti.

Nel seguente specchietto sono riassunti i valori ottenuti con diverse distanze esplosive, rimanendo invece costanti gli altri elementi e cioè la capacità e la resistenza del circuito.

La capacità adoperata era di C = 4,28 e la resistenza di 24.10⁴ ohm.

Le lettere poste sopra le diverse colonne hanno lo stesso significato degli specchietti precedenti.

C = 4,28 R = 240000

DE	M	r_1	α'	E_T	E'_T	r_2	α''	s	W	I	I_0	$100\frac{W}{I_0}$
cm.												
1,0	0,429	6	43,5	29,0	12,4	6	2,5	1,7	10,7	28	69	15,5
1,5	0,491	2	11,0	66,0	32,4	2	0,6	3,6	28,8	68	188	15,4
1,8	0,586	2	13,9	83,4	48,9	2	0,9	5,4	43,5	94	284	15,3
2,0	0,645	2	16,7	100,2	64,6	2	1,4	8,4	56,2	112	352	15,9
2,5	0,767	2	22,5	135,0	103,5	2	2,4	14,4	89,1	150	527	16,9
3,0	0,834	2	27,4	164,4	137,1	2	4,4	26,4	110,7	170	635	17,4

Dai valori riportati nello specchietto risultano evidenti i seguenti risultati :

1° l' energia disponibile nel tubo cresce molto più rapidamente della distanza esplosiva, e quindi ancor più rapidamente della differenza di potenziale corrispondente. Ciò dipende dal fatto che per maggiori distanze esplosive la quantità di elettricità che prende parte al fenomeno cresce anch' essa molto più rapidamente della differenza di potenziale, come appare manifesto dai valori di M ;

2° anche la jonizzazione cresce molto più rapidamente della differenza di potenziale di scarica come lo dimostrano i valori di I e quelli di I_0;

3° la jonizzazione cresce proporzionalmente all'energia disponibile, come si vede dalla costanza dei rapporti $100 \frac{W}{I_0}$.

Conclusione.

Dal complesso di tutte le misure si può affermare che la jonizzazione segue quasi fedelmente l'energia disponibile nel tubo: solo per piccole capacità e per grandi resistenze del circuito il rapporto tra l'energia e la jonizzazione aumenta indicando in tal modo che la parte di energia che va spesa nelle azioni interne del tubo è in queste condizioni una frazione maggiore dell'energia totale disponibile nel tubo.

Resta ora da esaminare come si modifichi la relazione esistente tra l'energia e la jonizzazione a diverse pressioni: e sarà questo l'argomento di ulteriori ricerche.

Parma, Istituto Fisico della R. Università,
ottobre 1911.

LIBRI NUOVI

Sir EDOARDO THORPE. — **Storia della Chimica.** — Versione dall'inglese. Introduzione e Note del Prof. RINALDO PITONI. S. T. E. N. 1911, pag. 326, L. 3.50.

Il Thorpe, con una sintesi rapida, ci mostra tutti gli avvenimenti nella scienza chimica anteriori al secolo XIX; e con una sicurezza ed una genialità non comuni, traccia un quadro compiuto dell'opera immensa dei chimici negli ultimi cento anni.

Tratta delle ricerche moderne, dagli albori della chimica organica, alla sintesi dei prodotti vitali, ai lavori del Fischer, dalla teoria atomica alla chimica-fisica, all'opera di Van t'Hoff, alla radioattività.

In una storia di questo genere, è facile comprendere come l'autore abbia seguito in ispecial modo lo sviluppo del suo paese, a preferenza di quello degli altri, e la semplice traduzione avrebbe offerto un libro di assai scarsa importanza per noi italiani. Perciò gli Editori pensarono d'integrare l'opera con opportune aggiunte per quella parte che riguarda il contributo degli italiani. Tale incarico fu affidato al prof. Rinaldo Pitoni, che ha seguito passo passo l'opera del Thorpe, aggiungendo qua e là una dilucidazione, qualche dato numerico, qualche data, un nome, contenendosi sempre nei confini segnati dalla natura dell'opera e anche correggendo qualche inesattezza storica; dove l'aggiunta avrebbe interrotto il filo del ragionamento del Thorpe, ha ricorso alle note.

Non fu tralasciato nessun nome italiano degno di essere ricordato: dal Sala al Biriguccі, fino al Malaguti, al Piria, al Sobrero, all'Avogadro, al Selmi, al Cannizzaro, al Bartoli; parecchi di questi nomi erano stati dimenticati dal Thorpe, nè sarebbe stato possibile pubblicare una storia della chimica in italiano, senza ricordarli.

In sostanza, il Pitoni ha dovuto rifare tutta la storia della chimica, integrando l'opera del Thorpe con le proprie note: anche materialmente appare che un sesto dell'opera è italiana e dedicata alla scienza italiana anche contemporanea. Così, pur non discutendo il merito dei viventi, compariscono nell'opera anche i nomi delle nostre autorità in materia di chimica, come quelli di Ciamician, Guareschi, Nasini, Paternò, ecc.

Un'opera ed un'iniziativa di questo genere troveranno certamente una larga fortuna in Italia; è questo l'augurio che noi facciamo al pri-

mo volume della « Storia delle Scienze » della Società Tipografico - Editrice Nazionale.

Dott. GIUSEPPE MAGRI.

A. A. MICHELSON. — **Lichtwellen.** — Uebersetzt und durch Zusätze erweitert von MAX IKLÉ. — Leipzig. I. A. Barth 1911, M. 7,60. Geb. M. 8,60.

Nella primavera del 1899 A. A. Michelson tenne nell'Istituto Lowell otto conferenze sul tema « Onde luminose e loro applicazioni. » Queste conferenze furono pubblicate nel 1903 ed ebbero tale successo, che dopo quattro anni fu necessario farne una ristampa.

Le questioni trattate in questo libro sono tuttora così interessanti e l'esposizione è così viva e chiara che l'opera ha un carattere di vera attualità ed è di piacevolissima lettura, Essa varrà sicuramente ad allargare e ad approfondire le nozioni dei fenomeni di interferenza e le loro applicazioni. In questa edizione tedesca il traduttore ha aggiunto un' appendice sulla produzione d' interferenze di ordine elevato, e una ampia e minuta, bibliografia.

Le diverse conferenze trattano dei seguenti temi: Moto ondulatorio e interferenze; Confronto del microscopio e del cannocchiale con l'interferometro; Applicazioni del metodo interferenziale alla misura di distanze e di angoli; Applicazioni dei metodi interferenziali alla spettroscopia; Onde luminose come unità di lunghezza; Analisi delle azioni del magnetismo sulle onde luminose con l'aiuto dell'interferometro e del reticolo; Applicazioni del metodo interferenziale all'astronomia; L'etere.

Gesammelte Abhandlungen von FRIEDRICH KOHLRAUSH. — Erster Band: Elastizität, Wärme, Optik, absolute elektrische Messungen und Verschiedenes. Pag. 1108, Leipzig, I. A. Barth 1910, M. 25. Geb. M. 26.

Questo volume è il primo dei due che conterranno l'intera produzione scientifica di Federico Kohlrausch. Il contenuto è disposto in sezioni, delle quali la prima intitolata « Elasticità e capillarità » occupa circa 200 pagine e contiene le prime pubblicazioni dell'autore, oltre a due lavori sulla capillarità apparsi nel 1906 e 1907.

La seconda sezione si intitola: « Calore, Termoelettricità e Meccanica del gas » e contiene descrizioni di apparecchi, determinazioni di costanti fisiche, relazioni fra proprietà, una Memoria teorica sulla Termoelettricità, e diverse note critiche.

La terza sezione occupa circa 50 pagine ed è dedicata all'« Ottica ». tiene in prevalenza note sulla misura degli indici di rifrazione fatte col metodo della riflessione totale.

La quarta sezione, che da sola occupa più di 650 pagine, tratta delle misure elettriche e magnetiche, ed è la più importante di tutte. In essa un lavoro sopra il valore assoluto dell'Unità Siemens di resistenza è notevole per la critica acuta delle esperienze del Comitato dell'Associazione Britannica, malgrado il risultato numerico erroneo.

Una ulteriore determinazione della resistenza assoluta del Mercurio dà un valore quasi identico a quello ora adottato. Questo lavoro e quello sulla determinazione dell'equivalente elettrochimico dell'argento sono stati condotti con una perizia e con una cura singolare, e offrono un modello delle numerose precauzioni che devono essere prese nelle misure di grande precisione.

Una sezione finale intitolata « Miscellanea e libri » contiene interessanti allocuzioni, rapporti, notizie biografiche, e la prefazione all'ultima edizione del « Lehrbuch der Praktischen Physik ».

In tutto sono 113 scritti pubblicati fra il 1863 e il 1910; se si pensa che rimangono ancora da raccogliere in un secondo volume i lavori sulla conducibilità degli elettroliti, sulla mobilità degli ioni, ossia i lavori pei quali il nome dell'autore è meglio noto, si trova che l'attività scientifica del Kohlrausch è stata veramente prodigiosa.

SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

Continuazione della Nota pubblicata a pag. XXX.

Ha fatto adesione alla Società il signor

Battaglia Aristide — Istituto Tecnico pareggiato, Velletri

Ha pagato la quota 1910 il Socio:

Rossi Paolo

Hanno pagato la quota 1911 i Soci:

Angelini Sebastiano
Bruschi Raffaele
Campetti Adolfo
Cantone Michele
Cinelli Modesto
Massardi Francesco
Rossi Paolo
Schincaglia Ignazio

Hanno pagato la quota 1912 i Soci:

Battaglia Aristide
Giacomelli Francesco
Lomeni Arturo

FINE DEL VOLUME II, SERIE VI.

ATTILIO MARIOTTI, *gerente responsabile.*

INDICE